VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

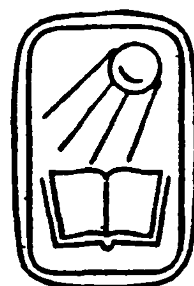
Г. КАРСЛОУ, Д. ЕГЕР

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Г. КАРСЛОУ и Д. ЕГЕР

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Перевод
со второго английского издания
под редакцией
проф. А. А. ПОМЕРАНЦЕВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

536
К 26
УДК 536.21

CONDUCTION OF HEAT IN SOLIDS

By

H. S. CARSLAW
Emeritus Professor of Mathematics
in the University of Sydney
and
J. C. JAEGER
Professor of Geophysics
in the Australian National University

SECOND EDITION

OXFORD
At the Clarendon Press

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора русского перевода 7
Из предисловия ко второму изданию 9
Из предисловия к первому изданию 9

Глава I. **Общая теория** 11

§ 1. Введение (11). § 2. Теплопроводность (11). § 3. Тепловой поток через произвольную поверхность (13). § 4. Изогермические поверхности (15). § 5. Теплопроводность изотропных тел (15). § 6. Дифференциальное уравнение теплопроводности для изотропного твердого тела (17). § 7. Дифференциальное уравнение теплопроводности для движущейся среды (21). § 8. Преобразование координат (23). § 9. Начальные и граничные условия (25). § 10. Безразмерные параметры (31). § 11. Экспериментальные методы определения теплопроводности (32). § 12. Математическая интерпретация начальных и граничных условий (33). § 13. Родственные дифференциальные уравнения (34). § 14. Упрощение общей задачи теплопроводности (35). § 15. Задачи, решения которых можно выразить в виде произведения решений более простых задач (39). § 16. Единственность решения задачи теплопроводности (41). § 17. Теплопроводность анизотропных твердых тел (43). § 18. Дифференциальное уравнение теплопроводности для анизотропных твердых тел (46). § 19. Теплопроводность тонкой кристаллической пластины (48). § 20. Изменение теплопроводности и вектор теплового потока в анизотропных твердых телах (51).

Глава II. **Линейный поток тепла. Неограниченное и полуограниченное твердое тело** 57

§ 1. Введение. Простые решения уравнения для линейного потока тепла (57). § 2. Неограниченное твердое тело. Решение Лапласа (59). § 3. Использование интегралов Фурье и преобразований Фурье (62). § 4. Полуограниченное тело с начальной температурой $f(x)$ и нулевой температурой поверхности (64). § 5. Полуограниченное твердое тело. Начальная температура равна нулю. Поверхность находится при температуре $\varphi(t)$ (67). § 6. Полуограниченное твердое тело. Температура поверхности является гармонической функцией времени (70). § 7. Полуограниченное твердое тело. Теплообмен на поверхности в среду с нулевой температурой. Начальная температура постоянна (75). § 8. Полуограниченное твердое тело. Теплообмен на поверхности в среду с температурой $f(t)$. Начальная температура равна нулю (78). § 9. Полуограниченное тело. Тепловой поток на границе $x=0$ является заданной функцией времени. Начальная температура равна нулю (79). § 10. Применение полученных результатов к определению теплопроводности (82). § 11. Полуограниченное твердое тело, внутри которого находится источник тепла (82). § 12. Температура Земли и колебания температуры на ее поверхности (85). § 13. Геотермический градиент и поток тепла (87). § 14. Возраст Земли. Анализ Кельвина (89). § 15. Неограниченное составное твердое тело (91). § 16. Случай зависимости термических характеристик вещества от температуры (92).

Глава III. **Линейный тепловой поток в твердом теле, ограниченном двумя параллельными плоскостями** 97

§ 1. Введение (97). § 2. Установившаяся температура (97). § 3. Область $0 < x < l$. Границы поддерживаются при нулевой температуре. Начальная температура $f(x)$ (98). § 4. Область $0 < x < l$. Начальная температура $f(x)$. Границы поддерживаются при постоянной температуре или изолированы (103). § 5. Область $0 < x < l$. Температуры границ равны $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Начальная температура $f(x)$ (106). § 6. Пластина с периодически изменяющейся

температурой поверхности (109). § 7. Установившаяся периодически изменяющаяся температура в составных пластинах (113). § 8. Пластина с заданным тепловым потоком на ее границе (115). § 9. Область $0 < x < l$. Теплообмен на границах в среду с температурой, равной нулю. Начальная температура равна $f(x)$ (117). § 10. Область $-l < x < l$. На границах $x = \pm l$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры. Начальная температура $f(x)$ (121). § 11. Частные случаи и численные результаты для пластины с граничным условием третьего рода (123). § 12. Область $-l < x < l$ с нулевой начальной температурой и теплообменом на границах со средой, имеющей температуру $\varphi(t)$ (127). § 13. Пластина, одна из поверхностей которой соприкасается со слоем идеального проводника или хорошо перемешиваемой жидкости (128). § 14. Пластина с внутренним источником тепла (130).

Глава IV. **Линейный тепловой поток в стержне** 134

§ 1. Введение (134). § 2. Дифференциальное уравнение распределения температуры в тонком стержне (134). § 3. Полуограниченный стержень. Случай установившейся температуры. Метод Форбса (136). § 4. Полуограниченный стержень. Периодически изменяющаяся температура. Метод Ангстрема (137). § 5. Ограниченный стержень, концы которого находятся при фиксированных температурах. Случай установившейся температуры (139). § 6. Стержень переменного сечения с охлаждающимися ребрами. Случай установившейся температуры (141). § 7. Ограниченный стержень при наличии теплообмена на его поверхности. Случай неустановившейся температуры (144). § 8. Ограниченный стержень с периодически изменяющейся температурой концов. Метод Неймана (147). § 9. Задачи по теплопроводности в движущемся стержне (148). § 10. Уравнение теплопроводности для тонкой проволоки, нагреваемой постоянным электрическим током (149). § 11. Установившаяся температура. Определение коэффициента теплопроводности (151). § 12. Сильно нагретая проволока, по которой протекает электрический ток (154). § 13. Установившийся поток тепла в составной проволоке (156). § 14. Неустановившаяся температура в проволоке, по которой течет электрический ток (157). § 15. Кольцо Фурье (159).

Глава V. **Поток тепла в теле с прямоугольным сечением** 163

§ 1. Введение (163). § 2. Неограниченное твердое тело прямоугольного сечения. Установившаяся температура (164). § 3. Установившаяся температура в неограниченном теле прямоугольного сечения $0 < x < a$, $0 < y < b$ (167). § 4. Тонкая пластина с прямоугольным сечением при наличии теплообмена на ее поверхности (170). § 5. Установившаяся температура в теле прямоугольного сечения $-a < x < a$, $-b < y < b$ при наличии источника тепла (171). § 6. Неустановившееся состояние. Решение в виде произведения решений (172). § 7. Неустановившееся состояние. Произвольные начальные и граничные условия (175).

Глава VI. **Тепловой поток в прямоугольном параллелепипеде** 176

§ 1. Введение (176). § 2. Установившаяся температура (177). § 3. Двойные и кратные ряды Фурье (180). § 4. Неустановившаяся температура. Решение в виде произведения решений (183). § 5. Определение коэффициента теплопроводности и экстраполяция кривых охлаждения (185). § 6. Неустановившаяся температура. Тройной ряд Фурье (186).

Глава VII. **Тепловой поток в неограниченном цилиндре кругового сечения** 187

§ 1. Введение (187). § 2. Установившаяся температура. Радиальный поток (188). § 3. Установившаяся, периодически изменяющаяся температура в круговых цилиндрах (192). § 4. Неограниченный цилиндр. Радиальный поток. Неустановившаяся температура (193). § 5. Интегралы $\int\limits_0^a rJ_n(\alpha r)\,J_n(\beta r)\,dr$ и $\int\limits_0^a r\,[J_n(\alpha r)]^2\,dr$ (195). § 6. Неограниченный цилиндр с температурой поверхности $\varphi(t)$ и начальной температурой $f(r)$ (197). § 7. Неограниченный цилиндр с теплообменом на поверхности (199). § 8. Неограниченный цилиндр с постоянным потоком тепла на поверхности (201). § 9. Неограниченный цилиндр с внутренними источниками тепла (202). § 10. Неограниченный полый

цилиндр. Радиальный поток (203). § 11. Неограниченный цилиндр. Установившаяся температура. Общий случай (205). § 12. Неограниченный цилиндр. Неустановившаяся температура. Общий случай (207).

Глава VIII. Тепловой поток в областях, ограниченных координатными поверхностями цилиндрической системы координат 212

§ 1. Введение (212). § 2. Установившееся распределение температур в неограниченной и полуограниченной среде, обусловленное подводом тепла через круг (212). § 3. Установившаяся температура в ограниченном и полуограниченном цилиндрах (215). § 4. Неустановившееся состояние. Решения в форме произведений (222). § 5. Определение теплопроводности вещества в форме цилиндра (224). § 6. Ограниченный цилиндр $-l < z < l$, $0 \leqslant r < a$ с начальной температурой $f(r, \theta, z)$ (225). § 7. Полуограниченный цилиндр (226).

Глава IX. Поток тепла в шаре и конусе 227

§ 1. Введение (227). § 2. Установившаяся температура. Радиальный тепловой поток (227). § 3. Шар $0 \leqslant r < a$ с начальной температурой $f(r)$ и температурой поверхности $\varphi(t)$ (230). § 4. Шар $0 \leqslant r < a$. Начальная температура $f(r)$. На поверхности сферы происходит теплообмен (233). § 5. Определение коэффициентов теплопроводности плохих проводников (235). § 6. Случай шара, находящегося в контакте с хорошо перемешиваемой жидкостью (236). § 7. Шар с заданным тепловым потоком на поверхности (238). § 8. Шар $0 \leqslant r < a$, внутри которого выделяется тепло (238). § 9. Полый шар $a < r < b$ (242). § 10. Область, ограниченная изнутри сферической поверхностью $r = a$ (243). § 11. Шар с начальной температурой $f(r, \theta, \varphi)$. Температура поверхности $r = a$ равна нулю (244). § 12. Поверхность шара $r = a$ поддерживается при температуре $F(\theta, \varphi)$ (246). § 13. Часть шара, вырезаемая конусом $\theta = \theta_0$. Температура поверхности равна нулю, начальная температура равна $f(r, \theta, \varphi)$ (246). § 14. Температура внутри Земли (248).

Глава X. Применение метода источников и стоков к задачам с неустановившейся температурой 251

§ 1. Введение (251). § 2. Мгновенный точечный источник (251). § 3. Мгновенные источники; линейный, плоский и поверхностные цилиндрический и сферический источники (254). § 4. Непрерывные и периодические источники (256). § 5. Поверхностный нагрев полуограниченной области (259). § 6. Выделение тепла в неограниченной среде (260). § 7. Движущиеся источники тепла (261). § 8. Дублеты (265). § 9. Метод последовательных волн (267). § 10. Метод изображений. Линейный тепловой поток (267). § 11. Применение метода изображений к двумерным и трехмерным задачам (271). § 12. Обобщение метода изображений Зоммерфельдом (273).

Глава XI. Изменение физического состояния 276

§ 1. Введение (276). § 2. Одномерные случаи плавления и затвердевания. Решение Неймана и его обобщение (277). § 3. Область $x > 0$ при других граничных условиях (285). § 4. Методы интегрального уравнения. Рассмотрение задач затвердевания, предложенное Лайтфутом (286). § 5. Решения в цилиндрических и сферических координатах (288). § 6. Осесимметричные задачи о замерзании и плавлении (289).

Глава XII. Преобразование Лапласа. Задачи для линейного теплового потока 292

§ 1. Исторический обзор (292). § 2. Преобразование Лапласа. Основные свойства (293). § 3. Решение уравнения теплопроводности методом преобразования Лапласа (296). § 4. Полуограниченная область $x > 0$. Решения, получаемые из таблицы изображений (298). § 5. Ограниченная область $0 < x < l$. Решения, получаемые из таблицы изображений. Решения для небольших значений времени (303). § 6. Ограниченная область $0 < x < l$. Применение теоремы обращения (306). § 7. Полуограниченная область $x > 0$. Применение теоремы обращения (312). § 8. Составные твердые тела (314).

Глава XIII. Преобразование Лапласа. Задачи для цилиндра и шара 322

§ 1. Введение (322). § 2. Цилиндр кругового сечения $0 \leqslant r < a$ с различными граничными условиями (322). § 3. Решения, применимые для малых интер-

валов времени (325). § 4. Полый цилиндр $a < r < b$ (327). § 5. Область ограничена изнутри цилиндром кругового сечения $r = a$ (329). § 6. Решения, применимые при больших значениях времени (334). § 7. Область $r > a$, ограниченная изнутри круговым цилиндром из идеального проводника (335). § 8. Составная цилиндрическая область (339). § 9. Шар. Радиальный тепловой поток (341).

Глава XIV. **Применение функций Грина к решению уравнения теплопроводности** 347

§ 1. Введение (347). § 2. Линейный тепловой поток. Полуограниченное твердое тело $x > 0$ (351). § 3. Линейный тепловой поток в области $0 < x < a$ (353). § 4. Двумерные задачи. Тела с прямоугольным сечением (354). § 5. Прямоугольный параллелепипед $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$ (355). § 6. Линейный тепловой поток. Составные твердые тела (356). § 7. Шар. Радиальный поток тепла (359). § 8. Цилиндр. Радиальный тепловой поток (361). § 9. Полуограниченное твердое тело $x > 0$. Трехмерные задачи (363). § 10. Область, ограниченная двумя параллельными плоскостями (364). § 11. Полуограниченное твердое тело $z > 0$ с тонкой пленкой на плоскости $z = 0$ из материала, имеющего значительно бóльшую теплопроводность. В точке $(0, 0, z')$ расположен единичный мгновенный источник (367). § 12. Неограниченное составное твердое тело. В точке $(0, 0, z')$ действует мгновенный единичный источник (368). § 13. Области, ограниченные цилиндрической поверхностью $r = a$ (369). § 14. Клин $0 < \theta < \theta_0$ (371). § 15. Цилиндрическая область (373). § 16. Области, ограниченные сферической поверхностью $r = a$ (374). § 17. Конус $0 \leqslant \theta < \theta_0$ (376). § 18. Непрерывные источники (378).

Глава XV. **Дальнейшие применения преобразования Лапласа** 381

§ 1. Введение (381). § 2. Теплопроводность в движущемся теле (381). § 3. Тепловые регенераторы и теплообменники (385). § 4. Тепловой поток в слоистых системах (392). § 5. Установившийся периодический режим (393). § 6. Линейная асимптотика и запаздывание (396). § 7. Выделение тепла (398). § 8. Система автоматического регулирования температуры (401). § 9. Неоднородные тела (405). § 10. Нагревание «цепочки» пластин, между которыми происходит теплообмен. Слоистые материалы (407). § 11. Прямое применение метода преобразования Лапласа к двумерным и трехмерным задачам (409).

Глава XVI. **Установившаяся температура** 415

§ 1. Введение (415). § 2. Источники и стоки при установившейся температуре (415). § 3. Установившийся поток к почти плоской поверхности. Топографические поправки для геотермического потока (418). § 4. Установившийся тепловой поток в составном теле (419). § 5. Практические задачи (423). § 6. Использование сопряженных гармонических функций в задачах с установившейся температурой (424). § 7. Приложения этого метода (426). § 8. Установившийся тепловой поток в многоугольнике (433). § 9. Тепловой поток между изотермическими поверхностями (437).

Глава XVII. **Интегральные преобразования** 445

§ 1. Введение (445). § 2. Интегральные преобразования и формулы их обращения (446). § 3. Неустановившийся тепловой поток (448). § 4. Установившийся тепловой поток (450). § 5. Конечные преобразования (451). § 6. Последовательные преобразования (453).

Глава XVIII. **Численные методы** 455

§ 1. Введение (455). § 2. Конечные разности (455). § 3. Линейный тепловой поток в неограниченном пространстве (458). § 4. Граничные условия (462). § 5. Выделение тепла, переменная температуропроводность и скрытая теплота (464). § 6. Релаксационные методы (464).

ПРИЛОЖЕНИЯ 467

1. Контурные интегралы и проверка решений, полученных при помощи преобразования Лапласа (467). 2. Функция ошибок и родственные функции (470). 3. О функциях Бесселя (477). 4. Корни некоторых трансцендентных уравнений (480). 5. Таблица преобразований Лапласа $\bar{v}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} v(t)\, dt$ (483). 6. Термические свойства некоторых веществ (486).

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Книга Карслоу выдержала много изданий. Первоначально — в 1906 г. — она составляла одно целое с другой книгой Карслоу по теории рядов и интегралов Фурье *). Это в известной степени предопределило содержание книги — как первого, так и последующих ее изданий. Настоящая книга представляет собой как бы вторую часть первоначальной, в которой излагается применение математических методов, приведенных в первой части, к соответствующим задачам теплопроводности. В последующих изданиях (1946 и 1959 гг.) число разбираемых задач значительно возросло, но приемы разбора и глубина рассмотрения изменились незначительно. Как отмечают авторы в предисловии к изданию 1946 г., материал книги разобран методами Фурье. В этом и состоит ее главная особенность.

После опубликования первого издания книги наступил период интенсивного развития методов математической физики. Для характеристики их глубины достаточно упомянуть о ряде фундаментальных трудов, например о книгах H. Poincaré, Theorie de la propagation de la chaleur, Paris, 1895; В. А. Стеклова, Основные задачи математической физики, ч. 1—1922 г., ч. 2—1923 г., Петербург; Ф. Франка и Р. Мизеса, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, ОНТИ, 1937; Р. Куранта и Д. Гильберта, Методы математической физики, т. I—1933 г., т. II — 1945 г.

В указанных трудах разобраны основные вопросы теории теплопроводности, а именно: 1) общие свойства решений задач теплопроводности, 2) обоснование метода разделения переменных, 3) развитие метода источников тепла, 4) теория плавления.

Работы редактора перевода по этим вопросам, задуманные как дополнения к настоящей книге, публикуются отдельно от нее.

Следует отметить, что в настоящем издании автор книги существенно изменил свое отношение к операционным методам решения задач теплопроводности. В первом издании книги Карслоу характеризует операционный метод Хевисайда следующим образом:

«Операционный метод Хевисайда можно назвать своего рода стенографией. Его формулы можно получить с помощью контурных интегралов, которыми мы будем пользоваться на следующих далее страницах. Результаты, которые здесь получаются, сведены в этой главе. Но за выводами формул Хевисайда трудно следить, и можно смело сказать, что сам он мало заботится о строгости своих выводов. Действительно строгое обоснование его метода **)

---

*) H. S. Carslaw, Introduction to the theory of Fourier's series and Integrals, Lnd., 1921.

**) Математически строгое обоснование метода Хевисайда дано в работе G. Doetsch, Theorie und Anvendung der Laplace-Transformation, J. Springer, Berlin, 1937. С операционными методами можно ознакомиться по следующим книгам: Г. Деч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, 1960;

можно провести, пользуясь контурными интегралами, как показано ниже» *).

В последнем издании Карслоу пересмотрел свое отношение к операционным методам. Он их принял в качестве рабочих методов решения задач теплопроводности и изложил — как сами методы, так и их применение — в главах XII, XIII и XV. В 1941 г. Карслоу выпустил специальную книгу по операционному исчислению **).

В главе XI «Изменение физического состояния» дается обзор работ по теории плавления. Глава написана Егером недостаточно полно и глубоко. В основном автор изложил в ней работы, вышедшие до 1950 г. После 1950 г. появились работы принципиального характера, в которых а) исследовались общие свойства решений задачи плавления—существования и единственности и б) развивались эффективные методы решения задачи. При этом в общем случае задача плавления рассматривалась нелинейной—в неоднородном веществе, плотность и теплопроводность которого изменяются с температурой.

Укажем эти работы:

а) 1. Kyner W. T. An Existence and Uniqueness Theorem for Nonlinear Stephan Problem. 2. Friedman A. Free boundary problem for parabolie equation I. J. of Math. a. Mech., **8**, No. 4 (1959). 3. Sestini G. Rivista Math. Univ. Parma **3**, 3—23, 103—130 (1952). 4. Дацев А. ДАН СССР, **87**, № 3 (1952). 5. Рубинштейн Л. И. Серия работ о единственности решения задачи Стефана: ДАН СССР, **77**, № 1, 37—40 (1951); **79**, № 1, 45—47 (1951); **117**, № 3, 387—390 (1957). 6. Олейник О. А. ДАН СССР, **113**, № 6 (1957). 7. Douglas J. A uniqueness theorem for the solution of a Stephan Problem, Proc. Am. Math. Soc. **8**, 402—408 (1957). 8. Evans G. W. II, Quart. J. Appl. Math. **8**, 312—319 (1950); **9**, 185—193 (1951).

б) 1. Landau X. T. Quart. J. Appl. Math. **8**, No. 1 (1950). 2. Miranker W. L. Quart. J. Appl. Math. **16**, 121—130 (1958). 3. Citron St. J. Aerospace Soc. **27**, No. 3 (1960). 4. Sounders P. J. Am. Rocket Soc. **30**, No. 11, 1030—1032 (1960). 5. Померанцев А. А. Тр. I Совещания по тепло- и массообмену 1961 г., т. III, 1963.

Главы I и II и приложения настоящей книги переведены канд. техн. наук Ю. Н. Петровым, главы III — VIII — канд. техн. наук В. М. Ерошенко, главы IX — XVIII — канд. техн. наук М. Г. Морозовым.

Редактирование и проверку математического текста перевода книги выполнили Г. И. Басс и Г. А. Шадрин.

В. А. Диткин и А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, Фитматгиз, 1961; Б. Ван-дер-Поль и Х. Бреммер, Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952; В. А. Диткин и А. П. Прудников, Операционное исчисление по двум переменным и его применения, Физматгиз, 1958; А. В. Лыков, Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1952.

*) Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1947.

**) Г. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, М., 1948.

А. А. Померанцев

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Смерть профессора Карслоу заставила меня самостоятельно готовить новое издание настоящей книги. При этом я старался — по возможности сохраняя форму и дух изложения Карслоу — наиболее полно изложить все точные решения и разрешимые задачи теории теплопроводности. Для этого пришлось ввести дополнительно очень много новых решений и значительно расширить изложение ряда вопросов, в частности вопросов генерирования тепла, поверхностного нагрева, плавления и затвердевания. Более подробно рассмотрены также применение теории теплопроводности к геофизике, анизотропные среды, движущиеся среды и вещества с переменными термическими коэффициентами.

Добавлены также новые таблицы и рисунки, где приведены численные данные по наиболее важным проблемам.

При этом оказалось, что число литературных ссылок превысило 700. Поскольку невозможно перечислить всю литературу, посвященную вопросам теплопроводности, мне пришлось ограничиться только теми статьями, с которыми я мог ознакомиться лично; однако при этом я пытался дать правильное представление о литературе по всем интересующим нас разделам.

В настоящую книгу введены еще две обзорные главы. В одной из них излагается как введение в метод интегральных преобразований, так и связь этого метода с классическим методом Фурье. В другой главе приведен обзор численных методов, получивших в последние годы широкое распространение, и указана связь полученных результатов с точными решениями, изложенными выше в тексте.

1959 г. *Д. Егер*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Книга Карслоу «Введение в теорию рядов Фурье и интегралов Фурье и математическая теория теплопроводности» (Carslaw, Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals and the Mathematical Theory of the Conduction of Heat) была опубликована в конце 1906 г. В 1920—1921 гг. она была полностью переработана и разделена на два тома. Второй том этого труда под названием «Введение в математическую теорию теплопроводности твердых тел» (Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids) *) был издан в 1921 г. За последние 25 лет было выполнено столько работ как теоретического, так и прикладного характера, содержащих применение полученных результатов, что книгу, отражающую достижения и успехи в этой области, следует считать новой, а не переработанным изданием старой. В данной книге, призванной заменить

*) В русском переводе эта книга вышла в 1947 г. под названием «Теория теплопроводности» (Гостехиздат, М., 1947). (*Прим. ред.*)

изданную ранее, весь материал трактуется в рамках современных математических методов. В частности, в нее включено полное изложение метода преобразования Лапласа и его применение к задачам теплопроводности. Этот метод заменил собой метод использования контурных интегралов, изложенный в гл. X и XI издания 1921 г. Хотя в принципе эти методы родственны друг другу, первый из них даже проще и глубже. При написании этой книги мы стремились сделать ее по возможности полезной инженерам и физикам, не изменяя ее математической сущности. Так, в ней приводятся подробные решения целого ряда задач практического характера и множество данных в виде таблиц и графиков. Значительно расширено изложение теории систем, применяемых в экспериментальных работах; другие вопросы, представляющие практический интерес, изложены довольно кратко (например, теория автоматической регулировки температуры; до сих пор в книгах математического характера такие вопросы не рассматривались).

Можно считать, что первое издание настоящей книги (кроме последних глав) посвящено в основном изложению методов Фурье, рассматриваемых классически. В первых десяти главах нового издания мы придерживались той же схемы. В них точно воспроизведена значительная часть материала, изложенного в главах I — IX старого издания, но обращено большое внимание на вопросы, интересующие инженеров и физиков.

В главах XII — XV метод преобразований Лапласа вводится и применяется к более сложным задачам. Прочитав главу XII, читатель увидит, что применение этого метода значительно упрощает решение задач, изложенных в предыдущих главах, и, вероятно, привыкнет пользоваться им.

Много интересных решений напечатано петитом; часто они приводятся без доказательств и их можно считать примерами. Все главы снабжены библиографическими ссылками на работы, посвященные как математической теории теплопроводности, так и физическим применениям теории. Мы надеемся, что они послужат полезным введением к литературе. Число таких статей выросло за последнее время настолько, что привести их все невозможно.

Г. Карслоу,
Д. Егер

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Введение

Если различные части тела находятся при различных температурах, то тепло течет от более горячих частей к более холодным. Следует различать три механизма распространения тепла: 1) теплопроводность, в результате которой тепло передается через само вещество; 2) конвекция, в результате которой тепло передается за счет относительного движения частиц нагретого тела, и 3) передача тепла излучением, при котором перенос тепла между пространственно разделенными частями тела происходит за счет электромагнитного излучения.

В жидкостях и газах конвекция и излучение играют первостепенную роль, тогда как в твердых телах конвекция вообще отсутствует, а излучение обычно пренебрежимо мало. В настоящей книге мы будем рассматривать только теплопроводность и, вообще говоря, твердое тело, хотя при определенных обстоятельствах полученные результаты остаются справедливыми и для жидкостей или газов.

В данной главе излагается общая теория теплопроводности; последующие главы посвящены специальным задачам и методам их решения.

§ 2. Теплопроводность

Можно сказать, что математическая теория теплопроводности основывается на гипотезе, подсказываемой следующим экспериментом.

Пусть задано некоторое твердое тело в виде пластины, ограниченное двумя параллельными плоскими поверхностями таких размеров, что при рассмотрении точек, расположенных в середине плоскостей, эти ограничивающие поверхности можно считать бесконечными. Обе поверхности пластины поддерживаются при различных температурах, причем разность между ними не должна достигать таких больших значений, при которых может возникнуть какое-либо заметное изменение свойств исследуемого твердого тела. Верхнюю поверхность пластины можно, например, поддерживать при температуре тающего льда, помещая на нее толченый лед, а нижнюю — при некоторой постоянной температуре, заставляя поток теплой воды непрерывно обтекать поверхность. Если эти условия сохраняются достаточно долго, то в каждой данной точке температура пластины достигает определенного значения, причем в точках, расположенных в какой-либо плоскости, параллельной ограничивающим поверхностям пластины, и достаточно удаленных от ее краев, температура будет оставаться одинаковой.

Рассмотрим часть пластины, ограниченную воображаемым цилиндром с поперечным сечением S и с осью, перпендикулярной поверхности пластины.

Предполагается, что этот цилиндр выделен в середине пластины, и поэтому тепловой поток через его образующие отсутствует. Пусть температура нижней поверхности равна v_0 °С, верхней v_1 °С ($v_0 > v_1$), и пусть толщина пластины равна d *см*. Результаты экспериментов над различными твердыми телами приводят к гипотезе, что при достижении установившегося температурного состояния количество тепла Q, протекающего за t *сек* через площадку S пластины, равно

$$Q = \frac{K(v_0 - v_1)}{d} St, \tag{2.1}$$

где K — константа, зависящая от свойств вещества и называемая *коэффициентом теплопроводности* данного вещества. Другими словами, тепловой поток между двумя поверхностями пропорционален разности температур между ними.

Нельзя считать, что такой вывод доказывается подобными экспериментами; они скорее подсказывают этот закон. Более точной проверкой этого закона служит соответствие экспериментальных данных с расчетными данными, полученными в математической теории, основанной на предположении о справедливости указанного закона.

Величина, обратная значению коэффициента теплопроводности, называется *удельным термическим сопротивлением* вещества.

Строго говоря, коэффициент теплопроводности K для данного вещества не остается всегда постоянным, а зависит от температуры. Однако в ограниченном диапазоне температур этим изменением K можно пренебречь, и в обычной математической теории предполагается, что коэффициент теплопроводности не изменяется с температурой. Более близкое приближение к действительному положению вещей можно получить, полагая K линейной функцией температуры v, т. е.

$$K = K_0(1 + \beta v),$$

где β мало и для большинства веществ отрицательно.

Из выражения (2.1) коэффициент теплопроводности получается в виде

$$K = \frac{Qd}{(v_0 - v_1) St}. \tag{2.2}$$

Отсюда следует размерность коэффициента K и природа единиц, в которых он выражается.

В качестве системы единиц, наиболее часто применяемых в физике, используется система СГС; в ней температуру измеряют в градусах Цельсия (°С), а за единицу тепла принимают калорию, т. е. такое количество тепла, которое требуется для повышения температуры воды *) массой в 1 *г* на 1° С. В этой системе K имеет размерность *кал*/(*сек*) (*см*²)(°С/*см*). В тех случаях, когда в этой книге даются численные значения, используется указанная система единиц **).

---

*) Опыты показывают, что количество тепла, необходимое для повышения температуры 1 *г* воды на 1° С, не одинаково при различных температурах, и для точного определения калории должна быть установлена температура воды. Обычно за эту температуру принимают 15° С, и такая калория определяется как количество тепла, необходимое для повышения температуры 1 *г* воды от 14,5 до 15,5° С.

**) В октябре 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам утвердила и рекомендовала всем государствам новую Международную систему единиц (систему СИ), единую для всех областей науки и техники. В СССР она введена в качестве предпочтительной с 1 января 1963 г.

Новая система единиц основана на шести основных величинах — длине, массе, времени, температуре, электрическом токе и силе света.

В приложении 6 приведены значения величин (в частности, K), характеризующих термические свойства некоторых типичных веществ, дающие представление о порядке этих величин [1].

Из выражения (2.2) следует, что в системах, где единицей тепла является такое его количество, которое вызывает у единицы массы воды увеличение температуры на одну единицу, K имеет размерность

$$[K]=[M]\,[L^{-1}]\,[T^{-1}], \tag{2.3}$$

так как отношение $\frac{Q}{v_0-v_1}$ имеет размерность массы.

Если желательно измерять количество тепла работой, необходимой для получения этого количества, то в качестве единиц используют обычно *эрг* или *джоуль*. Число джоулей J, соответствующее одной калории, называется механическим эквивалентом тепла. Для определенной выше калории $J=4{,}186$.

В основном эксперименте, из которого выведено наше определение теплопроводности, предполагалось, что исследуемое твердое тело однородно и что при нагревании какой-либо точки внутри этого тела тепло распространяется одинаково хорошо во всех направлениях. Такие твердые тела называются изотропными, в противоположность кристаллическим и другим анизотропным телам, у которых теплопроводность в одних направлениях больше, чем в других. Существуют также неоднородные твердые тела, в которых условия теплопроводности меняются от точки к точке и, кроме того, в каждой данной точке зависят от направления.

§ 3. Тепловой поток через произвольную поверхность

*Количество тепла, передающееся через произвольную поверхность S в точке P и рассчитанное на единицу поверхности в единицу времени, называется тепловым потоком *) через данную поверхность в данной точке и обозначается через f.*

Сначала мы покажем, что тепловой поток через плоскость в точке P *непрерывно* изменяется при изменении положения точки P, если направление нормали к этой плоскости остается постоянным. Пусть бесконечно малая площадка ω в плоскости, включающая точку P, служит основанием цилиндра, образующие которого равны и параллельны отрезку PP' длиной ε, где ε — бесконечно малая более высокого порядка, чем линейные размеры площадки ω (рис. 1).

Пусть $f_1\omega$ и $f_2\omega$ — величины тепловых потоков через основания цилиндра, включающие точки P и P'. По сравнению с этими потоками тепловой поток

В частности, за единицу температуры в ней принят градус Кельвина (°K).

Из производных единиц в системе СИ отметим следующие:

джоуль (*дж*) — *количество теплоты*, эквивалентное работе в 1 *дж*;

дж/кг · град — *удельная теплоемкость* вещества, для нагревания 1 *кг* которого на 1 *град* требуется количество теплоты, равное 1 *дж*;

вт/м · град = *дж/м · сек · град* — *коэффициент теплопроводности* вещества, в котором через 1 *м*² сечения при градиенте температуры в 1 *град/м* в 1 *сек* проходит количество теплоты в 1 *дж*.

Эти единицы связаны с соответствующими единицами в системе СГС следующим образом:

количество теплоты: 1 *кал* = 0,239 *дж*; 1 *дж* = 4,1868 *кал*;

удельная теплоемкость: 1 *кал/г·град* = $2{,}39\cdot10^{-4}$ *дж/кг·град*; 1 *дж/кг·град* = = $4{,}1868\cdot10^{3}$ *кал/г · град*;

коэффициент теплопроводности: 1 *кал/см · сек · град* = $2{,}39\cdot10^{-3}$ *вт/м · град*; 1 *вт/м · град* = 418,68 *кал/см · сек · град*. (*Прим. ред.*)

*) Численные значения теплового потока обычно даются в *кал/см² · сек*.

через криволинейную поверхность цилиндра пренебрежимо мал. Приращение количества тепла в цилиндре, таким образом, составит $\omega(f_1 - f_2)$. Обозначим теперь среднюю температуру вещества в пределах нашего цилиндра через v, расстояние между основаниями цилиндра — через σ, а плотность и удельную теплоемкость вещества — соответственно через ρ и c; тогда приращение количества тепла в цилиндре должно равняться следующей величине:

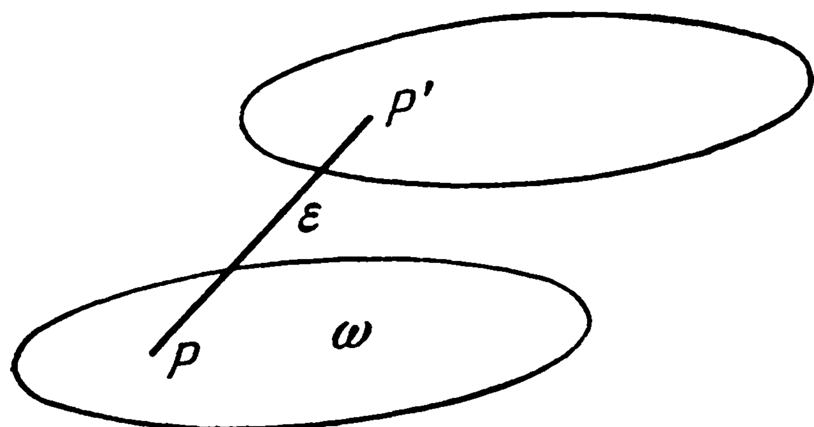


Рис. 1.

$$\rho c \omega \sigma \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Приравнивая обе величины друг другу, получим

$$f_1 - f_2 = \rho c \sigma \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Если $\sigma \to 0$, то выражение в правой части стремится к нулю, и следовательно, $f_1 \to f_2$.

Важно отметить, что приведенная выше аргументация не требует, чтобы термические свойства среды изменялись непрерывно; достаточно того, чтобы они были конечны. Это позволит нам в дальнейшем утверждать, что на поверхности раздела двух сред тепловой поток непрерывен (см. § 9 данной главы).

Покажем теперь, что если величины f даны для трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся в некоторой точке, то можно определить значение f для любой другой плоскости, проходящей через ту же точку.

Рассмотрим элементарный тетраэдр $PABC$, три грани которого PBC, PCA, PAB параллельны координатным плоскостям, а перпендикуляр, опущенный из точки P на грань ABC, имеет направляющие косинусы (λ, μ, ν) и длину p (рис. 2). Пусть площадь грани ABC равна Δ; тогда площади граней PBC, PCA и PAB соответственно равны $\lambda\Delta$, $\mu\Delta$, $\nu\Delta$.

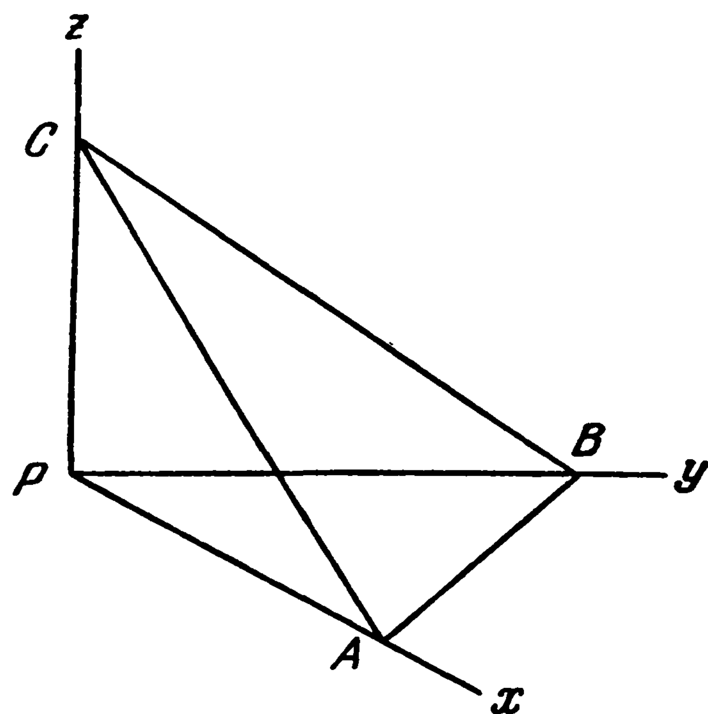


Рис. 2.

Если обозначить величины тепловых потоков через элементарные площадки PBC, PCA, PAB и ABC через f_x, f_y, f_z и f, то приращение количества тепла в тетраэдре можно записать в виде

$$(\lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z - f)\Delta.$$

С другой стороны, если ρ и c — соответственно плотность и удельная теплоемкость твердого тела, а v — средняя температура вещества в пределах нашего тетраэдра, то это приращение количества тепла должно равняться следующей величине:

$$\frac{1}{3}\Delta p \rho c \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z - f = \frac{1}{3} p \rho c \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{3.1}$$

Далее, если p стремится к нулю, то правая часть соотношения (3.1) также стремится к нулю и f_x, f_y, f_z и f становятся равными потокам тепла,

протекающим в точке P через плоскости, параллельные координатным плоскостям, и через плоскость, включающую точку P, нормаль к которой имеет направляющие косинусы (λ, μ, ν). Таким образом, мы имеем

$$f = \lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z. \tag{3.2}$$

Если в точке P известны значения трех тепловых потоков f_x, f_y, f_z через плоскости, параллельные координатным плоскостям, то из соотношения (3.2) можно определить тепловой поток через любую другую плоскость, проходящую через точку P.

Каждой точке P твердого тела соответствует вектор $\boldsymbol{f}$, составляющие которого равны f_x, f_y, f_z. Его модуль равен

$$f_m = \sqrt{(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)}, \tag{3.3}$$

а направлен он вдоль линии, направляющие косинусы которой равны

$$\frac{f_x}{f_m}, \quad \frac{f_y}{f_m}, \quad \frac{f_z}{f_m}. \tag{3.4}$$

Такой вектор можно назвать *вектором теплового потока* в точке P. Тепловой поток в точке P через плоскость, нормаль к которой определяется отношениями (3.4), как раз и равен f_m; поток в точке P через плоскость, нормаль к которой образует угол θ с направлением, определенным отношениями (3.4), равен $f_m \cos\theta$.

§ 4. Изотермические поверхности

Рассмотрим твердое тело, в котором распределение температур в момент времени t задано соотношением

$$v = f(x, y, z, t).$$

Выберем теперь в этом твердом теле поверхность таким образом, чтобы в какой-либо момент времени температура всех ее точек была одинаковой и равной, скажем, V. Такая поверхность называется *изотермической поверхностью* температуры V; можно считать, что эта поверхность отделяет части тела с температурой, большей V, от частей с меньшей температурой. Мы можем представить себе изотермы, проведенные в данный момент времени для различных температур, отличающихся друг от друга на целые градусы и на доли градуса. Эти изотермические поверхности могут располагаться любым образом, но две такие поверхности не могут пересекаться, так как никакая часть тела не может иметь две температуры одновременно.

Таким образом, можно считать, что изотермические поверхности разделяют твердое тело на тонкие слои.

§ 5. Теплопроводность изотропных тел

В дальнейшем, если это не оговорено особо, мы будем рассматривать только изотропные среды, т. е. такие среды, структура и свойства которых в непосредственной близости от какой-либо точки одинаковы во всех направлениях. Вследствие такой симметрии вектор теплового потока в какой-либо точке должен быть направлен вдоль нормали к изотермической поверхности, проходящей через эту точку, в сторону меньшей температуры.

Соотношение между скоростью изменения температуры в направлении нормали к изотерме и вектором теплового потока, имеющим такое же

направление, можно вывести из основного эксперимента, описанного в § 2 данной главы. В этом случае изотермы представляют собой плоскости, параллельные поверхностям пластины. Предположим, что изотермы температур v и $v+\delta v$ расположены на расстоянии δx друг от друга. Тогда, согласно соотношению (2.1), количество тепла, проходящее в единицу времени через единичную площадку в положительном направлении x, равно

$$-K\frac{\delta v}{\delta x},$$

или при $\delta x \to 0$

$$f_x = -K\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.1}$$

Обобщим этот результат для любой изотермической поверхности и в качестве *основной гипотезы математической теории теплопроводности примем, что величина теплового потока через любую изотермическую поверхность изнутри наружу* (*т. е. количество тепла, рассчитанное на единицу площади и единицу времени*) *равна*

$$-K\frac{\partial v}{\partial n},$$

где K — *коэффициент теплопроводности вещества, а символ* $\frac{\partial}{\partial n}$ *означает дифференцирование вдоль внешней нормали к поверхности.*

Приступим теперь к нахождению теплового потока через любую, не обязательно изотермическую, поверхность в некоторой ее точке P. Пусть изотерма в точке P касается плоскости XY; тогда тепловые потоки в точке P через плоскости, параллельные координатным плоскостям, будут равны

$$f_x = f_y = 0, \qquad f_z = -K\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Пусть теперь нормаль в точке P к заданной поверхности имеет направляющие косинусы (λ, μ, ν); тогда, согласно соотношению (3.2), тепловой поток через эту поверхность будет равен

$$-K\nu\frac{\partial v}{\partial z} = -K\frac{\partial v}{\partial h},$$

где символ $\frac{\partial}{\partial h}$ означает дифференцирование в направлении (λ, μ, ν), так как

$$\frac{\partial v}{\partial h} = \lambda\frac{\partial v}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Таким образом, *величина теплового потока в данной точке через любую поверхность равна*

$$-K\frac{\partial v}{\partial h}, \tag{5.2}$$

где символ $\frac{\partial}{\partial h}$ *означает дифференцирование в направлении внешней нормали.*

В частности, тепловые потоки через три плоскости, перпендикулярные координатным осям, соответственно равны

$$f_x = -K\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f_y = -K\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad f_z = -K\frac{\partial v}{\partial z}. \tag{5.3}$$

При использовании вектора f, введенного в § 3 настоящей главы, полученные результаты можно представить в виде

$$f = -K \operatorname{grad} v.$$

§ 6. Дифференциальное уравнение теплопроводности для изотропного твердого тела

Рассмотрим сначала случай, когда тепло течет через твердое тело, причем внутри тела источники тепла отсутствуют. Температура v в точке $P(x, y, z)$ является непрерывной функцией x, y, z и t; как показано в § 3, то же утверждение справедливо и для теплового потока.

Выделим в данном твердом теле элемент объема — прямоугольный параллелепипед с центром в точке P и ребрами длиной $2dx$, $2dy$ и $2dz$, параллельными осям координат. Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — грани, перпендикулярные оси x и отстоящие от центра параллелепипеда соответственно на расстоянии $-dx$ и $+dx$. Тогда количество тепла, поступающее в параллелепипед через грань $ABCD$, записывается в виде

$$4\left(f_x - \frac{\partial f_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz,$$

где f_x — величина теплового потока в точке P через плоскость, параллельную $ABCD$. Аналогичным образом количество тепла, вытекающее через грань $A'B'C'D'$, равно

$$4\left(f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz.$$

Тогда приращение количества тепла в параллелепипеде, обусловленное тепловым потоком через эти две грани, равно

$$-8\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial f_x}{\partial x}.$$

Точно так же находят аналогичные выражения для приращения количества тепла, обусловленного потоком тепла через остальные пары граней. Суммируя эти выражения, мы получим общее приращение количества тепла в параллелепипеде в виде

$$-8\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = -8\,dx\,dy\,dz\,\operatorname{div}\mathbf{f}, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{f}$ — вектор, определенный соотношением (3.4). Вместе с тем это же увеличение количества тепла в параллелепипеде можно представить в виде

$$8\rho c\,\frac{\partial v}{\partial t}\,dx\,dy\,dz, \tag{6.2}$$

где ρ — плотность, а c — удельная теплоемкость *) (при температуре v) твердого тела.

*) Удельная теплоемкость вещества c при температуре v определяется как $\delta Q/\delta v$, где δQ — количество тепла, необходимое для повышения температуры единицы массы вещества в пределах узкой области температур от v до $v+\delta v$. Теплоемкость зависит как от температуры, так и от способа нагрева; этот последний мы будем считать таким, чтобы деформации были постоянными. В данной книге теплоемкость выражается в единицах *кал/г·град*, причем теплоемкость воды при 15° С равна 1 *кал/г·град*. Следует отметить, что в определениях удельной теплоемкости имеются значительные расхождения. Так, например, некоторые авторы определяют удельную теплоемкость как отношение количества тепла, повышающего температуру единицы массы вещества на 1° С, к аналогичному количеству тепла для воды.

Для твердых тел изменением удельной теплоемкости в зависимости от способа нагрева пренебрегают, и поэтому c можно заменить на c_p, т. е. на удельную теплоемкость при постоянном давлении. К этому вопросу мы вернемся ниже (см. стр. 21).

Приравнивая выражения (6.1) и (6.2), получаем *)

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) = 0. \qquad (6.3)$$

Полученное уравнение справедливо для любой точки твердого тела при условии, что в этой точке отсутствует источник тепла. При использовании этого уравнения не требуется, чтобы твердое тело было однородным или изотропным. Уравнение (6.3) соответствует уравнению неразрывности в гидродинамике.

Для однородного изотропного тела, у которого коэффициент теплопроводности не зависит от температуры, f_x, f_y и f_z даются соотношениями (5.3), и уравнение (6.3) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad (6.4)$$

где

$$\varkappa = \frac{K}{\rho c}. \qquad (6.5)$$

Константу $\varkappa$ Кельвин назвал *коэффициентом тепловой диффузии*, а Максвелл — *коэффициентом температуропроводности* **), так как $\varkappa$ характеризует то изменение температуры, происходящее в единице объема вещества, которое обусловлено количеством тепла, протекающим в единицу времени через единичную площадку в слое единичной толщины и при единичной разности температур на его поверхностях.

Уравнение (6.4) известно как *уравнение теплопроводности*. В случае установившейся температуры, когда v не изменяется со временем, это уравнение превращается в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \qquad (6.6)$$

Если в точке $P(x, y, z)$ твердого тела существует источник тепла, выделяющий в единице объема за единицу времени количество тепла $A(x, y, z, t)$, то в соотношение (6.1) следует ввести дополнительный член $8A\,dx\,dy\,dz$ и в случае постоянного K соотношение (6.4) принимает вид

$$\nabla^2 v - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{A(x, y, z, t)}{K}. \qquad (6.7)$$

Для установившегося режима, т. е при $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, уравнение (6.7) превращается в уравнение Пуассона.

Почти во всех задачах, имеющих точное решение, а также в задачах, рассматриваемых в настоящей книге (если нет специальных указаний), термические характеристики вещества K, ρ, c считаются постоянными, т. е. не зависящими от положения выбранной точки и от температуры тела. Если это не так, то соотношение (6. 3) все же остается справедливым, причем при

*) В проводниках тепла, например в волокнистых или других материалах с большой пористостью, перенос тепла вследствие излучения может оказаться значительным, что приведет к появлению дополнительного члена в соотношении (6.3) [3, 4].

**) Значения коэффициентов температуропроводности для различных веществ приведены в приложении 6. Для того чтобы найти размерность этого коэффициента, обозначим размерность теплового потока и температуры соответственно через $[Q]$ и $[v]$. Тогда размерности $[K] = [Q][L^{-1}][T^{-1}][v^{-1}]$; $[c] = [Q][M^{-1}][v^{-1}]$; $[\rho] = [M][L^{-3}]$ и, следовательно, $[\varkappa] = [L^2][T^{-1}]$.

наличии источника тепла к правой его части добавляют член $A(x, y, z, t)$, а соотношение (6.7) принимает следующий вид:

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial v}{\partial z}\right) + A. \qquad (6.8)$$

Если K и A являются функциями только положения, то при решении уравнения (6.8), в принципе, не приходится сталкиваться с большими трудностями, и для тел, в которых термические характеристики имеют разрыв (составные тела), и тел, в которых изменение K с положением подчиняется простому закону, пригоден целый ряд решений. Если же термические свойства зависят от температуры, то ситуация значительно усложняется, так как уравнение становится нелинейным. Таких случаев, связанных с теплопроводностью, исследовано очень мало, что объясняется относительно слабым изменением термических свойств с температурой, а имеющиеся данные по этому вопросу весьма скудны и неточны. Между тем подобные задачи приобретают все большее значение в тех случаях, когда приходится рассматривать значительные изменения температуры, как, например, при застывании отливок. Кроме того, те же уравнения играют важную роль в теории диффузии, когда имеет место резкое изменение коэффициентов диффузии в зависимости от концентрации (см. [71], гл. IX—XI). Для решений в большинстве случаев были использованы численные методы; несколько общих результатов и случаи, для которых возможно точное решение, будут изложены ниже.

I. *Термические характеристики изменяются с температурой и не зависят от положения* *).

В данном случае соотношение (6.8) принимает следующий вид:

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} = K\nabla^2 v + A + \frac{\partial K}{\partial v}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\}. \qquad (6.9)$$

Как мы видим, это уравнение нелинейно. Соотношению (6.8) можно придать более простую форму [5—7], вводя новую переменную

$$\Theta = \frac{1}{K_0}\int_0^v K\,dv, \qquad (6.10)$$

где K_0 — значение K при $v = 0$. K_0 и нижний предел интегрирования вводят только для того, чтобы придать величине Θ размерность температуры и определенное значение. Из соотношения (6.10) следует, что **)

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{K}{K_0}\frac{\partial v}{\partial t}; \quad \frac{\partial\Theta}{\partial x} = \frac{K}{K_0}\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial\Theta}{\partial y} = \frac{K}{K_0}\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{K}{K_0}\frac{\partial v}{\partial z},$$

и соотношение (6.8) принимает вид

$$\nabla^2\Theta - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\Theta}{\partial t} = -\frac{A}{K_0}, \qquad (6.11)$$

где A и $\varkappa = \frac{K}{\rho c}$ выражены через новую переменную Θ. Таким образом, при использовании этой новой переменной сохраняется форма уравнения теплопроводности (6.7), но коэффициент температуропроводности $\varkappa$ становится зависимым от Θ. В большинстве случаев изменение $\varkappa$ с температурой значительно менее важно, чем аналогичное изменение K и, таким образом, с достаточным приближением можно считать $\varkappa$ постоянным. Например, для металлов, находящихся при температурах, близких к абсолютному нулю, как K, так и c приблизительно пропорциональны абсолютной температуре. В таких случаях, если A не зависит от v, то уравнение (6.11) принимает тот же вид, что и (6.7). Для случая постоянной теплопроводности можно сразу же

*) Несколько других методов для одномерного случая будет изложено в § 16 гл. II.

**) Θ является по существу потенциалом, градиент которого пропорционален тепловому потоку [8].

получить решение, заменив v на Θ, но при этом граничные условия должны определяться только v или $K\frac{\partial v}{\partial n}$; если они записываются в виде

$$\frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0,$$

где h — постоянная, то это замечание не имеет силы.

Случай установившегося теплового потока представляет особый интерес, так как при $A = \text{const}$ уравнение (6.11) превращается в уравнение Пуассона, а при $A = 0$ — в уравнение Лапласа. Таким образом, решения задач об установившемся тепловом потоке при теплопроводности, являющейся произвольной функцией температуры, и с граничными условиями для температуры или теплового потока, можно непосредственно получить из соответствующих решений для случаев постоянной теплопроводности.

Другую удобную форму уравнения легко получить, вводя переменную W — теплосодержание единицы массы вещества, измеренное относительно некоторого произвольного нулевого значения температуры. Подставляя W в уравнение (6.8), получим

$$\rho\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial v}{\partial z}\right) + A, \tag{6.12}$$

или, воспользовавшись соотношением (6.10),

$$\frac{\rho}{K_0}\frac{\partial W}{\partial t} = \nabla^2\Theta + \frac{A}{K_0}, \tag{6.13}$$

где W связано с Θ каким-то определенным образом.

Введение величины W имеет ряд преимуществ при решении задач, в которых учитывается скрытая теплота.

II. *Источник тепла внутри твердого тела.*

Случаи, когда внутри твердого тела имеется источник тепла, приобретают все большее и большее значение в технике. Внутри твердого тела тепло может образовываться в результате следующих процессов: а) пропускание электрического тока, б) диэлектрический или индукционный нагрев [9—12]; в) радиоактивный распад ([13, 14]; см. также библиографию к гл. II и IX); г) поглощение излучения *), д) переход механической энергии в тепловую при вязких или пластических деформациях; е) химические реакции ([71], гл. VIII; см. также библиографию к гл. XV настоящей книги), в том числе ряд самых различных процессов, начиная от гидратации цемента [15—19] **) и кончая созреванием яблок [20].

Во всех случаях, кроме последнего, количество выделяемого тепла в первом приближении не зависит от v; в более точном приближении оно обычно соответствует формуле

$$A = a + bv, \tag{6.14}$$

где a и b — постоянные, которые могут иметь любой знак ***).

Следует отметить, что уравнение (6.7) с величиной A, соответствующей выражению (6.14), можно точно решить многими способами (см. § 14 гл. I и § 7 гл. XV).

Количество тепла, выделяющегося в результате химической реакции нулевого порядка, обычно рассчитывают по формуле Аррениуса

$$A = A_0 e^{-\frac{k}{T}}, \tag{6.15}$$

*) Например, инфракрасные лучи сильно поглощаются слоем сетчатки глаза и могут повысить ее температуру до величины, вполне достаточной, чтобы повредить глаз.

**) В первом приближении количество выделяемого в этом случае тепла можно записать в виде ke^{-at}, причем количество тепла, выделенного 1 *г* цемента в течение 3 дней, примерно равно 50—100 *кал*; это позволяет принимать важнейшие технические решения, в частности при проектировании больших дамб.

***) Как известно, для большинства веществ температурный коэффициент электрического сопротивления положителен и, следовательно, b в соотношении (6.14) положительно; однако для некоторых материалов, в частности для графита и для расплавленных солей, b отрицательно. Значения b оказываются также отрицательными в задачах о диффузии с одновременно протекающей химической реакцией. Помимо этого, соотношение (6.14) с отрицательной величиной b служит грубым приближением для случая тела, отдающего тепло жидкости, циркулирующей в решетчатой системе трубок [21].

где A_0 и k — постоянные, а T — абсолютная температура [22—24]. Для реакций более высокого порядка следует использовать аналогичное, но более сложное выражение. В некоторых случаях его находят экспериментально, и оно имеет вид *)

$$A = A_0 \exp(bv).$$

Для всех описанных выше случаев не существует аналитических решений, и поэтому следует применять численные методы. Выражением (6.14) можно пользоваться как самым грубым приближением, но, по-видимому, точные решения очень сильно отличаются от перечисленных приближений.

III. *Эффекты термического расширения.*

Уравнение (6.3) выведено в предположении, что в результате деформации твердого тела работа не совершается, и поэтому c является удельной теплоемкостью только при постоянной деформации. Если напряжения в твердом теле вызывают деформацию, т. е. совершается работа, то это надо учесть, соответственно изменив уравнение (6.3). Если возможно неограниченное расширение при постоянном давлении, то уравнение (6.3) все еще имеет силу при условии, что c считают равным c_p, т. е. удельной теплоемкости при постоянном давлении. Если же это расширение ограничено, то в уравнении появляются дополнительные члены. Так, в случае напряжений, обусловленных, например, гидростатическим давлением p, в правую часть уравнения (6.3) следует добавить член

$$\frac{3\alpha T}{J}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{6.16}$$

где T — абсолютная температура, α — термический коэффициент линейного расширения, а под c в уравнении (6.3) следует понимать c_p, т. е. теплоемкость при постоянном давлении. Общий случай напряжений разобран в работах [28, 29] **).

§ 7. Дифференциальное уравнение теплопроводности для движущейся среды

Рассмотрим сначала твердое тело, движущееся со скоростью, компоненты которой равны u_x, u_y, u_z. При вычислении теплового потока через произвольную плоскость к тепловому потоку в неподвижном теле следует добавить член, обусловленный конвекцией, с составляющими $\rho c v u_x$, $\rho c v u_y$, $\rho c v u_z$. Тогда компоненты вектора теплового потока можно записать в виде

$$f_x = -K\frac{\partial v}{\partial x} + \rho c v u_x, \qquad f_y = -K\frac{\partial v}{\partial y} + \rho c v u_y, \qquad f_z = -K\frac{\partial v}{\partial z} + \rho c v u_z. \tag{7.1}$$

Подставив эти величины в уравнение (6.3), получим для случая постоянного K и отсутствия источника тепла внутри тела следующее выражение ***):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_x\frac{\partial v}{\partial x} + u_y\frac{\partial v}{\partial y} + u_z\frac{\partial v}{\partial z} - \varkappa\nabla^2 v = 0. \tag{7.2}$$

Уравнение (7.2) можно записать в виде

$$\frac{Dv}{Dt} - \varkappa\nabla^2 v = 0, \tag{7.3}$$

где D/Dt обозначает так называемую субстанциональную, или полную, производную [37]. Если внутри твердого тела имеется источник, выделяющий в единице объема в единицу времени количество тепла, равное A, т. е. источник мощностью A, то к правой части уравнения (7.3) нужно добавить член $\frac{A}{\rho c}$.

---

*) Такое соотношение встречается при решении некоторых химических задач [25], а также в теории теплового пробоя диэлектрика [26—27] (см. также § 7 гл. XV).

**) Эффект увеличения потенциальной энергии вследствие сжатия был впервые исследован Дюамелем [30].

***) Подобное обсуждение применительно к жидкости было проведено Вильсоном [31], который решил ряд интересных задач, связанных с установившимися распределениями температур. Следует также указать на некоторые другие работы [32, 33, 34]. Известен целый ряд точных решений для случая ламинарного течения вязких жидкостей, в частности для течения в трубе при пуазейлевском распределении скоростей [35, 36].

Следует отметить, что уравнение (7.2) можно получить путем преобразования системы координат к системе, движущейся со скоростью (u_x, u_y, u_z), в отношении которой справедливо обычное уравнение теплопроводности (6.4).

Вывод уравнений теплопроводности для случая течения сжимаемой жидкости будет изложен в сокращенном виде, так как эта задача аналогична задаче о теплопроводности в деформируемом твердом теле [38, 39]. Ясно, что термодинамические и гидродинамические величины, встречающиеся в наших исследованиях, должны быть определены совершенно точно. В дальнейшем мы будем использовать плотность ρ, абсолютную температуру T и внутреннюю энергию единицы массы U. Кроме того, мы введем подстрочные индексы, например, примем для координат обозначения x_i, где $i = 1, 2, 3$; повторение индексов означает, что нужно производить суммирование; например, в выражении (7.4) $l_i\xi_i$ означает $l_1\xi_1 + l_2\xi_2 + l_3\xi_3$. Воспользуемся формулой Грина *) [37, 40], согласно которой, если функции ξ_i $(i = 1, 2, 3)$ и их первые производные внутри замкнутой поверхности S являются непрерывными функциями x_i, то

$$\int\int l_i\xi_i\, dS = \int\int\int \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\, d\tau, \tag{7.4}$$

где l_i $(i = 1, 2, 3)$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности, левая часть — двойной интеграл по поверхности S, а правая часть — тройной интеграл по объему, ограниченному этой поверхностью.

Пусть S — некоторая малая замкнутая поверхность в жидкости, причем объем, ограниченный указанной поверхностью, всегда содержит одни и те же частицы жидкости. Обозначим элемент этой поверхности через dS, а элемент объема, ограниченного поверхностью S, через $d\tau$. Сохранение массы $\rho\, d\tau$ в произвольном элементе объема $d\tau$ означает, что

$$\frac{D(\rho\, d\tau)}{Dt} = 0. \tag{7.5}$$

Как показал Ламб [37], соотношение (7.5) приводит к уравнению неразрывности.

Пусть X_i — сила, отнесенная к единице массы, E_{ij} — тензор напряжений, а u_i — компоненты скорости; тогда уравнение движения для указанного элемента можно записать в виде

$$\frac{D}{Dt}\int\int\int \rho u_i\, d\tau = \int\int\int \rho X_i\, d\tau + \int\int E_{ij} l_i\, dS, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{7.6}$$

где поверхностные и объемные интегралы берутся соответственно по всей поверхности S и по всему ограниченному ею объему.

Используя соотношения (7.4) и (7.5), уравнение (7.6) можно записать в форме

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho X_i + \frac{\partial}{\partial x_i} E_{ij}. \tag{7.7}$$

Согласно первому закону термодинамики для указанного элемента получим

$$\frac{D}{Dt}\int\int\int \frac{1}{2}\rho u_i u_i\, d\tau + \frac{D}{Dt}\int\int\int \rho U\, d\tau = \\ = \int\int\int \rho X_i u_i\, d\tau + \int\int E_{ij} u_i l_j\, dS - \int\int f_i l_i\, dS, \tag{7.8}$$

где f_i — компоненты вектора теплового потока на поверхности S, т. е.

$$f_i = -K\frac{\partial T}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{7.9}$$

При использовании соотношений (7.4), (7.5) и (7.7) уравнение (7.8) приобретает следующий вид:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = E_{ij} e_{ij} - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \tag{7.10}$$

*) В русской литературе эту формулу называют формулой Остроградского. *Прим. ред.*)

где e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации, т. е.

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{7.11}$$

Уравнение вязкости дает связь между E_{ij} и e_{ij}, а именно

$$E_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk}\right), \tag{7.12}$$

где p — гидростатическое давление, μ — коэффициент вязкости, а $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}$ — символ Кронекера. Используя (7.12) и (7.9), можно записать уравнение (7.10) в виде

$$\rho\frac{DU}{Dt} = -pe_{ii} + 2\mu\left(e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \tag{7.13}$$

совпадающем по форме с уравнением (7.3).

Первые два члена в правой части соответствуют теплу, выделяемому вследствие процессов сжатия и трения в жидкости, третий член представляет собой обычную $\operatorname{div} f$. В левой части (7.13) стоит $\rho\frac{DU}{Dt}$, заменяющее величину $\rho c\frac{Dv}{Dt}$ в уравнении (7.3). Разумеется, можно выполнить дальнейшие преобразования уравнения (7.13), основанные на термодинамике; в частности, его можно выразить через энтропию.

§ 8. Преобразование координат

Приведенные выше уравнения можно легко преобразовать к другим системам ортогональных координат *). Наиболее удобными из них являются сферические координаты, в которых положение точки определяется расстоянием r от начала координат, широтой θ и азимутом φ, а также цилиндрические координаты, в которых положение точки определяется полярными координатами (r, θ) ее проекции на плоскость (x, y) и координатой z.

Эти системы координат являются частными случаями общей системы ортогональных координат, в которой положение точки задается пересечением трех ортогональных поверхностей

$$\xi = \text{const}, \qquad \eta = \text{const}, \qquad \zeta = \text{const}.$$

Покажем теперь, как легче всего осуществить это преобразование.

Рассмотрим элемент объема, ограниченный поверхностями $\xi \pm d\xi$, $\eta \pm d\eta$, $\zeta \pm d\zeta$, и допустим, что $A'B'C'D'$ и $ABCD$ лежат на поверхностях $\xi \pm d\xi$.

Пусть уравнение

$$ds^2 = \lambda^2 d\xi^2 + \mu^2 d\eta^2 + \nu d\zeta^2$$

определяет длину элементарной дуги, соединяющей точки (ξ, η, ζ) и $(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta)$.

Тогда площадь участка поверхности ξ, вырезаемого поверхностями $\eta \pm d\eta$ и $\zeta \pm d\zeta$ в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$, равна

$$4\mu\nu\, d\eta\, d\zeta,$$

а количество тепла, протекающее через эту площадку в единицу времени, равно

$$4\mu\nu\, d\eta\, d\zeta f_\xi,$$

где f_ξ — величина теплового потока через поверхность ξ в точке P.

---

*) В настоящей книге мы не будем рассматривать эллиптические координаты. Эллиптический цилиндр рассмотрен в работах Мак-Лахлана [41, 42]. Область, ограниченная изнутри эллиптическим цилиндром, рассмотрена в работе Трантера [43]. Вопрос об эллипсоидах изложен в работах [44, 45].

Следовательно, количество тепла, втекающее в элемент объема через поверхность $ABCD$, окончательно равно

$$4\left\{\mu\nu f_\xi - \frac{\partial}{\partial\xi}(\mu\nu f_\xi)\,d\xi\right\}d\eta\,d\zeta,$$

а количество тепла, вытекающее через поверхность $A'B'C'D'$, равно

$$4\left\{\mu\nu f_\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}(\mu\nu f_\xi)\,d\xi\right\}d\eta\,d\xi.$$

Отсюда полный прирост количества тепла в элементе объема, обусловленный тепловым потоком через эти две поверхности, равен

$$-8\frac{\partial}{\partial\xi}(\mu\nu f_\xi)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Для остальных поверхностей получим соответственно

$$-8\frac{\partial}{\partial\eta}(\nu\lambda f_\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \quad \text{и} \quad -8\frac{\partial}{\partial\zeta}(\lambda\mu f_\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Подставляя вместо f_ξ, f_η, f_ζ их выражения, а именно:

$$f_\xi = -\frac{K}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial\xi}, \qquad f_\eta = -\frac{K}{\mu}\frac{\partial v}{\partial\eta}, \qquad f_\zeta = -\frac{K}{\nu}\frac{\partial v}{\partial\zeta},$$

и приравнивая сумму полученных таким образом выражений величине

$$8\lambda\mu\nu\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,c\rho\frac{\partial v}{\partial t},$$

находим

$$\lambda\mu\nu\,c\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mu\nu}{\lambda}K\frac{\partial v}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\nu\lambda}{\mu}K\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}K\frac{\partial v}{\partial\zeta}\right).$$

Если K — постоянная и, как обычно, мы можем написать, что $\varkappa = \frac{K}{c\rho}$, то это соотношение принимает следующий вид:

$$\lambda\mu\nu\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mu\nu}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\nu\lambda}{\mu}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial v}{\partial\zeta}\right)\right]. \tag{8.1}$$

Сферические координаты. В этой системе

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta$$

и

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2.$$

Таким образом, уравнение для v принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\varkappa}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]. \tag{8.2}$$

Его можно написать так:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right], \tag{8.3}$$

где $\mu = \cos\theta$.

Цилиндрические координаты. В этой системе

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

и

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2.$$

Таким образом, уравнение для v принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\varkappa}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]. \qquad (8.4)$$

Его можно записать иначе:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]. \qquad (8.5)$$

§ 9. Начальные и граничные условия

Прежде чем приступить к математическому рассмотрению задач теории теплопроводности, необходимо сформулировать начальные и граничные условия, которым должна удовлетворять температура. Эти условия определяются частично непосредственными результатами экспериментов, а частично математической трактовкой гипотез, основанных на этих результатах.

Пусть внутри твердого тела температура v является непрерывной функцией x, y, z и t; пусть ее первая производная по t и первые и вторые производные по x, y и z также непрерывны. Указанные предположения не распространяются на границу твердого тела, а также на некоторый момент времени, с которого, как предполагается, начинается поступление тепла.

I. *Начальные условия.*

Предполагается, что в некоторый момент времени, принятый нами за начало отсчета координаты t, температура по всему телу задана произвольно. Если эта произвольная функция непрерывна, то мы должны найти такое решение задачи, которое по мере приближения t к нулю стремилось бы к заданной величине. Другими словами, если начальная температура задана в виде

$$v = f(x, y, z),$$

то наше решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\,\nabla^2 v$$

должно быть таким, чтобы для всех точек твердого тела выполнялось условие

$$\lim_{t \to 0}(v) = f(x, y, z).$$

Если начальное распределение температуры разрывно в некоторых точках или на поверхностях, то эти разрывы должны исчезнуть через очень короткое время, и тогда наше решение должно стремиться к заданной величине начальной температуры во всех точках, где распределение непрерывно.

II. *Граничные условия, или условия на поверхности.*

Перечислим условия на поверхности, обычно встречающиеся в теории теплопроводности.

А. *Задана температура на поверхности.* В этом случае температура может быть либо постоянной, либо зависеть от времени, либо от положения, либо, наконец, зависеть и от времени и от положения. Подобный случай граничных условий наиболее прост и уже достаточно хорошо изучен. Следует, однако, отметить, что на практике часто очень трудно задать температуру на поверхности, и поэтому существующие в действительности

условия лучше всего описываются граничными условиями, рассматриваемыми в пункте Г (см. ниже).

Б. *Отсутствует тепловой поток через поверхность исследуемого тела*, т. е. во всех точках поверхности имеет место соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0,$$

где $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование вдоль внешней нормали к поверхности.

В. *Задан тепловой поток через поверхность.*

Г. *Теплопередача на поверхности линейна или происходит теплообмен «излучением» по закону Ньютона.*

Если тепловой поток через поверхность пропорционален разности температур между поверхностью и окружающей ее средой, то он равен

$$H(v - v_0), \tag{9.1}$$

где v_0 — температура среды, H — константа; тогда граничные условия записываются в виде

$$K\frac{\partial v}{\partial n} + H(v - v_0) = 0, \text{ или } \frac{\partial v}{\partial n} + h(v - v_0) = 0, \tag{9.2}$$

где

$$h = \frac{H}{K}. \tag{9.3}$$

Если $h \to 0$ *), то указанные условия обращаются в граничные условия типа Б, если же $h \to \infty$, то они обращаются в условия типа А.

Величина H была названа *внешней*, или *поверхностной*, теплопроводностью, но теперь ее обычно называют *коэффициентом поверхностной теплопередачи* или теплоотдачи **). Очень часто удобно пользоваться величиной *поверхностного термического сопротивления*, отнесенного к единице площади, т. е. величиной, обратной H, $R = \frac{1}{H}$.

Если к тому же задан тепловой поток F на поверхности, то выражение (9.2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial n} + h\left(v - v_0 - \frac{F}{H}\right) = 0. \tag{9.4}$$

Соотношение (9.4) совпадает с соотношением (9.2), в котором v_0 заменено на $v_0 + \frac{F}{H}$.

Это граничное условие называется в классических работах граничным условием при теплообмене излучением (см. соотношение (9.12)). Однако в действительности такое название приводит к некоторому заблуждению, так как, когда речь идет о передаче тепла излучением, тепловой поток пропорционален четвертой степени абсолютной температуры; все же, ради краткости, в настоящей книге мы обычно будем определять граничное условие Г как «теплообмен излучением в среду с температурой v_0» вместо громозд-

*) Всегда подразумевается, что $h > 0$; случай $h < 0$ соответствует наличию *источника* тепла, причем количество поступающего на поверхность тепла пропорционально ее температуре. Математические решения для случая $h > 0$ обычно не действительны для случая $h = 0$.

**) С нашей точки зрения, наиболее подходящим названием величины H является «коэффициент теплообмена». В дальнейшем мы всюду будем называть величину H коэффициентом теплообмена. (*Прим. перев.*)

кого, но более точного «линейная теплопередача в среду с температурой v_0». Иногда это условие называют законом Ньютона, так как закон Ньютона говорит, что при охлаждении тела обдувом (т. е. в условиях вынужденной конвекции, см. ниже) количество теряемого тепла выражается соотношением (9.1).

. Ниже будет кратко изложено несколько различных физических явлений, при которых тепловой поток через граничную поверхность выражается соотношением (9.1). В каждом случае дается несколько численных значений, что позволяет грубо оценить порядок величины H для практических задач; точные значения H можно найти в работах по теплопередаче [35, 36, 46, 47].

1. Вынужденная конвекция. Экспериментально установлено, что если жидкость (или газ) с температурой v_0 быстро движется по поверхности твердого тела, то количество тепла, теряемого с его поверхности, выражается формулой (9.1), причем коэффициент теплообмена H зависит от скорости движения и природы жидкости, а также от формы поверхности. Большинство экспериментов было проведено с жидкостью, движущейся внутри трубок с круговым сечением, и с жидкостью, обтекающей цилиндры с круговым сечением в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. На основании полученных результатов были найдены соотношения, приближенно определяемые степенными законами следующих типов:

Для случая турбулентного течения воздуха со скоростью u *см/сек* внутри трубки диаметром d *см* находим

$$H = 5{,}5 \cdot 10^{-6} u^{0{,}8} d^{-0{,}2}\ \textit{кал/см}^2 \cdot \textit{сек}\ {}^\circ\mathrm{C}; \tag{9.5}$$

для воды в аналогичном случае было получено такое же выражение, но большее в 500—1000 раз.

Для случая турбулентного течения воздуха со скоростью u, направленной перпендикулярно оси цилиндра с диаметром сечения d *см*, находим

$$H = 8 \cdot 10^{-5} \left(\frac{u}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \textit{кал/см}^2 \cdot \textit{сек}\ {}^\circ\mathrm{C}; \tag{9.6}$$

для воды эта величина оказывается примерно в 100 раз больше.

Очевидно, что во всех случаях потеря тепла с единицы поверхности в единицу времени значительно увеличивается с уменьшением диаметра цилиндра. Для плоской поверхности величина H имеет тот же порядок, что и для цилиндра очень большого диаметра.

Зависимость типа (9.1) приближенно справедлива для случая теплопередачи в результате комбинации вынужденной конвекции и испарения.

2. Случай тонкой оболочки из плохо проводящего материала. Очень часто оказывается, что на поверхности тела имеется тонкая пленка плохо проводящих материалов, например окалины (накипи), смазочных масел, окислов. Кроме того, при охлаждении тела газом или жидкостью, текущей по его поверхности, к последней обычно прилипает тонкий слой невозмущенной жидкости, а так как этот слой не движется, то отдаваемое им количество тепла относительно мало.

Если теплопроводность указанной пленки толщиной d равна K' и если в качестве первого приближения мы пренебрежем ее теплоемкостью *), то количество тепла, протекающего через эту пленку, отнесенное к единице площади в единицу времени, равно

$$\frac{K'}{d}(v - v_0), \tag{9.7}$$

где v и v_0 — температуры на внутренней и наружной стороне пленки соответственно.

Это соотношение равносильно граничному условию

$$K\frac{\partial v}{\partial n} + \frac{K'}{d}(v - v_0) = 0 \tag{9.8}$$

для среды с внутренней стороны пленки.

---

*) Это эквивалентно отбрасыванию члена $\partial v/\partial t$ в уравнении теплопроводности; тогда мы имеем случай установившегося течения, для которого справедливо выражение (2.1). Было показано [48], что во втором приближении, в котором учитывается теплоемкость пленки, мы получим граничное условие типа (9.14) (см. также § 8 гл. XII).

Ниже приводятся значения *) K'/d в единицах СГС и градусах Цельсия для слоев различных веществ разной толщины.

Вещество	Теплопроводность при разной толщине слоя, d			
	1 *см*	0,1 *см*	0,01 *см*	0,001 *см*
Воздух . . .	0,000053	0,00053	0,0053	0,053
Вазелин . . .	0,00044	0,0044	0,044	0,44
Вода	0,00144	0,0144	0,144	1,44
Ртуть [1]) . . .	0,020	0,20	2,0	20

[1]) Слой ртути или амальгаму часто используют для обеспечения хорошего теплового контакта.

Типичная толщина пленки накипи равна 0,1 *см.*

Если с внешней стороны пленки не поддерживается температура v_0 и происходит потеря тепла, величина которой равна произведению H на разность между v и температурой окружающей среды v_1, то граничное условие примет вид

$$K\frac{\partial v}{\partial n}+\frac{1}{\left(\frac{1}{H}\right)+\left(\frac{d}{K'}\right)}(v-v_1)=0. \tag{9.9}$$

Д. *Теплопередача нелинейна.* В большинстве практических задач тепловой поток с поверхности не является линейной функцией разности температур между этой поверхностью и окружающей ее средой. Однако для малых диапазонов температур он может быть аппроксимирован зависимостью типа (9.1). Ниже приведены типичные примеры.

1. Излучение черного тела. Твердое тело с абсолютной температурой T, окруженное черным телом с абсолютной температурой T_0, будет терять количество тепла, отнесенное к единице поверхности и в единицу времени, равное

$$\sigma E\left(T^4-T_0^4\right), \tag{9.10}$$

где σ — постоянная Стефана — Больцмана, а E — относительная излучательная способность поверхности (степень черноты), т. е. отношение количества тепла, излучаемого указанной поверхностью, к количеству тепла, излучаемого черным телом при той же температуре.

Для полированных металлов величина E меняется от 0,02 до 0,05; для оксидированных металлов она примерно равна 0,6—0,7, для других веществ, например для красок, стекла, бумаги, древесины, она равна 0,7 — 0,9, для копоти, ламповой сажи и т. п. она может достигать 0,98.

Подставляя численное значение величины σ в (9.10), получим

$$1{,}37\cdot 10^{-12}\,E\left(T^4-T_0^4\right)\,\textit{кал/см}^2\cdot\textit{сек}. \tag{9.11}$$

Если разность $(T-T_0)$ не очень велика, то в первом приближении находим

$$5{,}48\cdot 10^{-12}\,ET_0^3\left(T-T_0\right), \tag{9.12}$$

а если $T_0=300°$, то указанная величина становится равной $1{,}48\cdot 10^{-4}\,E\,(T-T_0)$.

Таким образом, применительно к этому случаю выражение (9.1) с константой H является весьма приближенным, а если $T-T_0$ велико, то оно может даже привести к серьезным ошибкам. Известно лишь несколько точных решений задач теплопроводности с точным граничным условием типа (9.10) **).

*) Обратная величина d/K' называется термическим сопротивлением пленки. Примеры использования этой величины см. в § 2 гл. III.

**) Егер [49] рассмотрел случай полуограниченного твердого тела с граничным условием (9.11) или (9.13). Манн и Вольф [50] проанализировали общий случай, использовав интегральные уравнения.

В обычных условиях потеря тепла твердым телом обусловлена как конвекцией, так и излучением, и поэтому в коэффициенте H в выражении (9.1) должны быть учтены оба эти фактора.

2. *Естественная конвекция.* Когда нагретое твердое тело окружено жидкостью, то более нагретые части жидкости, находящиеся поблизости от тела, стремятся подняться вверх и таким образом устанавливаются сети конвекционных токов. Такой процесс называется *естественной конвекцией.* Экспериментально установлено, что в данном случае количество тепла, теряемое твердым телом (с единицы площади в единицу времени), пропорционально разности температур $v - v_0$ между телом и окружающей жидкостью в степени, приблизительно равной $\frac{5}{4}$. Например, для поверхностей толщиной несколько сантиметров потеря тепла в воздух, отнесенная к единице площади в единицу времени, приближенно равна

$$5 \cdot 10^{-5} (v - v_0)^{5/4} \text{ кал/см}^2 \cdot \text{сек}. \tag{9.13}$$

Для очень тонких проволок, находящихся в воздухе, эта величина в 20 раз больше. В воде те же величины оказываются примерно в 100 раз больше.

Для этого случая, так же как и для случая теплопередачи излучением, нельзя, пользуясь выражением (9.13), найти точные решения, и поэтому в выражении (9.1) используется приближенная величина H. Следует отметить, что для тела, находящегося в воздухе при нормальной температуре, соотношения (9.12) и (9.13) дают величины одинакового порядка и поэтому оба они могут быть использованы в расчетах.

Е. *Контакт с хорошо перемешиваемой жидкостью или с идеальным проводником.* В калориметрии и в других методах измерения, связанных с теплопередачей, часто оказывается, что поверхность твердого тела соприкасается с жидкостью, перемешиваемой настолько хорошо, что температура жидкости всюду одинакова. Пусть твердое тело имеет теплопроводность K, площадь поверхности S и температуру поверхности v, причем v сохраняет постоянное значение на всей поверхности. Пусть, далее, хорошо перемешиваемая жидкость, соприкасающаяся с твердым телом, имеет массу M и удельную теплоемкость c', и пусть ее температура равна V. Для общности предположим, что в жидкость с массой M поступает в единицу времени от внешнего источника количество тепла Q и что потеря тепла вследствие излучения в среду с температурой v_0 (отнесенная к единице площади в единицу времени) составляет $H_1(V - v_0)$. Если δV — увеличение температуры жидкости с массой M за время δt, то мы можем написать

$$Q\delta t - H_1 (V - v_0)\, \delta t - K\delta t \iint \frac{\partial v}{\partial n}\, dS = Mc'\delta V,$$

т. е.

$$K \iint \frac{\partial v}{\partial n}\, dS + Mc' \frac{dV}{dt} + H_1 (V - v_0) - Q = 0. \tag{9.14}$$

Если предположить, что с некоторого момента времени $t > 0$, температура поверхности твердого тела равна температуре жидкости (при $t = 0$ они, разумеется, могут быть не равны), то в дополнение к соотношению (9.14) получим

$$v = V, \quad t > 0. \tag{9.15}$$

Если же вместо этого между твердым телом и жидкостью имеет место теплопередача по закону типа Г, то условие (9.15) заменяется другим, а именно

$$K \frac{\partial v}{\partial n} + H (v - V) = 0. \tag{9.16}$$

Другие физические условия приводят к граничным условиям типа (9.14); например, для случая, когда поверхность твердого тела соприкасается с хорошо перемешиваемой жидкостью массы M, из которой в единицу времени

удаляется масса m и замещается той же массой жидкости с температурой v_0, находим

$$Mc'\frac{dV}{dt}+K\int\int\frac{\partial v}{\partial n}dS+mc'(V-v_0)=0. \qquad (9.17)$$

Такие же граничные условия (9.14), (9.15) и (9.16) имеют место для идеально проводящего твердого тела с массой M. Если неметалл соприкасается с металлическим проводником со значительно большей теплопроводностью, то последний с достаточно хорошим приближением можно считать идеальным проводником. Такая задача решается значительно проще, чем задача для составной области.

Существенная разница между этими граничными условиями и условиями, определенными в пунктах А, Б, В и Г, заключается в появлении члена dV/dt, а в некоторых случаях — члена $\partial v/\partial t$. При использовании классических методов не всегда можно обойтись без их видоизменения, но преобразование Лапласа, изложенное в гл. XII, одинаково пригодно для обоих случаев. В этой главе будут приведены некоторые примеры *).

Ж. *Поверхность раздела двух сред с различными коэффициентами теплопроводности* K_1 *и* K_2. Пусть v_1 и v_2 — температуры двух сред. В § 3 данной главы было показано, что тепловой поток непрерывен на поверхности раздела двух сред, т. е. что

$$K_1\frac{\partial v_1}{\partial n}=K_2\frac{\partial v_2}{\partial n}, \qquad (9.18)$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль нормали к поверхности раздела.

Если предположить, что на поверхности раздела температуры обеих сред одинаковы, то в добавление к соотношению (9.18) имеем

$$v_1=v_2. \qquad (9.19)$$

Это предположение справедливо только для очень тесного контакта, как, например, в спаях; во всех других случаях, даже в двух оптически плоских поверхностях, слегка прижатых друг к другу **), теплопередача между двумя средами осуществляется главным образом согласно механизму, изложенному в пунктах Г(2) и Д(1), т. е. тепловой поток между этими двумя поверхностями пропорционален разности их температур и, следовательно,

$$-K_1\frac{\partial v_1}{\partial n}=H(v_1-v_2). \qquad (9.20)$$

Для этого случая граничными условиями служат соотношения (9.18) и (9.20).

З. *Контакт вещества с тонкой оболочкой из значительно лучшего проводника.* Подобная задача встречается при изучении, например, тонкого металлического листа или проволоки, соприкасающихся с относительно плохим проводником, таким, как грунт, пищевые продукты или изолирующие материалы. Этот случай рассматри-

---

*) Задачи с граничными условиями этих типов рассматривались в ряде работ [51—61].

Авторы последних четырех работ использовали преобразование Лапласа, остальные — классические методы. В работе [62] рассмотрен случай линейной зависимости количества жидкости от времени. Эти задачи имеют большое значение также и для работ, связанных с диффузией (см. § 4.35 гл. IV книги Крэнка [71] и книгу Бэррера [63]).

**) Якоб и Стар [64] измерили величину H для оптически гладких поверхностей, прижатых друг к другу в вакууме. Когда поверхности просто касаются, величина H очень мала, и теплопередача осуществляется только вследствие излучения; по мере увеличения давления, прижимающего поверхности, растет и величина H. Например, для серебряных поверхностей при давлении 2 *кГ/см²* $H=0{,}07$.

вается также в задачах о поверхностной диффузии или о диффузии по границам зерен [65, 66] *). Предполагается, что оболочка настолько тонка, что по всей ее толщине, равной d, температура в любой точке одинакова. Если V — температура в произвольной точке оболочки, а K_1 и $\varkappa_1$ — соответственно коэффициенты теплопроводности и температуропроводности вещества оболочки, то уравнение теплопроводности для оболочки, выведенное из рассмотрения баланса тепла в элементе ее площади, записывается в виде

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}-\frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{K}{dK_1}\frac{\partial v}{\partial n}=0, \tag{9.21}$$

где $\partial/\partial n$ — обозначает дифференцирование по направлению внешней нормали к твердому телу, а $\partial/\partial\xi$ и $\partial/\partial\eta$ — соответственно по двум перпендикулярным ей направлениям.

При идеальном тепловом контакте между оболочкой и твердым телом граничные условия имеют вид (9.21) и $v=V$. Если же между оболочкой и внутренней (или внешней) средой происходит теплопередача по линейному закону, эти условия несколько усложняются.

Для случая проволоки с радиусом a, расположенной вдоль оси z в твердом теле ($r>a$), соотношение (9.21) принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{2K}{aK_1}\frac{\partial v}{\partial r}=0. \tag{9.22}$$

Если оболочка настолько тонка, что ее теплоемкостью можно пренебречь, то соотношение (9.21) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}-\frac{K}{dK_1}\frac{\partial v}{\partial n}=0. \tag{9.23}$$

§ 10. Безразмерные параметры

Решение задач теплопроводности всегда можно выразить через безразмерные параметры. Например, рассмотрим уравнение, описывающее линейный тепловой поток,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0 \tag{10.1}$$

в области $-l<x<l$ с граничными условиями типа (9.2), а именно:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+hv=0, \quad x=l; \qquad \frac{\partial v}{\partial x}-hv=0, \quad x=-l. \tag{10.2}$$

Положение точки x можно определить отношением

$$\xi=\frac{x}{l}, \tag{10.3}$$

а время — величиной τ:

$$\tau=\frac{\varkappa t}{l^2}, \tag{10.4}$$

которая, как было показано в § 6 данной главы, является безразмерной величиной. Наконец, вместо h в граничном условии (10.2) тоже можно воспользоваться безразмерной величиной **)

$$L=lh. \tag{10.5}$$

Решения задач, определяемых соотношением (10.1), с граничными условиями (10.2) всегда можно выразить через три переменные ξ, τ, L вместо

*) Егер [65] рассмотрел случай хорошо проводящей проволоки, а Уипл [66] — случай плоского листа (см. также § 11 гл. XIV). В работе Уипла, кроме того, приведен вариант вывода соотношения (9.21).

**) Величину τ иногда называют модулем, или числом, Фурье, а L — числом Нуссельта. При изучении теплопередачи, обусловленной конвекцией, сталкиваются и с другими важными параметрами подобного рода.

исходных величин l, x, $\varkappa$, t, h. Подобную замену всегда желательно проделать до выполнения численных расчетов. Впоследствии мы покажем, что для очень многих случаев можно найти специальные формы решений, пригодные для малых, средних и больших величин τ.

Диапазон величин L и τ, с которым приходится встречаться на практике, огромен. При значении $\varkappa = 0{,}01$ (что соответствует плохому проводнику) для тонких листов с толщиной, не превышающей 1 *мм*, τ становится большим после 1 *мин*, тогда как для тела с размером Земли τ остается малым в течение целых геологических эпох (см. формулу (10.4). — *Прим. ред.*).

Написанное выше дифференциальное уравнение и граничные условия можно выразить через безразмерные переменные. Например, подставив соотношения (10.3), (10.4) и (10.5) в (10.1) и (10.2), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad -1 < \xi < 1, \tag{10.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + Lv = 0, \quad \text{когда } \xi = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} - Lv = 0, \quad \text{когда } \xi = -1. \tag{10.7}$$

Эта замена переменных привлекательна с чисто математической точки зрения, так как она приводит к некоторому упрощению математических выкладок. Однако в настоящей книге мы не будем ею пользоваться, ибо физический смысл формул более ясен, если они выражены через исходные физические переменные.

§ 11. Экспериментальные методы определения теплопроводности

Для измерения теплопроводности в прошлом использовалось очень много методов [67—69]. В настоящее время некоторые из них устарели, однако их теория и сейчас представляет интерес, так как они базируются на решениях уравнений теплопроводности для простых систем, которые часто встречаются в практике.

Прежде всего следует отметить, что термические свойства любого материала проявляются в разнообразных сочетаниях; однако если рассматривать их как характеристики материала, то их можно определить из различных экспериментов. Перечислим основные термические характеристики тел и эксперименты, из которых они определяются: а) коэффициент теплопроводности K, измеряемый при стационарном режиме эксперимента; б) теплоемкость, отнесенная к единице объема, ρc, которую измеряют калориметрическими методами; в) величина $(K\rho c)^{1/2}$, измеряемая при периодическом стационарном режиме экспериментов; г) температуропроводность $\varkappa$, измеряемая при нестационарном режиме экспериментов. В действительности большинство экспериментов, проводящихся в нестационарном режиме, в принципе, допускает как определение K, так и определение $\varkappa$.

Мы кратко опишем здесь наиболее распространенные методы и укажем разделы, в которых они рассматриваются. По существу эти методы делятся на те, в которых измерения ведутся в стационарном режиме (методы стационарного режима), при периодическом нагреве и в нестационарном режиме (методы нестационарного режима); далее они подразделяются на методы, применяемые при исследовании плохих проводников и при исследовании металлов.

1. Методы стационарного режима; плохие проводники. В данном методе следует точно выполнять условия основного эксперимента, изложенного в § 1 настоящей главы, причем исследуемый материал должен иметь форму пластинки [70]. В других вариантах метода можно исследовать материал в виде полого цилиндра (см. § 2 гл. VII) или полой сферы (см. § 2 гл. IX). Иногда исследуемый материал, по которому проходит тепло, имеет форму толстого стержня, однако в данном случае теория оказывается более сложной (см. §§ 1, 2 гл. VI и § 3 гл. VIII).

2. Термические методы стационарного режима; металлы. В этом случае обычно используется металлический образец в форме стержня, концы которого поддерживают при различных температурах. Полуограниченный стержень рассматривается в § 3 гл. IV, а стержень конечной длины — в § 5 гл. IV.

3. Электрические методы стационарного режима; металлы. В этом случае металлический образец в виде проволоки нагревают, пропуская через него электрический ток, а его концы поддерживают при заданных температурах (см. § 11 гл. IV и пример IX § 3 гл. VIII). Можно использовать также случай радиального потока тепла в проволоке, нагреваемой электрическим током (см. пример V § 2 гл. VII).

4. Методы стационарного режима; движущиеся жидкости. В этом случае измеряется температура жидкости, движущейся между двумя резервуарами, в которых поддерживается различная температура (см. § 9, гл. IV).

5. Методы периодического нагрева. В этих случаях условия на концах стержня или пластинки изменяются с периодом T; по достижении установившегося состояния измеряют температуры в определенных точках образца. Случай полуограниченного стержня рассматривается в § 4 гл. IV, а стержня конечной длины — в § 8 той же главы. Подобный метод используется для определения температуропроводности грунта при температурных колебаниях, вызываемых солнечным нагревом (см. § 12 гл. II).

В последнее время эти методы стали играть важную роль в измерениях низких температур; они обладают также тем преимуществом, что в теории относительно сложных систем можно пользоваться методами, разработанными для исследования электрических волноводов (см. § 6 гл. II).

6. Методы нестационарного режима. В прошлом методы нестационарного режима использовались несколько меньше, чем методы стационарного режима. Их недостаток заключается в трудности установления того, насколько действительные граничные условия в эксперименте согласуются с условиями, постулируемыми теорией. Учесть подобное расхождение (например, когда речь идет о контактном сопротивлении на границе) очень трудно, а это более важно для указанных методов, чем для методов стационарного режима (см. § 10 гл. II). Вместе с тем методы нестационарного режима сами по себе обладают известными преимуществами. Так, некоторые из этих методов пригодны для проведения очень быстрых измерений и для учета малых изменений температуры; кроме того, ряд методов можно использовать «на месте», без доставки образца в лабораторию, что весьма желательно, особенно при исследовании таких материалов, как грунты и горные породы. В большинстве старых методов используется лишь последний участок графика зависимость температуры от времени; при этом решение соответствующего уравнения выражается одним экспоненциальным членом. В § 7 гл. IV, § 5 гл. VI, § 5 гл. VIII и § 5 гл. IX рассматривается случай охлаждения тела простой геометрической формы при линейной теплопередаче с его поверхности. В § 14 гл. IV рассматривается случай нестационарной температуры в проволоке, нагреваемой электрическим током. В некоторых случаях используется весь график изменения температуры в точке (см. § 10 гл. II и § 3 гл. III).

В последние годы все большее внимание уделяют возможности одновременного определения K и $\varkappa$ из одного эксперимента. В одном из таких методов измерялась некоторая величина, которая в конце концов начинала линейно увеличиваться со временем (например, количество тепла, проходящее за время t через пластину, поверхность которой имеет постоянную температуру) и из параметров этой линейной асимптоты определялись K и $\varkappa$ (см. пример II § 6 гл. XII и § 6 гл. XV). В другом методе использовался нагревающийся зонд, температура которого в конце концов изменялась линейно относительно $\ln t$ (см. § 7 гл. XIII).

§ 12. Математическая интерпретация начальных и граничных условий

При математическом рассмотрении граничные и начальные условия не следует рассматривать как условия, которым температура v обязана удовлетворять на самой поверхности или в момент времени $t=0$. Их следует считать предельными условиями. Граничные условия нужно понимать в том смысле, что для фиксированного $t>0$ данная комбинация температуры и ее производных стремится к заданной величине при приближении точки к поверхности. Начальные условия следует понимать в том смысле, что для фиксированной точки внутри определенной области температура должна стремиться к заданной величине по мере того, как t стремится к нулю.

Для примера рассмотрим задачу, которую можно кратко сформулировать следующим образом. *Пусть теплообмен происходит в области $0<x<l$. Температура в точке $x=0$ поддерживается на нуле для $t>0$, а при $x=l$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры. Начальная температура твердого тела равна единице.* При этом уравнения, которые должны удовлетворяться,

записываются в виде

$$\varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$v \to 0$ при $x \to 0$ для фиксированного $t > 0$;

$\frac{\partial v}{\partial x} + hv \to 0$ при $x \to l - 0$ для фиксированного $t > 0$;

$v \to 1$ при $t \to 0$ для фиксированного x в области $0 < x < l$.

§ 13. Родственные дифференциальные уравнения

В сущности вся эта книга посвящена решению уравнений

$$\operatorname{div} f + \rho c \frac{\partial v}{\partial t} = A, \tag{13.1}$$

$$f = -K \operatorname{grad} v, \tag{13.2}$$

или

$$\nabla^2 v - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{A}{K} \tag{13.3}$$

для областей различных форм с граничными условиями, обычно выраженными через v и f. Величины K, ρ и c обычно являются константами, а A может зависеть от положения или от времени.

Запишем несколько обобщений выражения (13.3), а именно:

$$\nabla^2 v - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial v}{\partial t} = Av + B \tag{13.4}$$

и

$$\nabla^2 v - \frac{U}{\varkappa} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial v}{\partial t} = Av + B, \tag{13.5}$$

где U, A и B — константы. Эти выражения уже встречались в §§ 6 и 7 данной главы. Как отмечалось ранее, случаи зависимости термических параметров K, c и т. п. от v приобретают все большее значение, хотя эти функции все еще плохо изучены для достаточно большого диапазона изменения v.

Те же уравнения и те же граничные условия встречаются в целом ряде других разделов физики, и поэтому в них часто удается использовать многие из приведенных здесь решений (с изменением обозначений). Вместе с тем имеется много задач, имеющих практическое значение, которые мало отличаются от типовых. Некоторые основные приложения приведенных соотношений будут кратко изложены ниже.

I. *Диффузия.*

Это явление подробно рассмотрено в работах Крэнка [71], Бэррера [63] и Джоста [72] *). Если C — концентрация диффундирующего вещества, а F — скорость его передачи, то соотношения (13.1) и (13.2) принимают вид

$$\operatorname{div} F = -\frac{\partial C}{\partial t} \quad \text{и} \quad F = -D \operatorname{grad} C. \tag{13.6}$$

Если D — константа, то уравнения диффузии совпадают с уравнениями теплопроводности при $K = \varkappa = D$ и, следовательно, задача упрощается. На поверхности раздела двух сред соотношения (9.18) и (9.19) принимают вид

$$D_1 \frac{\partial C_1}{\partial n} = D_2 \frac{\partial C_2}{\partial n} \quad \text{и} \quad C_1 = kC_2, \tag{13.7}$$

где k — константа. Итак, результаты, полученные ниже для составной среды, также можно отнести к этому случаю, соответствующим образом изменив обозначения.

Уравнения типов (13.4) и (13.5) используются значительно чаще. Например, они встречаются в задачах диффузии, происходящей одновременно с химической реакцией (см. [71] гл. VIII, [76]), в исследованиях, связанных с диффузией в биологических тканях [77], в теории консолидации почв [78] и в генетике. Задачи одновременной диффузии тепла и водяного пара приводят к системе двух дифференциальных уравнений (см. [71], гл. XIII, [79]).

*) Много задач, приводящих к уравнению диффузии, рассмотрено в работе Бэббита [73]. Целый ряд приложений этого уравнения к физиологии описан в [74, 75].

II. *Диффузия в силовом поле; седиментация.*

В этих задачах мы получаем уравнение типа *)

$$\nabla^2 C = \frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t} + A \operatorname{div}(UC),$$

где U — постоянный вектор. Указанное уравнение по существу представляет собой уравнение теплопроводности (13.5) для движущейся среды.

III. *Замедление нейтронов.*

При некоторых предположениях указанная задача сводится к задаче теплопроводности [84, 85]; при ее решении обычно пользуются функцией Грина.

IV. *Вязкое движение.*

Уравнение теплопроводности встречается в двух родственных, но несколько отличающихся друг от друга задачах. Во-первых, многие задачи одномерного ламинарного течения приводят непосредственно к уравнению (13.3) с одной переменной [37]. Во вторых, дифференциальные уравнения, описывающие вихревые движения, являются уравнениями типа уравнения диффузии [37, 86, 87].

V. *Задачи, рассматриваемые в теории электричества.*

Дифференциальное уравнение для потенциала в безындуктивной линии передачи [88] имеет форму (13.4) с одной пространственной переменной при наличии утечки или форму (13.3) при отсутствии утечки (см. также § 6 гл. II).

VI. *Течение жидкостей через пористую среду.*

Дифференциальное уравнение, характеризующее течение сжимаемой жидкости через пористую среду [89] **), полностью соответствует уравнению (13.3). Это уравнение и уравнения (13.4) и (13.5) встречаются во многих других задачах этого типа [90, 91].

§ 14. Упрощение общей задачи теплопроводности

В данном параграфе будет изложено несколько классических методов, которые приводят общие задачи теплопроводности к более простым. Следует отметить, что при использовании преобразования Лапласа (см. гл. XII—XV) применять их не нужно, так как все задачи решаются одним и тем же способом.

I. *Условия на поверхности, не зависящие от времени.*

Предположим, что требуется удовлетворить уравнению

$$\nabla^2 v - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, y, z) \tag{14.1}$$

внутри твердого тела при $v = f(x, \quad z)$ в начальный момент и $v = \varphi(x, y, z)$ на поверхности. Пусть

$$v = u + w, \tag{14.2}$$

где u является функцией только x, y, z и удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 u = A(x, y, z) \quad \text{внутри твердого тела} \tag{14.3}$$

и

$$u = \varphi(x, y, z) \quad \text{на его поверхности,} \tag{14.4}$$

а w есть некоторая функция x, y, z, t, которая удовлетворяет уравнениям

$$\nabla^2 w - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{внутри твердого тела,} \tag{14.5}$$

$$w = f(x, y, z) - u \quad \text{в начальный момент} \tag{14.6}$$

и

$$w = 0 \quad \text{на поверхности.} \tag{14.7}$$

---

*) В работах [80] — [83] приведено уравнение диффузии ионов в ионосфере.

**) В гл. X цитируемой книги [89] приведено множество решений задач такого типа, в том числе задач для линейного источника и цилиндрических поверхностей раздела.

Ясно, что v, заданная выражением (14.2), удовлетворяет всем условиям задачи и, таким образом, решение последней сводится к решению двух задач. Одна соответствует случаю установившейся температуры, а другая — случаю неустановившейся температуры при заданной начальной температуре и нулевой температуре на поверхности. Случай линейной теплопередачи с поверхности в среду при постоянной температуре можно упростить подобным же образом.

II. *Условия на поверхности являются заданными функциями времени. Источники тепла отсутствуют.*

В данном случае решение можно вывести из решения задачи для постоянных условий на поверхности, используя для этой цели *теорему Дюамеля* [92], которая формулируется следующим образом.

Если $v = F(x, y, z, \lambda, t)$ соответствует температуре в момент времени t в точке (x, y, z) твердого тела, начальная температура которого равна нулю, а температура на поверхности равна $\varphi(x, y, z, \lambda)$, то решение задачи в случае начальной температуры, равной нулю, и температуры на поверхности, равной $\varphi(x, y, z, t)$, записывается в виде

$$v = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, \lambda, t-\lambda)\, d\lambda.$$

Приведем доказательство этой теоремы.

Если температура на поверхности равна нулю в промежуток времени от $t = -\infty$ до $t = 0$ и равна $\varphi(x, y, z, \lambda)$ в промежуток от $t = 0$ до $t = t$, то можно сказать, что начальная температура равна нулю, а температура на поверхности равна $\varphi(x, y, z, \lambda)$ и, следовательно, в момент времени t температура тела v равна следующей величине:

$$v = F(x, y, z, \lambda, t) \quad \text{для} \quad t > 0.$$

Таким образом, если температура на поверхности равна нулю в промежуток времени от $t = -\infty$ до $t = \lambda$ и равна $\varphi(x, y, z, \lambda)$ в промежуток от $t = \lambda$ до $t = t$, то для $t > \lambda$ можем написать

$$v = F(x, y, z, \lambda, t-\lambda).$$

Кроме того, если температура на поверхности равна нулю в промежуток времени от $t = -\infty$ до $t = \lambda + d\lambda$ и равна $\varphi(x, y, z, \lambda)$ в промежуток от $t = \lambda + d\lambda$ до $t = t$, то для $t > \lambda + d\lambda$ получим

$$v = F(x, y, z, \lambda, t-\lambda-d\lambda).$$

Отсюда следует, что если температура на поверхности равна нулю в промежуток времени от $t = -\infty$ до $t = \lambda$, равна $\varphi(x, y, z, \lambda)$ в промежуток от $t = \lambda$ до $t = \lambda + d\lambda$ и равна нулю в промежуток от $t = \lambda + d\lambda$ до $t = t$, то мы получим

$$v = F(x, y, z, \lambda, t-\lambda) - F(x, y, z, \lambda, t-\lambda-d\lambda),$$

или окончательно

$$v = \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, \lambda, t-\lambda)\, d\lambda \qquad (t > \lambda).$$

Таким путем, разбивая интервал от $t = 0$ до $t = t$ на малые интервалы и затем суммируя полученные результаты, мы находим решение задачи для случая температуры на поверхности, равной $\varphi(x, y, z, t)$, в виде

$$v = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, \lambda, t-\lambda)\, d\lambda. \tag{14.8}$$

Соответствующая теорема для случая теплообмена с поверхности по линейному закону формулируется следующим образом.

Если $v = F(x, y, z, \lambda, t)$ соответствует температуре в момент времени t в точке (x, y, z) твердого тела, начальная температура которого равна нулю, а на поверхности происходит теплообмен со средой, имеющей температуру $\varphi(x, y, z, \lambda)$, то решение задачи в случае начальной температуры, равной нулю, и температуре среды, равной $\varphi(x, y, z, t)$, записывается в виде

$$v = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, \lambda, t - \lambda)\, d\lambda. \tag{14.9}$$

Если температура на поверхности или температура среды, с которой происходит теплообмен, не изменяется от точки к точке, а зависит только от времени, то получаемые результаты можно сформулировать в следующей несколько более простой форме.

Если $v = F(x, y, z, t)$ соответствует температуре в момент времени t в точке (x, y, z) твердого тела, начальная температура которого равна нулю, а поверхность поддерживается при температуре, равной единице (или в случае теплообмена поверхности с окружающей средой последняя имеет температуру, равную единице), то решение задачи при условии, что поверхность поддерживается при температуре $\varphi(t)$ (или что происходит теплообмен со средой, имеющей температуру $\varphi(t)$), записывается в виде

$$v = \int_0^t \varphi(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, t - \lambda)\, d\lambda. \tag{14.10}$$

Это соотношение сразу же получается из приведенного выше, так как $F(x, y, z, \lambda, t)$ принимает более простую форму

$$F(x, y, z, t)\varphi(\lambda).$$

Возвращаясь снова к общей задаче с переменной температурой на поверхности, попытаемся решить уравнение (14.1) при $v = f(x, y, z)$ в начальный момент и $v = \varphi(x, y, z, t)$ на поверхности. Ему удовлетворяет функция $v = u + w$, где

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, y, z), \tag{14.11}$$

$$u = f(x, y, z) \quad \text{в начальный момент,} \tag{14.12}$$

$$u = 0 \quad \text{на поверхности} \tag{14.13}$$

и

$$\nabla^2 w - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \tag{14.14}$$

$$w = 0 \quad \text{в начальный момент,} \tag{14.15}$$

$$w = \varphi(x, y, z, t) \quad \text{на поверхности.} \tag{14.16}$$

Уравнения для w мы только что разобрали, а уравнение для u мы рассмотрели в примере I. Задачи с другими граничными условиями можно разобрать аналогичным способом.

В самом деле, уравнение (14.8) справедливо и в более общих случаях, чем указано выше. Например, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_1 \frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_2 \frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_3 \frac{\partial v}{\partial z}\right)+K_4 v+A(x, y, z, t)=\rho c \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (14.17)$$

причем K_1, K_2, K_3, K_4 и ρc могут быть функциями x, y, z. Согласно §§ 6 и 17 данной главы это уравнение является уравнением теплопроводности *) для неоднородного анизотропного твердого тела, в котором в единице объема в единицу времени выделяется количество тепла, равное $A(x, y, z, t)$. Предположим, что граничные условия записываются в виде

$$k_1 \frac{\partial v}{\partial x}+k_2 \frac{\partial v}{\partial y}+k_3 \frac{\partial v}{\partial z}+k_4 v=g(x, y, z, t), \quad (14.18)$$

где $k_1, \ldots, k_4$ — функции только x, y и z. Предположим также, что начальное условие имеет вид

$$v \to \varphi(x, y, z) \quad \text{при} \quad t \to 0. \quad (14.19)$$

Теперь пусть $F(x, y, z, \lambda, t)$ служит решением той же задачи, но при условии, что $A(x, y, z, t)$ и $g(x, y, z, t)$ заменены $A(x, y, z, \lambda)$ и $g(x, y, z, \lambda)$, т. е. значениями этих функций при $t=\lambda$. Тогда решение **) уравнений (14.17), (14.18) и (14.19) записывается в виде

$$v(x, y, z, t)=\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t F(x, y, z, \lambda, t-\lambda)\, d\lambda=$$
$$=\varphi(x, y, z)+\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, \lambda, t-\lambda)\, d\lambda, \quad (14.20)$$

т. е. в такой же форме, как и уравнение (14.8) при $\varphi(x, y, z)=0$. Следует добавить, что полученный результат справедлив и в тех случаях, когда термические характеристики среды имеют разрывы.

III. *Случай, когда справедливо уравнение*

$$\nabla^2 v-b v-\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial v}{\partial t}=A(x, y, z), \quad (14.21)$$

где b — постоянная, которая может иметь любой знак. При подстановке выражения

$$v=u e^{-\varkappa b t} \quad (14.22)$$

уравнение (14.21) принимает вид

$$\nabla^2 u-\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial u}{\partial t}=e^{\varkappa b t} A(x, y, z), \quad (14.23)$$

и его можно рассматривать описанными выше методами.

Другим важным случаем, который можно проанализировать даже более простым способом ***), является случай, описываемый уравнением

$$\nabla^2 v-b v-\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial v}{\partial t}=0, \quad (14.24)$$

где b — постоянная (которая может иметь любой знак), начальная температура равна нулю, а граничные условия соответствуют либо постоянной температуре, либо тепло-

---

*) Член K_4 добавлен для большей общности. Он появляется в тех случаях, когда каждый элемент объема твердого тела теряет в единицу времени количество тепла, пропорциональное его температуре, как, например, в задачах, разобранных в гл. IV, а также в других физических задачах.

**) Доказательство, использующее преобразование Лапласа, приведено в [93]. Его можно распространить на более общие граничные условия (см., например, пункт Д § 9 данной главы).

***) В работе [94] приведены подробные формулы для плиты, сферы, цилиндра и полуограниченного твердого тела.

обмену на поверхности. Тогда, если u является решением для случая $b=0$ при тех же граничных условиях, то дифференцированием можно проверить, что

$$v = \varkappa b \int_0^t e^{-\varkappa b t'} u(t')\, dt' + u e^{-\varkappa b t} \tag{14.25}$$

удовлетворяет уравнению (14.24) и принятым в данной задаче граничным условиям. Таким образом, решения для этого случая можно получить простым интегрированием полученных выше решений.

§ 15. Задачи, решения которых можно выразить в виде произведения решений более простых задач

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad t > 0, \tag{15.1}$$

для прямоугольного параллелепипеда

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad a_3 < x_3 < b_3. \tag{15.2}$$

Для некоторых важных типов начальных и граничных условий его решением является произведение решений трех задач с одной переменной; таким образом, если последние известны, то можно сразу же написать и решение нашей задачи.

Предположим, что $v_r(x_r, t)$, $r = 1, 2, 3$, служит решением уравнения

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_r^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad a_r < x_r < b_r, \quad t > 0, \tag{15.3}$$

с граничными условиями

$$\alpha_r \frac{\partial v_r}{\partial x_r} - \beta_r v_r = 0, \qquad x_r = a_r, \quad t > 0, \tag{15.4}$$

$$\alpha_r' \frac{\partial v_r}{\partial x_r} + \beta_r' v_r = 0, \qquad x_r = b_r, \quad t > 0, \tag{15.5}$$

где α_r и β_r и т. п. — постоянные, каждая из которых может быть равна нулю (таким образом, включены случаи нулевой начальной температуры и отсутствия теплового потока на поверхности); пусть начальные условия имеют вид

$$v_r(x_r, t) = V_r(x_r), \qquad t = 0, \qquad a_r < x_r < b_r. \tag{15.6}$$

Тогда решением уравнения (15.1) в области (15.2) при

$$v = V_1(x_1) V_2(x_2) V_3(x_3), \qquad \text{когда} \quad t = 0, \tag{15.7}$$

и при граничных условиях

$$\alpha_r \frac{\partial v}{\partial x_r} - \beta_r v = 0, \qquad x_r = a_r, \qquad t > 0, \qquad r = 1, 2, 3, \tag{15.8}$$

$$\alpha_r' \frac{\partial v}{\partial x_r} + \beta_r' v = 0, \qquad x_r = b_r, \qquad t > 0, \qquad r = 1, 2, 3, \tag{15.9}$$

служит

$$v = v_1(x_1, t)\, v_2(x_2, t)\, v_3(x_3, t). \tag{15.10}$$

При подстановке выражения (15.10) в уравнение (15.1) и при использовании (15.3) получим

$$v_2 v_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + v_3 v_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + v_1 v_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} - \frac{1}{\varkappa}\left(v_2 v_3 \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_3 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 v_2 \frac{\partial v_3}{\partial t}\right) = 0.$$

При этом очевидно, что удовлетворяются начальные и граничные условия (15.7), (15.8) и (15.9).

Аналогичный результат остается справедливым и для случая комбинированного радиального и осевого потока тепла в сплошном или полом цилиндре. Дифференциальное уравнение (8.5) настоящей главы принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{15.11}$$

поскольку мы полагаем, что все величины не зависят от θ.

Предположим, что его нужно решить в области

$$a < r < b, \qquad z_1 < z < z_2. \tag{15.12}$$

Пусть $v_1(r, t)$ служит решением уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v_1}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad a < r < b,$$

при граничных условиях

$$\alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} - \beta_1 v_1 = 0, \qquad r = a, \qquad t > 0,$$

$$\alpha_1' \frac{\partial v_1}{\partial r} + \beta_1' v_1 = 0, \qquad r = b, \qquad t > 0,$$

и

$$v_1 = V_1(r) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Пусть также $v_2(z, t)$ служит решением уравнения

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v_2}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad z_1 < z < z_2,$$

при граничных условиях

$$\alpha_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} - \beta_2 v_2 = 0, \qquad z = z_1, \qquad t > 0,$$

$$\alpha_2' \frac{\partial v_2}{\partial z} + \beta_2' v_2 = 0, \qquad z = z_2, \qquad t > 0,$$

и

$$v = V_2(z) \qquad \text{при} \qquad t = 0.$$

Тогда $v = v_1(r, t)\, v_2(z, t)$ является решением уравнения (15.11) в области (15.12) при граничных условиях

$$\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial r} - \beta_1 v = 0, \qquad r = a, \qquad z_1 < z < z_2, \qquad t > 0,$$

$$\alpha_1' \frac{\partial v}{\partial r} + \beta_1' v = 0, \qquad r = b, \qquad z_1 < z < z_2, \qquad t > 0,$$

$$\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial z} - \beta_2 v = 0, \qquad z = z_1, \qquad a < r < b, \qquad t > 0,$$

$$\alpha_2' \frac{\partial v}{\partial z} + \beta_2' v = 0, \qquad z = z_2, \qquad a < r < b, \qquad t > 0$$

и при начальном условии

$$v = V_1(r)\,V_2(z) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Такой же прием может быть использован и для других областей, например в случае неограниченного прямого двугранного угла $x > 0$, $y > 0$, полуограниченного цилиндра и т. п. Соответствующие примеры будут приведены в § 6 гл. V, § 4 гл. VI и в § 4 гл. VIII. В случае анизотропного твердого тела с осями, выбранными таким образом, что дифференциальное уравнение имеет форму (18.4) (см. стр. 46), указанный метод остается применимым, если ограничивающие поверхности перпендикулярны осям.

Эти результаты имеют практическое значение, так как они позволяют очень легко получать численные значения температур в упомянутых выше твердых телах, если их начальная температура постоянна, а с поверхности происходит теплообмен в среду с постоянной температурой [95, 96].

§ 16. Единственность решения задачи теплопроводности

Рассмотрим задачу теплопроводности в конечной замкнутой области при заданных начальной температуре и температуре на поверхности.

Допустим, что имеется два независимых решения v_1 и v_2 уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \nabla^2 v && \text{внутри твердого тела,} \\ &v = f(x, y, z) && \text{внутри твердого тела при } t = 0, \\ &v = \varphi(x, y, z, t) && \text{на поверхности.} \end{aligned}\right\} \tag{16.1}$$

Пусть $V = v_1 - v_2$. Тогда V удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} = \varkappa \nabla^2 V && \text{внутри твердого тела,} \\ &V = 0 && \text{внутри твердого тела при } t = 0, \\ &V = 0 && \text{на поверхности.} \end{aligned}\right\} \tag{16.2}$$

Если уравнения (16.1) имеют единственное решение, то $v_1 \equiv v_2$, т. е. $V \equiv 0$.

Рассмотрим объемный интеграл

$$J = \frac{1}{2} \int\int\int V^2\, dx\, dy\, dz \geqslant 0, \tag{16.3}$$

где интегрирование производится по всему объему твердого тела.

Тогда

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \int\int\int V \frac{\partial V}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = \varkappa \int\int\int V \nabla^2 V\, dx\, dy\, dz. \tag{16.4}$$

Приняв в формуле Грина (см. соотношение (7.4))

$$\xi = V \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \eta = V \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \zeta = V \frac{\partial V}{\partial z}$$

и полагая, что V удовлетворяет условиям, достаточным для того, чтобы теорема Грина была справедлива (например, непрерывность V и ее первой и второй производных), получим

$$\int\int V \frac{\partial v}{\partial n}\, dS =$$
$$= \int\int\int V \nabla^2 V\, dx\, dy\, dz + \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz,$$

где интегрирование производится по всей поверхности и по всему объему твердого тела. Тогда

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \varkappa \int\int V \frac{\partial V}{\partial n} dS - \varkappa \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\,dy\,dz. \quad (16.5)$$

Поскольку на поверхности V равно нулю, первый интеграл обращается в нуль при условии, что $\partial V/\partial n$ ограничена на поверхности, и мы получаем

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\varkappa \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\,dy\,dz.$$

Поэтому

$$\frac{\partial J}{\partial t} \leqslant 0. \quad (16.6)$$

Если мы можем утверждать, что

$$J = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (16.7)$$

то из соотношения (16.6) следует, что $J \leqslant 0$ при $t > 0$. При этом, согласно (16.3), мы имеем $J = 0$, и поскольку V непрерывно, то, следовательно, $V = 0$. Это классическое доказательство единственности решения приводится во многих работах.

Было отмечено [97—99], что для выполнения соотношения (16.7) необходимы дальнейшие допущения, касающиеся V. В самом деле, из условия $V(x, y, z, t) \to 0$ при $t \to 0$ для любых фиксированных x, y, z в исследуемом объеме не вытекает, что $J \to 0$ при $t \to 0$. В качестве простейшей иллюстрации этого положения рассмотрим случай одномерной полуограниченной области $x > 0$.

Рассмотрим функцию

$$V(x, t) = x t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}. \quad (16.8)$$

Она удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности

$$\varkappa \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Кроме того,

$$V(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad t > 0$$

и

$$V(x, t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad \text{для любого фиксированного} \quad x > 0.$$

Таким образом, функция (16.8) удовлетворяет уравнению теплопроводности и обращается в нуль при $t = 0$ и на границе области, однако она не обращается в нуль тождественно. Физически эту функцию можно представить себе как температуру, обусловленную дублетным источником тепла (см. ниже § 8 гл. X). Она не стремится к нулю равномерно по x при $t \to 0$ и не ограничена в окрестности $x = 0$, $t = 0$, например при $x = t^{1/2}$.

Интеграл, соответствующий (16.3), записывается в виде

$$J = \frac{1}{2t^3} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2\varkappa t}} dx = \left(\frac{\pi \varkappa^3}{8t^3}\right)^{1/2}$$

и, следовательно, $J \to \infty$, если $t \to 0$. Таким образом, условие (16.7) не выполняется, и в этом случае приведенное выше доказательство единственности решения теряет силу.

Для выполнения условия (16.7) должны быть сделаны дополнительные предположения относительно функции V, исключающие функции, подобные приведенной выше. Очевидно, что условие (16.7) оказывается справедливым, если мы примем, что V равномерно стремится к нулю при $t \to 0$ для x, y, z по всему объему или что каждая из производных $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ меньше постоянной M, которая не зависит от x, y, z по всему объему и от t в интервале $0 < t \leqslant t_0$.

Следует отметить, что было все же сделано несколько попыток установления более общих условий, при которых решение единственно; кроме того, доказывалась единственность полученного решения в каждой специальной задаче. Аналогичное рассуждение*) можно применить и к иным граничным условиям, к анизотропной среде**) и к случаю установившейся температуры.

Доказать существование решения приведенных выше уравнений еще труднее, чем доказать единственность решения. Физическая интерпретация этих уравнений требует, чтобы решение существовало. Вопросы математического доказательства таких теорем существования относятся к области чистого анализа.

§ 17. Теплопроводность анизотропных твердых тел

Анизотропные среды***) представляют значительный интерес для практики. Типичными примерами анизотропного вещества служат кристаллы, встречающиеся в природе некристаллические вещества (например, осадочные горные породы или древесина), а также слоистые материалы (например, используемые в технике трансформаторные сердечники).

Для указанных веществ результаты, приведенные в §§ 3 и 4 данной главы, не изменяются, но оказывается недействительным общепринятое положение о том, что направление вектора теплового потока в какой-либо точке нормально к изотерме, проходящей через эту точку. Простейшее основное предположение, обобщающее допущение (5.3) для изотропного тела, заключается в том, что каждая компонента вектора теплового потока в точке является линейной функцией компонент температурного градиента в этой точке, т. е. что

$$\left.\begin{aligned} -f_x &= K_{11}\frac{\partial v}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + K_{13}\frac{\partial v}{\partial z}, \\ -f_y &= K_{21}\frac{\partial v}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + K_{23}\frac{\partial v}{\partial z}, \\ -f_z &= K_{31}\frac{\partial v}{\partial x} + K_{32}\frac{\partial v}{\partial y} + K_{33}\frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (17.1)$$

Величины K_{rs} называют *коэффициентами теплопроводности*; они являются компонентами тензора второго ранга. Уравнения (17.1) можно решить относительно

*) Более подробно этот вопрос обсуждается в ряде книг и статей [40, 100—112].

**) При этом использовались формула Грина (7.4) данной главы для $\xi = Vf_x$ и т. п., и соотношения (6.3) и (17.1) той же главы. Кроме того, мы пользовались тем, что 2Φ, определенное выражением (20.3), всегда положительно.

***) Математическая теория теплопроводности кристаллов была впервые разработана Дюамелем [113, 114] и Ламе [115] на основе гипотезы о механизме молекулярного излучения. Современной разработкой теории в форме, излагаемой в настоящей книге, мы, по существу, обязаны Стоксу [116]. Более полная аналитическая трактовка теории дана Буссинеском [117]. Вопросы, связанные с физикой кристаллов, подробно излагаются в работе [118]; более краткое, но зато и более современное их рассмотрение можно найти в книге Вустера [119]. Вследствие трудности точного измерения теплопроводности (в частности, теплопроводности кристаллов) даже в настоящее время мы располагаем лишь очень малым количеством достаточно надежных экспериментальных данных, и поэтому до сих пор решено лишь весьма ограниченное число специальных задач.

$\frac{\partial v}{\partial x}$ и т. п. В этом случае мы получим

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= R_{11}f_x + R_{12}f_y + R_{13}f_z, \\ -\frac{\partial v}{\partial y} &= R_{21}f_x + R_{22}f_y + R_{23}f_z, \\ -\frac{\partial v}{\partial z} &= R_{31}f_x + R_{32}f_y + R_{33}f_z, \end{aligned}\right\} \tag{17.2}$$

где R_{rs} — коэффициенты сопротивления. Они могут быть записаны в виде определителей, элементами которых служат величины K_{rs}. Например,

$$R_{11} = \frac{K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32}}{\Delta}, \quad R_{12} = \frac{K_{13}K_{32} - K_{12}K_{33}}{\Delta}, \tag{17.3}$$

$$R_{21} = \frac{K_{31}K_{23} - K_{21}K_{33}}{\Delta}, \quad R_{22} = \frac{K_{11}K_{33} - K_{31}K_{13}}{\Delta}, \tag{17.4}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}. \tag{17.5}$$

Аналогичным образом величины K_{rs} можно выразить через R_{rs}. Следует отметить, что для некоторых задач наиболее употребительна запись через K_{rs}, а для других — через R_{rs}. Если уравнения (17.2) считать основными, то их можно решить относительно f_x, f_y, f_z, выразив последние через $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$; получающийся определитель

$$\Delta' = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \tag{17.6}$$

равен произведению $(1/\Delta^3)$ на присоединенный для Δ (или взаимный) определитель. Согласно общей теореме [120]

$$\Delta' = \frac{1}{\Delta} \tag{17.7}$$

и миноры Δ' равны произведению $1/\Delta$ на алгебраические дополнения соответствующих миноров Δ, например

$$R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} = \frac{K_{33}}{\Delta}. \tag{17.8}$$

В первую очередь следует отметить, что в выражениях (17.1) знаки f_x, f_y и f_z изменяются, если все компоненты температурного градиента изменяют свои знаки. Иными словами, теплопроводность вещества во взаимно противоположных направлениях одинакова. Для кристаллов с центральной симметрией последнее положение вытекает из соображений симметрии. К этому классу относятся 21 из 32 классов кристаллов. Кристаллы остальных 11 классов не имеют центра симметрии, и следует считать, что для них уравнение в форме (17.1) подтверждается экспериментами *), которые показали примерное равенство теплопроводности во взаимно противоположных направлениях.

Соотношение в форме (17.1) часто применяют для описания связи между двумя векторами в анизотропной среде. Вследствие симметрии кристаллов его легко упростить, выбрав оси в соответствующих кристаллографических направлениях. Результаты, полученные для различных кристаллических систем, приведены ниже; подробное изложение этих вопросов можно найти в § 4 гл. I книги Вустера [119].

---

*) Эксперименты проводились с двоякопреломляющими кристаллами, например с турмалином. Сначала предполагалось, что результаты экспериментов указывают на существенную разницу в теплопроводности, но впоследствии было установлено, что эта разница очень невелика или вообще отсутствует [121, 122].

Триклинная система кристаллов. Упрощение невозможно.

Моноклинная система кристаллов. Все классы этой системы имеют либо ось симметрии (такую, что при повороте вокруг нее на 180° кристалл принимает положение, конгруэнтное первоначальному), либо плоскость зеркальной симметрии. Если ось z является осью симметрии или нормальна плоскости зеркальной симметрии, то коэффициенты теплопроводности образуют следующую схему:

$$\begin{matrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{matrix} \qquad (17.9)$$

Ниже будет показано, что, по-видимому, справедливо также равенство $K_{21} = K_{12}$, но это не вытекает из соображений симметрии.

Ромбическая система. Кристаллы всех классов этой системы имеют либо две перпендикулярные оси симметрии, либо ось симметрии и плоскость симметрии. Если одна из осей координат выбирается вдоль оси симметрии, а другая — вдоль второй оси симметрии или в плоскости симметрии, то схема коэффициентов теплопроводности запишется в виде

$$\begin{matrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{matrix} \qquad (17.10)$$

Кубическая система. В этом случае возможен циклический обмен осей ромбической системы, и схема коэффициентов теплопроводности примет вид

$$\begin{matrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & 0 \\ 0 & 0 & K_{11} \end{matrix} \qquad (17.11)$$

Тетрагональная, тригональная и гексагональная системы. Если ось z является осью симметрии третьего, четвертого или шестого порядка, т. е. соответствует поворотам на 90°, 120° или 60°, то мы получим следующую схему коэффициентов теплопроводности:

$$\begin{matrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ -K_{12} & K_{11} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{matrix} \qquad (17.12)$$

Кроме того, в кристаллах некоторых классов этих систем имеется ось симметрии, перпендикулярная оси z, или соответствующая плоскость симметрии; если ось x выбрана так, что она совпадает с этой осью или лежит в этой плоскости, то в выражении (17.12) $K_{12} = 0$. Существует несколько классов, принадлежащих к таким системам, для которых равенство K_{12} нулю вытекает не только из соображений симметрии; однако, как будет показано ниже, это соотношение, по-видимому, оказывается справедливым.

Все приведенные выше результаты можно вывести из соображений макроскопической симметрии. Но в действительности, вероятно, можно считать, что K_{rs} в выражениях (17.1) симметричны, т. е. $K_{rs} = K_{sr}$ для всех r и s. Отсюда следует, что $K_{12} = 0$ в выражении (17.12) и $K_{21} = K_{12}$ в выражении (17.9).

Во многих разделах физики кристаллов, в которых встречается закон типа (17.1), классическая термодинамика позволяет сделать вывод о симметричности коэффициентов теплопроводности, т. е. о том, что $K_{rs} = K_{sr}$. В данном случае общее доказательство такого положения невозможно, и поэтому, чтобы показать симметричность коэффициентов теплопроводности, следует обратиться к эксперименту. По этой причине математическая теория обычно развивается без использования предположения о симметрии; рассчитав эффекты асимметрии, их сравнивают с экспериментом (см. § 19 данной главы). Недавно было опубликовано доказательство закона симметрии, основанное на принципе Онзагера о микроскопической обратимости [123—126] *).

*) Необходимо отметить, что уравнение теплопроводности (см. (18.1)), которое, по существу, является выражением первого закона термодинамики, содержит величины K_{rs} только в виде $(K_{rs} + K_{sr})$, и поэтому симметрия последних или отсутствие ее не влияют на выводы из этого уравнения. Эффекты антисимметрии выявляются только при определении направления вектора теплового потока.

Часто приходится пользоваться формулами преобразования координат. Предположим, что мы хотим перейти к новой системе прямоугольных осей x', y', z', направляющие косинусы которых, отнесенные к старой системе, соответственно равны (c_{11}, c_{21}, c_{31}), (c_{12}, c_{22}, c_{32}), (c_{13}, c_{23}, c_{33}). Тогда коэффициенты теплопроводности K'_{ik}, отнесенные к системе (x', y', z'), запишутся в виде

$$K'_{ik} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} c_{ri} c_{sk} K_{rs}, \tag{17.13}$$

тогда как K_{rs} будут выражаться через K'_{ik} следующим образом:

$$K_{rs} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} c_{ri} c_{sk} K'_{ik}. \tag{17.14}$$

Эти выражения являются законами преобразования для тензора второго ранга (доказательство и приложение изложены в книге Вустера [119]). Те же законы преобразования применимы и для R_{rs}.

Наиболее важным примером некристаллического анизотропного тела является *ортотропное твердое тело*, которое имеет различные коэффициенты теплопроводности K_1, K_2, K_3 в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Приняв их за оси x, y и z, получим

$$f_x = -K_1 \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f_y = -K_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad f_z = -K_3 \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{17.15}$$

С другой стороны, для таких веществ, как древесина, коэффициенты теплопроводности которой K_1, K_2 и K_3 в направлениях r, θ, z системы цилиндрических координат [70] (т. е. в направлении по лучам, кольцам и по оси дерева) неодинаковы, тепловые потоки в указанных направлениях соответственно равны

$$f_r = -K_1 \frac{\partial v}{\partial r}, \qquad f_\theta = -K_2 \frac{\partial v}{r\,\partial \theta}, \qquad f_z = -K_3 \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{17.16}$$

§ 18. Дифференциальное уравнение теплопроводности для анизотропных твердых тел

Теперь приступим к разработке теории, основанной на общем допущении (17.1). В данном случае остается справедливым уравнение (6.3), и, подставляя в него выражения (17.1), мы получим следующее уравнение теплопроводности при условии, что среда однородна и что в ней отсутствуют источники тепла:

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} = K_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (K_{23} + K_{32}) \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \\ + (K_{31} + K_{13}) \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x} + (K_{12} + K_{21}) \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}. \tag{18.1}$$

Распространение указанного уравнения на другие случаи производится так же, как и в § 6 настоящей главы.

Рассмотрим теперь квадратичную форму *)

$$K_{11}x^2 + K_{22}y^2 + K_{33}z^2 + (K_{23} + K_{32})\,yz + (K_{31} + K_{13})\,zx + (K_{12} + K_{21})\,xy = \text{const}. \tag{18.2}$$

Известно, что соотношение (18.2) можно преобразовать к новой системе прямоугольных координат ξ, η, ζ таким образом, чтобы его левая часть превратилась в сумму квадратов

$$K_1\xi^2 + K_2\eta^2 + K_3\zeta^2. \tag{18.3}$$

Пользуясь теми же переменными, приведем уравнение (18.1) к виду

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + K_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + K_3 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}. \tag{18.4}$$

Эти новые оси называют *главными осями теплопроводности*, а коэффициенты K_1, K_2, K_3 — *главными коэффициентами теплопроводности*. Из соотношений

*) Ниже будет показано, что $K_{11} \geqslant 0$, $K_{22} \geqslant 0$, $K_{33} \geqslant 0$.

(17.9) — (17.12) следует, что если кристалл обладает осями симметрии, то они служат также главными осями теплопроводности.

Если мы проведем дополнительное преобразование системы координат, а именно положим

$$\xi_1 = \xi\left(\frac{K}{K_1}\right)^{1/2}, \qquad \eta_1 = \eta\left(\frac{K}{K_2}\right)^{1/2}, \qquad \zeta_1 = \zeta\left(\frac{K}{K_3}\right)^{1/2}, \tag{18.5}$$

где K можно выбрать произвольно, то уравнение (18.4) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta_1^2}\right), \tag{18.6}$$

т. е. примет тот же вид, что и уравнение (6.4) для случая изотропного твердого тела. Итак, это преобразование позволяет свести решение задач для анизотропных твердых тел к решению соответствующих задач для изотропных твердых тел в следующих случаях: когда тело не ограничено, когда оно ограничено плоскостями, перпендикулярными главным осям теплопроводности, и (в случае $K_2 = K_3$) когда тело ограничено плоскостями, перпендикулярными оси ξ и круговыми цилиндрами, ось которых совпадает с осью ξ. В большинстве других случаев ограничивающие поверхности искажаются; например, сечение кругового цилиндра с осью, направленной вдоль одной из главных осей, становится эллиптическим.

Для однородных ортотропных твердых тел, для которых справедливо соотношение (17.15), уравнение теплопроводности имеет вид

$$K_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K_3 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho c \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{18.7}$$

тогда как для твердых тел с цилиндрической симметрией, т. е. когда справедливо выражение (17.16), уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{K_1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{K_2}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + K_3 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho c \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{18.8}$$

Ниже будет описан ряд важных специальных случаев, для которых дифференциальное уравнение сохраняет только одну или две пространственные переменные.

I. *Температура зависит только от x.*

Вследствие симметрии этот случай можно свести к случаю потока тепла в полуограниченном твердом теле или в пластине с поверхностями, перпендикулярными оси x, и с граничными условиями, не зависящими от y и z. Тогда $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ и соотношения (17.1) примут следующий вид:

$$-f_x = K_{11}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad -f_y = K_{21}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad -f_z = K_{31}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{18.9}$$

Кроме того, дифференциальное уравнение (18.1) преобразуется к виду

$$K_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho c \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{18.10}$$

Таким образом, вся теория, излагаемая в гл. II и III, оказывается правильной для анизотропного твердого тела при условии, что

$$\varkappa = \frac{K_{11}}{\rho c}. \tag{18.11}$$

Если для оси x направляющие косинусы относительно главных осей теплопроводности равны l, m, n, то из выражения (17.13) следует, что

$$K_{11} = l^2 K_1 + m^2 K_2 + n^2 K_3. \tag{18.12}$$

После того как найдено v, из (18.9) определяются тепловые потоки f_x, f_y, f_z и тогда оказывается, что вектор теплового потока направлен не по нормали к изотермам. Эти результаты следуют из общей теории, приводящей к соотношению (20.15) данной главы.

II. *Тепло течет только в направлении x.*

Это имеет место в тонком стержне, ось которого совпадает с осью x. Тогда $f_y = f_z = 0$ и из соотношения (17.2) получим

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = R_{11} f_x, \qquad -\frac{\partial v}{\partial y} = R_{21} f_x, \qquad -\frac{\partial v}{\partial z} = R_{31} f_x. \tag{18.13}$$

Воспользовавшись соотношением (6.3), можно записать теперь дифференциальное уравнение (18.1) в виде

$$\frac{1}{R_{11}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho c \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{18.14}$$

Тогда мы получим уравнение линейного потока тепла, где

$$\varkappa = \frac{1}{R_{11} \rho c}. \tag{18.15}$$

Следует отметить, что R_{11} не равно $\frac{1}{K_{11}}$, а определяется соотношением (17.3). Если для оси x направляющие косинусы относительно главных осей равны l, m, n, то из (17.13) мы получим для R_{rs} выражение

$$R_{rs} = \frac{l^2}{K_1} + \frac{m^2}{K_2} + \frac{n^2}{K_3} \quad \text{при} \quad r = s \quad \text{и} \quad R_{rs} = 0 \quad \text{при } r \neq s. \tag{18.16}$$

Это выражение выводится в общем виде (см. (20.25)).

Таким образом, теорией о распространении тепла в стержне, изложенной в гл. IV, можно пользоваться для кристаллических стержней при условии, что величина $\varkappa$ определяется соотношением (18.15).

III. *Температура зависит только от x и y.*

Это имеет место в случае распространения тепла в неограниченном цилиндре с осью, параллельной оси z, и при граничных условиях, не зависящих от z. Так как $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, то уравнение (18.1) принимает вид

$$K_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (K_{12} + K_{21}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} + K_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \rho c \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{18.17}$$

и тепловые потоки определяются соотношениями (17.1) при $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$. Следует отметить, что $f_z \neq 0$. Этот случай менее важен, чем случай двумерного течения тепла в тонкой пластине ($f_z = 0$), который подробно рассматривается в следующем параграфе.

§ 19. Теплопроводность тонкой кристаллической пластины

Двумерный случай проводимости интересен тем, что он иллюстрирует основные черты общего случая; кроме того, в нескольких важных методах определения теплопроводности используются тонкие кристаллические пластины. В данном параграфе будет рассмотрена общая теория распространения тепла в такой пластине без каких-либо предположений о ее симметрии.

Выберем оси x и y так, чтобы они лежали в плоскости пластины, т. е. предположим, что поток тепла в направлении z отсутствует ($f_z = 0$); тогда выражения (17.2) принимают вид

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = R_{11} f_x + R_{12} f_y, \qquad -\frac{\partial v}{\partial y} = R_{21} f_x + R_{22} f_y. \tag{19.1}$$

Решая их относительно f_x и f_y и используя соотношения (17.3), (17.4) и (17.8), получим

$$-f_x = K'_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + K'_{12} \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad -f_y = K'_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + K'_{22} \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{19.2}$$

где

$$K'_{11} = \frac{K_{11} K_{33} - K_{31} K_{13}}{K_{33}}, \qquad K'_{12} = \frac{K_{12} K_{33} - K_{13} K_{32}}{K_{33}}, \tag{19.3}$$

$$K'_{21} = \frac{K_{21} K_{33} - K_{31} K_{23}}{K_{33}}, \qquad K'_{22} = \frac{K_{22} K_{33} - K_{23} K_{32}}{K_{33}}. \tag{19.4}$$

Эти четыре величины K'_{11} и т. д. можно назвать **коэффициентами теплопроводности для тонкой пластины в плоскости** xy; они сводятся к K_{11} и т. д. только тогда, когда одна из величин K_{13} и K_{31}, а также одна из величин K_{23} и K_{32} превращаются в нуль.

Подставляя соотношения (19.2) в (6.3), мы получаем уравнение теплопроводности при установившемся состоянии

$$K'_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(K'_{12}+K'_{21})\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+K'_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{19.5}$$

Можно записать его и в другом виде, а именно в виде

$$R_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(R_{12}+R_{21})\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+R_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{19.6}$$

Относя уравнение (19.5) к главным осям ξ, η (как и в § 18), получим

$$K'_1\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+K'_2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=0, \tag{19.7}$$

где K'_1 и K'_2 можно назвать *главными коэффициентами теплопроводности в плоскости* (здесь штрих используется для того, чтобы отличать эти коэффициенты от главных коэффициентов теплопроводности в трехмерном случае (см. § 18), с которыми они могут совпадать в специальных задачах). Компоненты теплового потока, отнесенные к тем же главным осям, должны принять вид

$$-f_\xi=K'_1\frac{\partial v}{\partial \xi}+A\frac{\partial v}{\partial \eta}, \tag{19.8}$$

$$-f_\eta=-A\frac{\partial v}{\partial \xi}+K'_2\frac{\partial v}{\partial \eta}, \tag{19.9}$$

так как уравнение теплопроводности (19.7) в этих координатах не содержит члена $\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta}$; сравнивая полученные уравнения с уравнением (19.5), мы видим, что для их удовлетворения сумма коэффициентов при $\partial v/\partial\eta$ в соотношении (19.8) и при $\partial v/\partial\xi$ в соотношении (19.9) должна быть равной нулю. K'_1, K'_2 и A могут быть, в принципе, определены из коэффициентов в соотношениях (19.1) и (19.2).

В качестве примера, имеющего большое практическое значение, определим изотермы и линии тока тепла для случая постоянного притока тепла к пластине в начале координат.

Напишем соотношения, аналогичные (18.5):

$$\xi_1=\xi\left(\frac{K}{K'_1}\right)^{1/2},\qquad \eta_1=\eta\left(\frac{K}{K'_2}\right)^{1/2}. \tag{19.10}$$

Тогда уравнение (19.7) примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta_1^2}=0, \tag{19.11}$$

при радиальной симметрии его решение запишется в виде

$$v=-m\ln\left\{\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{K}\right\}=-m\ln\left(\frac{\xi^2}{K'_1}+\frac{\eta^2}{K'_2}\right), \tag{19.12}$$

где m — константа. Подставляя это выражение в соотношения (19.8) и (19.9), получим

$$f_\xi=\frac{2m(K'_2\xi+A\eta)}{K'_2\left(\dfrac{\xi^2}{K'_1}+\dfrac{\eta^2}{K'_2}\right)},\qquad f_\eta=-\frac{2m(A\xi-K'_1\eta)}{K'_1\left(\dfrac{\xi^2}{K'_1}+\dfrac{\eta^2}{K'_2}\right)}. \tag{19.13}$$

Общее количество тепла, проходящее через круг радиусом a с центром в начале координат и рассчитанное на единицу толщины пластины, равно

$$Q=\int_0^{2\pi}(f_\xi\cos\theta+f_\eta\sin\theta)\,a\,d\theta.$$

Используя выражения (19.13) и считая $\xi = a\cos\theta$, $\eta = a\sin\theta$, получим

$$Q = 4\pi m\left(K_1'K_2'\right)^{1/2}, \tag{19.14}$$

т. е. находим, что Q не зависит ни от a, ни от A. Подставляя в выражение (19.12) величину m, определяемую соотношением (19.14), мы получаем установившуюся температуру, обусловленную наличием в начале координат источника тепла мощностью Q.

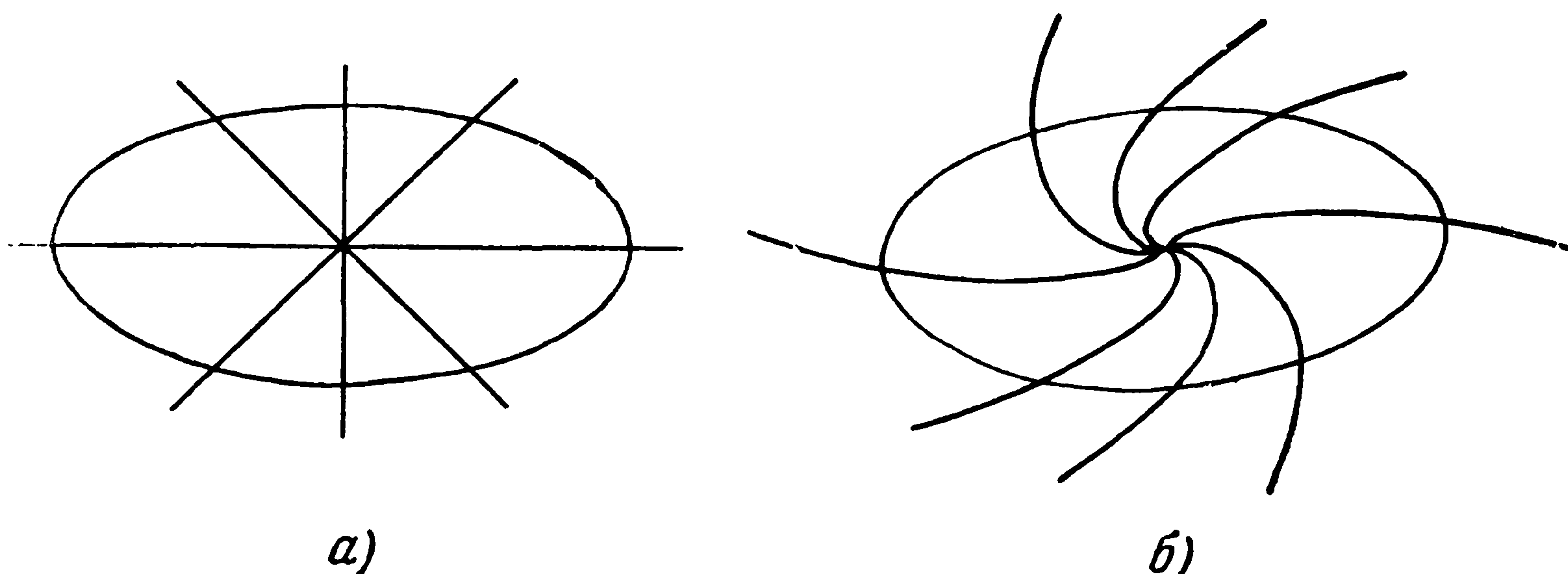
Изотермы образуют семейство эллипсов

$$\frac{\xi^2}{K_1'} + \frac{\eta^2}{K_2'} = \text{const}. \tag{19.15}$$

Направление вектора теплового потока определяется соотношением

$$\frac{f_\eta}{f_\xi} = \frac{K_2'\left(K_1'\eta - A\xi\right)}{K_1'\left(K_2'\xi - A\eta\right)}. \tag{19.16}$$

Если $A = 0$, то он направлен радиально от источника (но не перпендикулярно эквипотенциальным линиям). На рис. 3, *а* показаны эквипотенциальные линии, а также



а) *б)*

Рис. 3.

линии тока тепла, т. е. кривые, направление которых в каждой точке совпадает с направлением вектора теплового потока.

Если $A \neq 0$, то дифференциальное уравнение линий тока тепла имеет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{K_2'\left(K_1'\eta - A\xi\right)}{K_1'\left(K_2'\xi + A\eta\right)}. \tag{19.17}$$

Решение его записывается следующим образом:

$$\left(K_1'K_2'\right)^{1/2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta K_1'^{1/2}}{\xi K_2'^{1/2}}\right) + \frac{1}{2}A\ln\left(K_1'\eta^2 + K_2'\xi^2\right) = \text{const}. \tag{19.18}$$

Кривые, соответствующие соотношению (19.18), образуют семейство спиралей, которые показаны на рис. 3, *б*. В плоскости (ξ_1, η_1) при $K_1' = K_2'$ спирали изогональны к окружностям. Следовательно, если так называемый «вращательный» член A не равен нулю, то направление течения тепла от точечного источника в неограниченной пластине будет таким, как показано на рис. 3, *б*. Если в пластине имеется радиальная трещина, то тепло не сможет течь по этим спиралям и, следовательно, между двумя сторонами трещины должна возникать разница температур. Тот факт, что в экспериментах подобного типа не было обнаружено никакого различия температур, указывает, что A мало. Другие методы показали [127], что A составляет менее одной тысячной K_1 или K_2.

Эллиптическая форма изотерм (см. соотношение (19.15)) была использована для определения отношения главных коэффициентов теплопроводности $\dfrac{K_1'}{K_2'}$, причем

для демонстрации изотерм на поверхность кристаллической пластинки наносилась тонкая пленка воска [128—130].

Для случая линейной теплопередачи между поверхностью пластины и внешней средой при нулевой температуре и теплового потока, равного Hv, уравнение для стационарного режима (которое находят так же, как в § 4 гл. V), написанное относительно главных осей в плоскости, имеет вид

$$K_1' \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + K_2' \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{2H}{D} v = 0, \tag{19.19}$$

где D — толщина пластины. Решением этого уравнения, соответствующим установившемуся потоку тепла от точечного источника, служит

$$v = mK_0 \left\{ \left(\frac{\xi^2}{K_1'} + \frac{\eta^2}{K_2'} \right)^{1/2} \left(\frac{2H}{D} \right)^{1/2} \right\}, \tag{19.20}$$

где K_0 — функция Бесселя, определенная в приложении 3. И в этом случае изотермы имеют вид эллипса (см. соотношение (19.15)), и проведенное выше рассуждение остается справедливым.

§ 20. Изменение теплопроводности и вектор теплового потока в анизотропных твердых телах

В анизотропной среде направление вектора теплового потока f_m в какой-либо точке, вообще говоря, не совпадает с направлением нормали к изотерме, проходящей через эту точку. Пусть $\frac{\partial v}{\partial n}$ и $\frac{\partial v}{\partial m}$ — скорости изменения температуры вдоль нормали к изотерме, проходящей через точку P и вдоль направления вектора теплового потока в точке P соответственно.

Рассмотрим сначала направление вектора теплового потока в точке P. Его направляющие косинусы имеют вид

$$\frac{f_x}{f_m}, \quad \frac{f_y}{f_m}, \quad \frac{f_z}{f_m} \tag{20.1}$$

и, следовательно, используя (17.1), можно написать

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{f_x}{f_m} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{f_y}{f_m} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{f_z}{f_m} \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{2\Phi}{f_m} \tag{20.2}$$

и

$$2\Phi = K_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + K_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + K_{33} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + (K_{23} + K_{32}) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + (K_{31} + K_{13}) \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + (K_{12} + K_{21}) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{20.3}$$

Однородная квадратичная форма (20.3) равна $-f_m (\partial v/\partial m)$, и из физических соображений ее величина не зависит от выбора осей. Далее, поскольку производная $\partial v/\partial m$ должна быть отрицательной, если f_m положительно, форма (20.3) будет положительно определенной. Для этого необходимо, чтобы

$$K_{11} \geqslant 0, \quad K_{22} \geqslant 0, \quad K_{33} \geqslant 0. \tag{20.4}$$

Из соотношения (20.2) следует, что

$$f_m = -K_m \frac{\partial v}{\partial m}, \quad \text{где} \quad K_m = \frac{2\Phi}{\left(\frac{\partial v}{\partial m} \right)^2}. \tag{20.5}$$

K_m можно назвать коэффициентом теплопроводности в направлении вектора теплового потока в точке P.

Теперь рассмотрим нормаль к изотерме, проходящей через точку P. Направляющие косинусы λ, μ, ν задаются соотношениями

$$\lambda = \frac{1}{\Delta_1 v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \mu = \frac{1}{\Delta_1 v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \nu = \frac{1}{\Delta_1 v} \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{20.6}$$

где

$$\Delta_1 v = \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\}^{1/2}. \tag{20.7}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \lambda \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial z} = \Delta_1 v. \tag{20.8}$$

Кроме того, из соотношения (3.2) следует, что тепловой поток f_n в направлении, перпендикулярном к изотерме в точке P, записывается в виде

$$f_n = \lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z = -\frac{2\Phi}{\Delta_1 v} \tag{20.9}$$

или в виде

$$f_n = -K_n \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \text{где} \qquad K_n = \frac{2\Phi}{(\Delta_1 v)^2}. \tag{20.10}$$

Коэффициент K_n можно назвать коэффициентом теплопроводности по нормали к изотерме в точке P. Величины K_m и K_n, определяемые соотношениями (20.5) и (20.10), не зависят от выбора осей.

Теперь посмотрим, каким образом K_n меняется в зависимости от направляющих косинусов (λ, μ, ν) нормали к изотермической поверхности. Подставляя их величины, определяемые (20.6), в соотношения (20.3) и (20.10), получим

$$K_n = K_{11}\lambda^2 + K_{22}\mu^2 + K_{33}\nu^2 + (K_{23} + K_{32})\mu\nu + (K_{31} + K_{13})\nu\lambda + (K_{12} + K_{21})\lambda\mu. \tag{20.11}$$

Если отложить отрезки $kK_n^{-1/2}$ (где k — константа) в направлении (λ, μ, ν), то геометрическое место их концевых точек Q с координатами

$$x = k\lambda K_n^{-1/2}, \qquad y = k\mu K_n^{-1/2}, \qquad z = k\nu K_n^{-1/2} \tag{20.12}$$

имеет вид эллипсоида

$$K_{11}x^2 + K_{22}y^2 + K_{33}z^2 + (K_{23} + K_{32})yz + (K_{31} + K_{13})zx + (K_{12} + K_{21})xy = k^2, \tag{20.13}$$

с которым мы уже встречались в § 18 (см. соотношение (18.2)). Как можно видеть, в таком эллипсоиде квадрат радиуса-вектора, проведенного в точку эллипсоида, в которой направление нормали к эллипсоиду совпадает с направлением радиуса-вектора, обратно пропорционален коэффициенту теплопроводности по нормали.

Так же как и в § 18, можно найти систему прямоугольных координат ξ, η, ζ, относительно которой соотношение (20.13) примет вид

$$K_1\xi^2 + K_2\eta^2 + K_3\zeta^2 = k^2, \tag{20.14}$$

где K_1, K_2, K_3 — главные коэффициенты теплопроводности. Тогда коэффициенты теплопроводности по нормали к изотермам (направляющие косинусы нормали относительно главных осей теплопроводности равны (l, m, n)) окажутся равными k^2/r^2, где r — радиус-вектор в направлении (l, m, n). Другим способом это можно записать следующим образом:

$$K_n = l^2K_1 + m^2K_2 + n^2K_3. \tag{20.15}$$

Обычно при проведении основного эксперимента (см. § 2 настоящей главы) на плоской тонкой пластине кристалла (вырезанной таким образом, что нормаль к нему имеет направляющие косинусы относительно главных осей теплопроводности кристалла, равные l, m, n) измеряется именно этот коэффициент K_n.

Для очень важного специального случая, когда $K_1 = K_2$ и $n = \cos\theta$ (т. е. для любого направления, образующего угол θ с осью симметрии эллипсоида), соотношение (20.15) принимает вид

$$K_n = K_1 + (K_3 - K_1)\cos^2\theta. \tag{20.16}$$

Обратимся теперь к тепловым потокам через плоскости, перпендикулярные главным осям теплопроводности. Если переход из системы x, y, z (см. соотношение (20.13)) в систему ξ, η, ζ (см. (20.14)) записывается в явном виде, то величины тепловых потоков f_ξ, f_η, f_ζ через новые координатные плоскости можно получить из соотношений (17.1) и (3.2). Однако и без этого ясно, что новые соотношения для тепловых

потоков должны иметь вид

$$\left.\begin{aligned} -f_\xi &= K_1\frac{\partial v}{\partial\xi} + A\frac{\partial v}{\partial\eta} + B\frac{\partial v}{\partial\zeta},\\ -f_\eta &= -A\frac{\partial v}{\partial\xi} + K_2\frac{\partial v}{\partial\eta} + C\frac{\partial v}{\partial\zeta},\\ -f_\zeta &= -B\frac{\partial v}{\partial\xi} - C\frac{\partial v}{\partial\eta} + K_3\frac{\partial v}{\partial\zeta}, \end{aligned}\right\} \tag{20.17}$$

так как, повторяя вывод соотношения (20.13) из (17.1), приходим к выражению (20.14), которое состоит из суммы квадратов. Таким образом, при переходе к главным осям теплопроводности в линейной зависимости между тепловыми потоками и производными температуры появляется самое большее шесть независимых коэффициентов. Далее, так же как и в двумерном случае, рассмотренном в § 19 настоящей главы, есть все основания полагать, что так называемые «вращательные» члены A, B, C стремятся к нулю, и следовательно, соотношения (20.17) принимают вид

$$-f_\xi = K_1\frac{\partial v}{\partial\xi}, \qquad -f_\eta = K_2\frac{\partial v}{\partial\eta}, \qquad -f_\zeta = K_3\frac{\partial v}{\partial\zeta}. \tag{20.18}$$

Из формулы для перехода к новым осям легко показать, что равенство $A=B=C=0$ означает симметрию коэффициентов теплопроводности, т. е. для любой системы прямоугольных осей в формуле (17.1) мы должны считать, что

$$K_{12}=K_{21}, \qquad K_{23}=K_{32}, \qquad K_{31}=K_{13}. \tag{20.19}$$

Наконец, определим направление вектора теплового потока и выясним, каким образом изменяется в этом направлении теплопроводность K_m; при этом мы предполагаем, что справедливо соотношение (20.19) и, следовательно, тепловой поток определяется соотношениями (20.18).

В соотношении (20.14) точка (ξ, η, ζ) была выбрана на радиусе-векторе, перпендикулярном изотерме, проходящей через точку P, т. е.

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{\partial v}{\partial\xi} : \frac{\partial v}{\partial\eta} : \frac{\partial v}{\partial\zeta}.$$

Используя этот результат, а также (20.18), получим

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial\xi}}{\xi} = \frac{\frac{\partial v}{\partial\eta}}{\eta} = \frac{\frac{\partial v}{\partial\zeta}}{\zeta} = -\frac{f_\xi}{K_1\xi} = -\frac{f_\eta}{K_2\eta} = -\frac{f_\zeta}{K_3\zeta}. \tag{20.20}$$

Квадрат каждого отношения в соотношении (20.20) равен

$$-\frac{f_\xi\frac{\partial v}{\partial\xi} + f_\eta\frac{\partial v}{\partial\eta} + f_\zeta\frac{\partial v}{\partial\zeta}}{K_1\xi^2 + K_2\eta^2 + K_3\zeta^2} = \frac{f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2}{K_1^2\xi^2 + K_2^2\eta^2 + K_3^2\zeta^2}. \tag{20.21}$$

Используя (20.2) и (20.14), получим

$$f_m = -\frac{OR^2}{k^2}\frac{\partial v}{\partial m}, \tag{20.22}$$

где OR — радиус-вектор точки с координатами $(X=K_1\xi,\ Y=K_2\eta,\ Z=K_3\zeta)$. Согласно соотношениям (20.20) направление OR совпадает с направлением вектора теплового потока. Следовательно, теплопроводность K_m в этом направлении равна

$$K_m = \frac{OR^2}{k^2}. \tag{20.23}$$

Итак, из соотношения (20.14) следует, что (X, Y, Z) лежит на эллипсоиде

$$\frac{X^2}{K_1} + \frac{Y^2}{K_2} + \frac{Z^2}{K_3} = k^2. \tag{20.24}$$

Таким образом, если направление вектора теплового потока относительно главных осей теплопроводности задается направляющими косинусами l, m, n, то теплопроводность K_m в этом направлении определяется соотношением

$$\frac{1}{K_m} = \frac{l^2}{K_1} + \frac{m^2}{K_2} + \frac{n^2}{K_3}. \tag{20.25}$$

Это и есть теплопроводность, которая обычно измеряется в экспериментах с длинным тонким стержнем, вырезанным в направлении (l, m, n). Если $K_1 = K_2$, а $n = \cos\theta$, то соотношение (20.25) принимает следующий вид *):

$$\frac{1}{K_m} = \frac{1}{K_1} + \left(\frac{1}{K_3} - \frac{1}{K}\right)\cos^2\theta. \qquad (20.26)$$

Эллипсоид, описываемый (20.24), был назван Ламе *главным эллипсоидом*; иногда его называют *термическим эллипсоидом*. Он дает геометрическое представление об изменении теплопроводности.

Из рассмотрения эллипсоидов, описываемых соотношениями (20.14) и (20.24), можно сделать множество геометрических выводов о свойствах теплопроводности, направлениях вектора теплового потока и нормалей к изотермам. Например, из последних трех уравнений (20.20) следует, что если нормаль к изотерме в некоторой точке имеет направление (ξ, η, ζ), то направление вектора теплового потока в указанной точке перпендикулярно плоскости, касательной к эллипсоиду (20.14) в точке (ξ, η, ζ). С другой стороны, если в некоторой точке известно направление вектора теплового потока (X, Y, Z), то нормаль к изотерме, проходящей через указанную точку, перпендикулярна плоскости, касательной к эллипсоиду (20.24) в точке (X, Y, Z).

ЛИТЕРАТУРА

1. International Critical Tables, vol. V, McGraw-Hill, 1929.
2. Birch, Schainer, Spicer, Handbook of Physical Constants, Geol. Soc. of America, Special papers, No. 36 (1942).
3. Van der Held, Appl. Sci. Res. **A3**, 237—249 (1953).
4. Van der Held, Appl. Sci. Res. **A4**, 77—99 (1954).
5. Van Dusen, J. Res. Nat. Bur. Standards **4**, 753—756 (1930).
6. Eyres, Hartree, Ingham, Jackson, Sarjaut, Wagstaff, Phil. Trans. Roy. Soc. **A240**, 1—58 (1946).
7. Kirchhoff, Vorlesungen über die Theorie der Warme, 1849.
8. Vernotte, C. R. Acad. Sci. **218**, 39—41 (1944).
9. Curtis, High Frequency Induction Heating, McGraw-Hill, 1944.
10. Brown, Proc. IRE **31**, 537—548 (1943).
11. Maddock, J. Sci. Instr. **23**, 165—173 (1946).
12. Brown, Hoyler, Bierwirth, Radio Frequency Heating, van Nostrand, 1947.
13. Jeffreys, The Earth, Cambridge, ed. 3, p. 276, 1952.
14. Lowan, Phys. Rev. **44**, 769—775 (1933).
15. Proc. Am. Concr. Inst. **31**, 113 (1934).
16. Proc. Am. Concr. Inst. **34**, 89, 105, 117, 477, 497 (1937).
17. Temperature, its Measurement and Control in Science and Industry, Am. Inst. Phys., 1941.
18. Davey, Fox, Building Research Technical Paper, No. 15, London, H. M. S. O., 1933.
19. Rawhouser, J. Am. Concr. Inst. **16**, 305 (1945).
20. Awbery, Phil. Mag. **4**, 629—638 (1927).
21. Jaeger, Brit. J. Appl. Phys. **3**, 221—222 (1952).
22. Crank, Nicholson, Proc. Camb. Phil. Soc. **43**, 50—67 (1947).
23. Nichols, Presson, J. Appl Phys. **25**, 1469—1472 (1954).
24. Goheen, J. Math. Phys. **28**, 107—116 (1949).
25. Rice, J. Chem. Phys. **8**, 727 (1940).
26. Goodlet, Edwards, Perry, J. Instn. Elect. Engrs **69**, **695** (1931).
27. Hartree, Mem. Manchr. Lit. Phil. Soc. **80**, 85 (1935).
28. Jeffreys, Proc. Camb. Phil. Soc. **26**, 101—106 (1930).
29. Lapwood, Month. Not. R. Astr. Soc., Geophys. Suppl. **6**, **402—407** (1952).
30. Duhamel, J. Ec. polyt., Paris, **15**, Cah. 25, 1—57 (1837).
31. Wilson, Proc. Camb. Phil. Soc. **12**, 406—423 (1904).
32. Boussinesq, Theorie analytique de la chaleur, т. II, Gauthier-Villars, 1903.
33. Jeffreys, Phil. Mag., **35**, 270—280 (1918).
34. Goldstein, Modern Developments in Fluid Dynamics, Oxford, 1938, v. II. (С. Гольдштейн, Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, М., 1948, т. II).
35. Gröber, Erk, Grigull, Wärmeübertragung, Springer, ed. 3, 1955, p. 179.

*) Это соотношение было экспериментально подтверждено Бриджменом [131, 132].

36. Jakob, Heat Transfer, Wiley, 1949, p. 451. (М. Якоб, Вопросы теплопередачи, ИЛ, 1960, перев. с изд. 1957 г.)
37. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge, ed. 4, 1916. (Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, перев. с 6-го изд.)
38. Synge, Quart. Appl. Math. **13**, 271—278 (1955).
39. Eckart, Phys. Rev. **58**, 267—269 (1940).
40. Goursat, Cours d'Analyse, Gauthpier-Villars, ed. 3, 1917. (Э. Гурса, Курс математического анализа, ГТТИ, 1933, перев. с 5-го изд.)
41. McLachlan, Phil. Mag. **36**, 600 (1945).
42. McLachlan, Phil. Mag. **37**, 216 (1946).
43. Tranter, Quart J. Mech. Appl. Math. **4**, 461—465 (1951).
44. Mathien, Cours de Physique Mathematique, Paris, 1873, Chap. 8, 9.
45. Niven, Phil. Trans. Roy. Soc. **171**, 117 (1879).
46. Fishenden, Saunders, Heat Transfer (Oxford, 1950).
47. McAdams, Heat Transmission, McGraw-Hill, ed. 2, 1942. (В. Мак-Адамс, Теплопередача, ОНТИ, 1936, перев. с 1-го изд.)
48. Fox, Phil. Mag. **18**, 209—227 (1934).
49. Jaeger, Proc. Camb. Phil. Soc. **46**, 634—641 (1950).
50. Mann, Wolf, Quart. Appl. Math. **9**, 163—184 (1951).
51. Peddie, Proc. Edin, Math. Soc. **19**, 34—35 (1901).
52. March, Weaver, Phys. Rev. **31**, 1072—1082 (1928).
53. Schumann, Phys. Rev. **37**, 1508—1515 (1931).
54. Peek, Ann. Math. Princeton (2) **30**, 265 (1929).
55. Langer, Tôhoku Math. J. **35**, 260—275 (1932).
56. Lowan, Phil. Mag. **17**, 849—854 (1934).
57. Jaeger, J. Proc. Roy. Soc. N. S. W. **74**, 342—352 (1940).
58. Jaeger, J. Proc. Roy. Soc. N. S. W. **75**, 130—139 (1941).
59. Jaeger, Aust. J. Phys. **9**, 167—179 (1956).
60. Blackwell, J. Appl. Phys. **25**, 137—144 (1954).
61. Gaskell, Am. J. Math. **64**, 447—455 (1942).
62. Chao, Weiner, Quart. Appl. Math. **14**, 214—217 (1956).
63. Barrer, Diffusion in and through Solids, Cambridge, 1941. (Р. Бэррер, Диффузия в твердых телах, ИЛ, М., 1948.)
64. Jacobs, Starr, Rev. Sci. Instr. **10**, 140 (1941).
65. Jaeger, Quart. J. Mech. Appl. Math. **8**, 101—106 (1955).
66. Whipple, Phil. Mag. **45**, 1225—1236 (1954).
67. Ingersoll, J. Opt. Soc. Am. a. Rev. Sci. Instr. **9**, 495 (1924).
68. Griffiths, Proc. Phys. Soc. **41**, 151 (1928).
69. Dictionary of Applied Physics.
70. Griffiths, Kaye, Proc. Roy. Soc. **A104**, 71 (1923).
71. Crank, The Mathematics of Diffusion, Oxford, 1956.
72. Jost, Diffusion, Academíe Press, 1952.
73. Babbitt, Canad. J. Res. **A28**, 449—474 (1950).
74. Hill, Proc. Roy. Soc. **B104**, 39—96 (1929).
75. Thews, Acta Biotheoretica **A10**, 105—138 (1953).
76. Danckwerts, Trans. Faraday Soc. **47**, 1014—1023 (1951).
77. Keynes, Proc. Roy. Soc. **B142**, 359—382 (1954).
78. Gibson, Henkel, Geotehcnique **4**, 6—15 (1954).
79. Henry, Proc. Roy. Soc. **A171**, 215 (1939).
80. Riemann-Weber, Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, ed. Frank, Vieweg, 1927, Bd. 2. (Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, ОНТИ, 1937.)
81. Fürth, Geofis. Pura é Appl. **31**, 80—89 (1955).
82. Davies, Proc. Roy. Soc. **A200**, 100—113 (1949).
83. Hulburt, Phys. Rev. (2) **31**, 1018 (1928).
84. Marshak, Rev. Mod. Phys. **19**, 185—238 (1947).
85. Sneddon, Fourier Transforms, McGraw-Hill, 1951. (Снеддон, Преобразование Фурье, ИЛ, М., 1955.)
86. Goldstein, Proc. Lond. Math. Soc. **34**, 51 (1932).
87. McEwen, J. Marine Res. **7**, 188—216 (1948).
88. Carslaw, Jaeger, Operational Methods in Applied Mathematics Oxford, ed. 2, 1947, Chap. 9. (Г. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, М., 1948, перев. с 1-го изд. 1941 г.)
89. Muskat, The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, McGraw-Hill, 1937, Chap. 10
90. Rosenhead, Miller, Proc. Roy. Soc. **A163**, 298—317 (1937).

91. Hantush, Jacob, Trans. Am. Geophys. Union. **36**, 95—112 (1955).
92. Mémoire sur la méthode générale relative au mouvement de la chaleur dans les corps solides plongés dans les mileux dont la température varie avec le temps, J. Ec. polyt. Paris **14**, Cah. 22, 20 (1833).
93. Bartels, Churchill, Bull. Am. Math. Soc. **48**, 276 (1942).
94. Danckwerts, Trans. Faraday Soc. **47**, 1014—1023 (1951).
95. Newman, Ind. Eng. Chem. **28**, 545 (1936).
96. Olson, Schultz, Ind. Eng. Chem. **34**, 874 (1942).
97. Doetsch, Math. Z. **22**, 293 (1925).
98. Doetsch, Math. Z. **25**, 608 (1926).
99. Doetsch, Enseign. math. **35**, 43 (1936).
100. Titchmarsh, Fourier Integrals, Oxford, 1937, pp. 281—283. (Э. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, перев. с 1-го изд.)
101. Тихонов, Математический сборник **42**, 199—216 (1935).
102. Churchill, Am. J. Math. **61**, 651 (1939).
103. Mersman, Bull. Am. Math. Soc. **47**, 956 (1941).
104. Widder, Trans. Am. Math. Soc. **55**, 85—95 (1944).
105. Widder, Trans. Am. Math. Soc. **75**, 510—525 (1953).
106. Cooper, J. Lond. Math. Soc. **25**, 173—180 (1950).
107. Birkhoff, Kotik, Proc. Am. Math. Soc. **5**, 162—168 (1954).
108. Kampé de Fériet, C. R. Acad. Sci. **236**, 1527—1529 (1953).
109. Fulks, Pacific J. Math. **2**, 141—145 (1952).
110. Fulks, Pacific J. Math. **3**, 387—391, 567—583 (1953).
111. Hartman, Wintner, Am. J. Math. **72**, 367—395 (1950).
112. Rayner, Quart. J. Mech. Appl. Math. **6**, 385—390 (1953).
113. Duhamel, J. Ec. polyt. Paris **13**, Cah. 21, 356 (1832).
114. Duhamel, J. Ec. polyt. Paris **19**, Cah. 32, 155 (1848).
115. Lamé, Lecons sur la theorie de la chaleur, Paris, 1861.
116. Stokes, Camb. and Dublin Math. J. **6**, 215—238 (1851).
117. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur, Paris, 1901.
118. Voigt, Lehrbuch der Krystallphysik, Leipzig, 1910.
119. Wooster, Text-book on Crystal Physics, Cambridge, 1949.
120. Bôcher, Higher Algebra, Macmillan, 1924.
121. Thomson, Lodge, Phil. Mag. (5) **8**, 18 (1879).
122. Stenger, Wied. An. **22**, 522 (1884).
123. Crandall, Physica **21**, 251—252 (1955).
124. Casimir, Rev. Mod. Phys. **17**, 343—350 (1945).
125. Onsager, Phys. Rev. **37**, 405 (1931).
126. Onsager, Phys. Rev. **38**, 2265 (1931).
127. Voigt, Gött. Nach. 223 (1896).
128. Senarmont, C. R. Acad. Sci. **21**, 459, 707, 829 (1847).
129. Von Lang, Pogg. Ann. **135**, 29 (1868).
130. Roentgen, Pogg. Ann. **151**, 603 (1874).
131. Bridgman, Proc. Am. Acad. Arts. Sci. **61**, 101 (1925).
132. Hume-Rothery, The Metalic State, Oxford, 1931, Chap. IV.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЙ ПОТОК ТЕПЛА. НЕОГРАНИЧЕННОЕ И ПОЛУОГРАНИЧЕННОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО

§ 1. Введение. Простые решения уравнения для линейного потока тепла

В этой главе мы рассмотрим различные задачи, в которых изотермические поверхности представляют собой плоскости, параллельные плоскости $x=0$, поток тепла линеен и линии тока параллельны оси x. Получающиеся результаты применимы и к задаче о потоке тепла вдоль прямолинейного стержня малого поперечного сечения в отсутствие теплообмена на его боковой поверхности. Задачи, в которых это условие не выполняется, рассматриваются в гл. IV.

После того как мы найдем решение для неограниченного тела, мы приступим к детальному изучению многих важных задач о линейном тепловом потоке в полуограниченном твердом теле, т. е. в твердом теле, которое ограничено плоскостью $x=0$ и простирается до бесконечности в положительном направлении оси x. Во всех случаях предполагается, что термические характеристики тела во всех его точках одинаковы и не зависят от температуры. Распространение этой задачи на переменные термические характеристики рассматривается в § 16 настоящей главы.

Уравнение для линейного потока тепла записывается в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0. \tag{1.1}$$

Сначала укажем ряд простых решений этого уравнения*). В дальнейшем все они будут встречаться во многих местах настоящей книги одновременно с истолкованием их физического смысла.

I. *Истокообразное решение.*

Рассмотрим выражение

$$u=t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}. \tag{1.2}$$

Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}+\frac{x^2}{4\varkappa t^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{2\varkappa t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}+\frac{x^2}{4\varkappa^2 t^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}},$$

*) Связь между различными решениями уравнения (1.1) дается в работе [1].

выражение (1.2) является частным решением уравнения (1.1). Для этого решения справедливы следующие соотношения:

$$u \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad \text{для фиксированного} \quad x \neq 0,$$
$$u \to \infty \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad \text{для} \quad x = 0$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u\, dx = 2(\pi\varkappa)^{1/2} \quad \text{при всех} \quad t > 0.$$

Таким образом, его можно считать решением, соответствующим случаю выделения количества тепла $2\rho c(\pi\varkappa)^{1/2}$ с единицы площади в плоскости $x = 0$ в момент времени $t = 0$.

Ясно, что ряд других решений уравнения (1.1) получается дифференцированием (или в некоторых случаях интегрированием) выражения (1.2) по x или по t.

II. *Решение в виде функции ошибок.*

Как мы видим, уравнению (1.1) удовлетворяет также

$$\int\limits_0^x t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}\, dt = 2\varkappa^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Введем обозначение *)

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi, \tag{1.3}$$

которым мы в дальнейшем всегда будем пользоваться, и покажем, что

$$A\Phi\left[\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right], \tag{1.4}$$

где A — произвольная постоянная, является решением уравнения (1.1).

Для «функции ошибок», определенной (1.3), справедливы следующие соотношения:

$$\Phi(0) = 0, \qquad \Phi(\infty) = 1, \qquad \Phi(-x) = -\Phi(x). \tag{1.5}$$

В приложении 2 приведены еще некоторые данные, а также таблицы числовых значений. Мы будем часто пользоваться, кроме того, следующими обозначениями:

$$\Phi^*(x) = 1 - \Phi(x), \tag{1.6}$$

$$\mathrm{i}\Phi^*(x) = \mathrm{i}^1\Phi^*(x) = \int\limits_x^\infty \Phi^*(\xi)\, d\xi, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{i}^n\Phi^*(x) = \int\limits_x^\infty \mathrm{i}^{n-1}\Phi^*(\xi)\, d\xi, \qquad n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \tag{1.8}$$

III. *Решения вида* $t^m f\left[\frac{x}{(4\varkappa t)^{1/2}}\right]$.

Можно доказать, что выражение такого типа удовлетворяет уравнению (1.1), если $f(z)$ служит решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + 2z\frac{df}{dz} - 4mf = 0. \tag{1.9}$$

*) Эту функцию иногда обозначают также символом erf. (*Прим. ред.*)

Это уравнение совпадает с уравнением (16) приложения 2, и поэтому, если n — целое число, то выражение

$$t^{\frac{1}{2}n} \mathrm{i}^n \Phi^* \left[\frac{x}{(4\varkappa t)^{1/2}} \right] \tag{1.10}$$

служит решением *) уравнения (1.1).

IV. *Решение в виде экспонент.*

Простое дифференцирование сразу же показывает, что выражение

$$P \exp(\varkappa A^2 t \pm Ax) \tag{1.11}$$

(где P и A — постоянные), как действительное, так и комплексное, удовлетворяет уравнению (1.1).

V. *Решение для установившегося состояния.*

Для случая, когда v не зависит от времени, решение уравнения (1.1) записывается в виде

$$Ax + B, \tag{1.12}$$

где A и B — постоянные.

Было показано [6], что выражения (1.4), (1.11) и (1.12) служат (если не считать тривиальных их модификаций, например при замене x на $x + a$) *единственными* решениями уравнения (1.1), имеющими вид $f[\varphi(x)\psi(t)]$.

VI. *Решение в виде двойного степенного ряда.*

Легко проверить путем подстановки, что выражение

$$\begin{aligned} v = a_0 + a_1 x + a_2(x^2 + 2\varkappa t) + a_3(x^3 + 6\varkappa x t) + \\ + a_4(x^4 + 12\varkappa x^2 t + 12\varkappa^2 t^2) + a_5(x^5 + 20\varkappa x^3 t + 60\varkappa^2 x t^2) + \\ + a_6(x^6 + 30\varkappa x^4 t + 180\varkappa^2 x^2 t^2 + 120\varkappa^3 t^3) + \ldots, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где a_0, a_1, ... — постоянные, удовлетворяет уравнению (1.1).

VII. *Решение, содержащее две произвольные функции времени.*

Выражение

$$v = \varphi + \frac{x^2}{\varkappa 2!}\dot{\varphi} + \frac{x^4}{\varkappa^2 4!}\ddot{\varphi} + \ldots + x\psi + \frac{x^3}{\varkappa 3!}\dot{\psi} + \frac{x^5}{\varkappa^2 5!}\ddot{\psi} + \ldots, \tag{1.14}$$

где φ и ψ — произвольные функции времени, а точки означают дифференцирование по t, удовлетворяет уравнению (1.1). Для этого решения характерно следующее: если $x = 0$, то $v = \varphi(t)$, а $\frac{\partial v}{\partial x} = \psi(t)$.

§ 2. Неограниченное твердое тело. Решение Лапласа

Требуется найти решение уравнения линейного теплового потока (1.1) в бесконечной области $-\infty < x < \infty$ с начальным условием

$$v = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Обычное формальное рассмотрение этой задачи заключается в следующем: согласно (1.2) данной главы

$$\frac{1}{2(\pi\varkappa t)^{1/2}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}}$$

является частным интегралом уравнения (1.1).

---

*) Рибо [2] и Нордон [3] отмечали, что для всех значений n решениями уравнения (1.9) служат функции Вебера. Эти вопросы, а также ряд других вопросов аналогичного типа рассматриваются Аппелем [4] и Гурса [5].

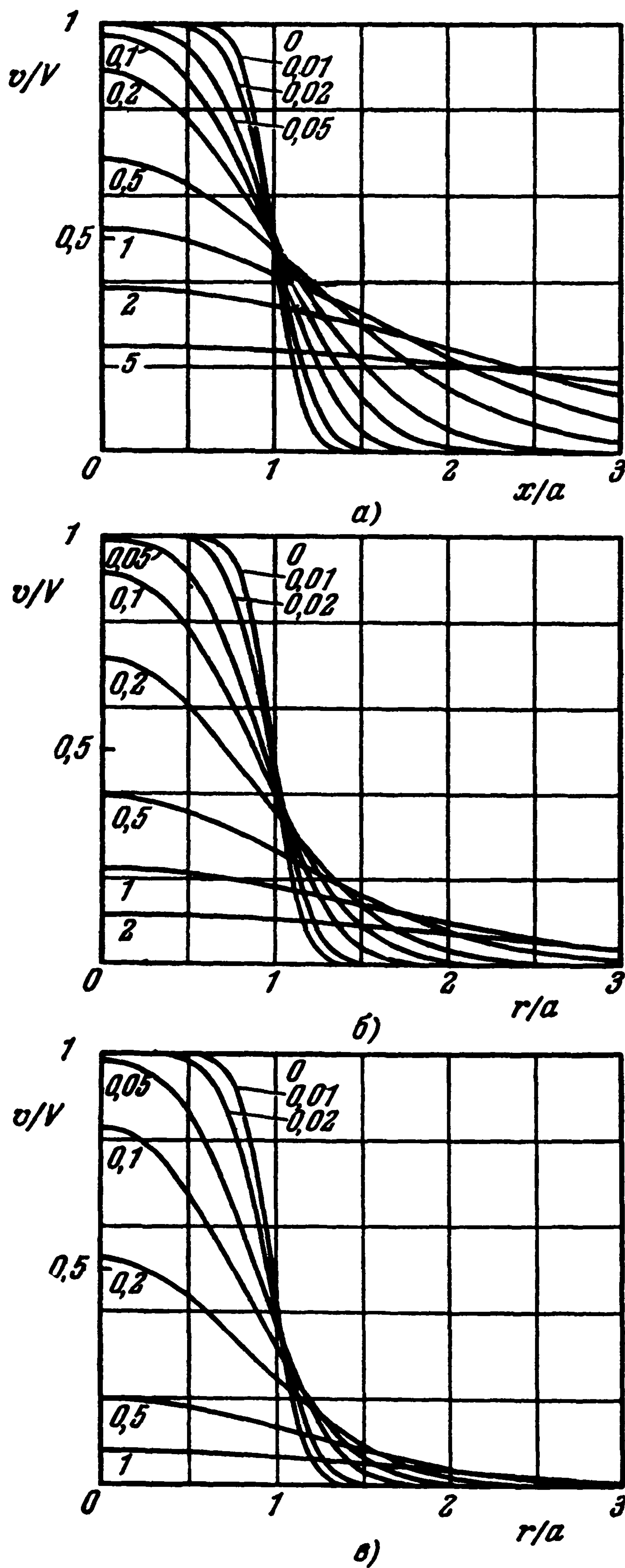


Рис. 4. Распределение температур в неограниченной области, одна часть которой в начальный момент времени имеет постоянную температуру V, а другая часть — нулевую температуру.

а) Область $|x| < a$ с начальной температурой, равной V; *б*) внутренность цилиндра радиусом $r=a$ при начальной температуре V; *в*) внутренность сферы радиусом $r=a$ при начальной температуре V. Во всех случаях числа на кривых указывают величины $\varkappa t/a^2$.

Далее, так как уравнение является линейным, то сумма любого числа частных интегралов также является интегралом. Следовательно, функция

$$v=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}}\,dx'$$

также удовлетворяет указанному уравнению при условии, что этот интеграл сходится *).

Пусть

$$x'=x+2\sqrt{\varkappa t}\,\xi.$$

Тогда

$$v=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f\{x+2\sqrt{\varkappa t}\,\xi\}\,e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

В пределе, когда $t\to 0$, $f\{x+2\sqrt{\varkappa t}\,\xi\}=f(x)$, если эта функция непрерывна; предполагается, что предельное значение этого интеграла дается выражением

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-\xi^2}\,d\xi,$$

которое равно $f(x)$.

Итак, в момент времени t температура неограниченного твердого тела, имевшего начальную температуру $v=f(x)$, записывается в виде

$$v=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\times \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]dx'. \qquad (2.1)$$

Мы можем написать [11]

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,e^{-\frac{b^2}{a^2}},$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{-\varkappa\alpha^2 t}\cos\alpha(x'-x)\,d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\varkappa t}}\exp\left[-\frac{(x'-x)^2}{4\varkappa t}\right].$$

*) Для того чтобы функция v служила решением (1.1), необходимо, чтобы этот интеграл, а также интеграл от ее производных сходились равномерно. (*Прим. ред.*)

Отсюда выражение для v можно записать в форме

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' \int\limits_{0}^{\infty} f(x')\cos\alpha(x'-x)\,e^{-\varkappa\alpha^2 t}\,d\alpha, \tag{2.2}$$

которая напоминает форму интеграла Фурье (3.2) для $f(x)$.

Проведенное выше рассуждение было формальным, и поэтому необходимо рассмотреть условия для $f(x)$, при которых оно справедливо. Было показано [10], что если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема в любом заданном интервале, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x')|\,dx'$ сходится, то при $t\to 0$ функция v, заданная выражением (2.1), имеет предел $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x, или предел $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, если она имеет в точке x разрыв первого рода. Кроме того, если $f(x)$ непрерывна в интервале $[\alpha, \beta]$, то в этом интервале v равномерно стремится к $f(x)$ при $t\to 0$.

На самом деле полученные результаты справедливы и при менее строгих условиях для $f(x)$, например, если $f(x)$ — любой полином или экспоненциальная функция, т. е. если

$$|f(x)| < Ke^{c|x|},$$

где K и c — постоянные *).

Ниже приводятся некоторые практически важные результаты, полученные на основе уравнения (2.1).

1. Если в начальный момент времени область $-a < x < a$ имеет постоянную температуру, равную V, а область $|x| > a$ — нулевую температуру **), то

$$v=\frac{1}{2}V\left\{\Phi\left(\frac{a-x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)+\Phi\left(\frac{a+x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2.3}$$

На рис. 4, *а* приведены некоторые численные значения величины v/V, полученные из выражения (2.3) при различных значениях параметра $\varkappa t/a^2$. Аналогичные результаты, найденные для цилиндра с радиусом поперечного сечения a и сферы радиусом a, находящихся при постоянной начальной температуре, приведены соответственно на рис. 4, *б* и 4, *в*.

2. Если в начальный момент времени область $-a < x < a$ имеет нулевую температуру, а область $|x| > a$ — температуру, равную V, то

$$v=\frac{1}{2}V\left\{\Phi^*\left(\frac{a-x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)+\Phi^*\left(\frac{a+x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2.4}$$

3. Если в начальный момент времени область $|x| > a$ имеет нулевую температуру, область $a > x > 0$ — температуру $v = V(a-x)/a$ и область $-a < x < 0$ — температуру $v = V(a+x)/a$, то

$$v=\frac{V}{2a}\left\{(a-x)\,\Phi\left(\frac{a-x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)+(a+x)\,\Phi\left(\frac{a+x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)-2x\Phi\left(\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\varkappa t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\exp\left[-\frac{(x+a)^2}{4\varkappa t}\right]+\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{4\varkappa t}\right]-2\exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa t}\right]\right]\right\}. \tag{2.5}$$

---

*) Более общее обсуждение этих вопросов приведено в работах [5] и [7].

**) В работе [8] функция (2.3) использована в качестве приближения для температуры в случае, когда плоский слой расплавленной горной породы вторгается в другую породу при нулевой температуре. В этой работе приводятся графики функции (2.3) в форме, пригодной для практического применения. Кроме того, в ней используются функции (2.9) и (2.10) для случая цилиндрических и массивных интрузивных пород, а также выражение (4.14) для случая течения лавы по поверхности других пород (см. также [9]). О влиянии теплоты застывания горных пород см. § 2 гл. XI.

4. Если плоскость $x = 0$ непроницаема для тепла, то решение принимает форму

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} \int_0^\infty f(x') \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa t}\right] \right\} dx' =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx' \int_0^\infty f(x') \cos\alpha x' \cos\alpha x e^{-\varkappa\alpha^2 t}\, d\alpha. \qquad (2.6)$$

5. Для двумерного и трехмерного случаев решения уравнения (2.1) принимают вид

$$v = \frac{1}{4\pi\varkappa t} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x', y') \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\varkappa t}\right] dx'\, dy', \qquad (2.7)$$

$$v = \frac{1}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x', y', z') \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\varkappa t}\right] dx'\, dy'\, dz'. \qquad (2.8)$$

6. Если в начальный момент неограниченный цилиндр $|x| < a$, $|y| < b$ имеет постоянную температуру V, а окружающая его неограниченная область — нулевую температуру, то

$$v = \frac{1}{4} V \left\{ \Phi\left(\frac{a-x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) + \Phi\left(\frac{a+x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) \right\} \left\{ \Phi\left(\frac{b-y}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) + \Phi\left(\frac{b+y}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) \right\}. \qquad (2.9)$$

7. Если в начальный момент параллелепипед $|x| < a$, $|y| < b$, $|z| < c$ имеет постоянную температуру V, а окружающая его неограниченная область — нулевую температуру, то

$$v = \frac{1}{8} V \left\{ \Phi\left(\frac{a-x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) + \Phi\left(\frac{a+x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) \right\} \left\{ \Phi\left(\frac{b-y}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) + \Phi\left(\frac{b+y}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \Phi\left(\frac{c-z}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) + \Phi\left(\frac{c+z}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) \right\}. \qquad (2.10)$$

§ 3. Использование интегралов Фурье и преобразований Фурье

В § 2 настоящей главы отмечалось, что решение Лапласа может принять форму (2.2), которая связывалась с интегралом Фурье для $f(x)$. Указанное решение можно вывести также из интегральной теоремы Фурье. Для этого удобнее всего, по-видимому, использовать преобразование Фурье. Мы приведем здесь краткое изложение данного метода и покажем, как он приводит к решению Лапласа.

Согласно интегральной теореме Фурье (см. [11], § 119), если $f(x)$ определена для всех x, удовлетворяет условиям Дирихле *) в любом конечном интервале и если существует интеграл **)

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\, dx, \qquad (3.1)$$

то

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty f(x') \cos\xi(x-x')\, dx', \qquad (3.2)$$

*) Об условиях Дирихле см. § 93 в книге Карслоу [11]. Они удовлетворяются функцией с конечным числом максимумов, минимумов и разрывов первого рода.

**) Это чрезвычайно жесткое условие сильно затрудняет использование интегральной теоремы Фурье в этой форме для практических приложений. Результаты для более широкого класса функций можно получить при использовании обобщенных интегралов Фурье [7] или преобразования Лапласа, причем последнее удобнее всего применять в целом ряде задач, связанных с теплопроводностью.

или

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\cos\xi(x-x')\,dx' \tag{3.3}$$

во всех точках, в которых $f(x)$ непрерывна, а в точке разрыва первого рода

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\sin\xi(x-x')\,dx'=0, \tag{3.4}$$

то из выражений (3.3) и (3.4) следует, что

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\,e^{i\xi x'}\,dx'. \tag{3.5}$$

Указанное соотношение является математическим выражением комплексной формы интеграла Фурье. Ее можно записать следующим образом: если

$$F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x'}f(x')\,dx', \tag{3.6}$$

то

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}F(\xi)\,d\xi. \tag{3.7}$$

Здесь функции $F(\xi)$ и $f(x)$ являются преобразованиями Фурье друг для друга; если одна из них известна, то другая следует из соответствующей формулы (3.6) или (3.7).

Большое практическое значение имеют следующие два случая. Если $f(x)$ — нечетная функция x, то соотношение (3.2) принимает вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\xi x\,d\xi\int_{0}^{\infty}f(x')\sin x'\xi\,dx'. \tag{3.8}$$

Иными словами, выполнение любого из соотношений:

$$F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x')\sin x'\xi\,dx', \tag{3.9}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}F_s(\xi)\sin\xi x\,d\xi, \tag{3.10}$$

подразумевает справедливость другого. Функции $F_s(\xi)$ и $f(x)$ называются *синус-преобразованиями Фурье* друг для друга.

Если же $f(x)$ — четная функция x, то выражение (3.2) принимает вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\xi x\,d\xi\int_{0}^{\infty}f(x')\cos x'\xi\,dx. \tag{3.11}$$

Иными словами, выполнение любого из соотношений:

$$F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x')\cos x'\xi\,dx', \tag{3.12}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\xi)\cos \xi x\,d\xi, \tag{3.13}$$

подразумевает справедливость другого. Функции $F_c(\xi)$ и $f(x)$ называют *косинус-преобразованиями Фурье* друг для друга.

Теперь мы покажем, как соотношения (3.6) и (3.7) можно формально применить к задаче, поставленной в § 2 настоящей главы, т. е. для решения уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t>0, \tag{3.14}$$

при

$$v=f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t=0. \tag{3.15}$$

Отметим, что функция

$$\exp(-i\xi x-\varkappa\xi^2 t) \tag{3.16}$$

удовлетворяет уравнению (3.14) при любых значениях ξ. Примем, что общее решение (3.14) и (3.15) записывается в виде

$$v(x, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\xi x-\varkappa\xi^2 t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{3.17}$$

При $t=0$ получим

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\xi x)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Поэтому, согласно выражению (3.6),

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\xi x')\,f(x')\,dx'.$$

Подставляя его в (3.17), получим

$$v(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\varkappa\xi^2 t-i\xi x)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}(\exp i\xi x')\,f(x')\,dx'=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\,dx'\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\varkappa\xi^2 t-i\xi(x-x')]\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]dx'.$$

Конечно, для обеспечения строгости нашего анализа необходимо провести дальнейшие рассуждения. В книге Титчмарша [7] рассматривается случай, когда $f(x)$ является экспоненциальной функцией.

§ 4. Полуограниченное тело с начальной температурой $f(x)$ и нулевой температурой поверхности

Пусть твердое тело ограничено плоскостью $x=0$ и простирается до бесконечности в положительном направлении оси x, причем его начальная температура задана соотношением $v=f(x)$, а плоскость $x=0$ поддерживается при нулевой температуре. Решение такой задачи можно получить из решения, найденного для неограниченного твердого тела.

Пусть исследуемое тело продолжено в отрицательном направлении оси x и пусть его начальная температура в точке $-x'$ $(x'>0)$ равна $-f(x')$, а начальная температура в точке x' равна $f(x')$. При таком распределении температур температура плоскости $x=0$ остается равной нулю. Тогда из соотношения (2.1) получим

$$v=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\left\{\int\limits_0^\infty f(x')\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]dx'+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{-\infty}^0[-f(-x')]\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]dx'\right\}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int\limits_0^\infty f(x')\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa t}\right]\right\}dx'. \quad (4.1)$$

Ясно, что эта величина v удовлетворяет всем условиям задачи о полуограниченном твердом теле, ограничивающая плоскость которого поддерживается при нулевой температуре.

Выражение (4.1) для температуры можно преобразовать, как и в § 2, следующим образом:

$$v=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dx'\int\limits_0^\infty f(x')\left[\cos\alpha(x'-x)-\cos\alpha(x'+x)\right]e^{-\varkappa\alpha^2t}\,d\alpha=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dx'\int\limits_0^\infty f(x')\sin\alpha x'\sin\alpha x e^{-\varkappa\alpha^2t}\,d\alpha, \quad (4.2)$$

т. е. в форму, подсказываемую соотношением (3.8). Так же как и в § 3 (неограниченное тело), этот результат легко получить и в данном случае, используя синус-преобразования Фурье (3.9) и (3.10).

Если начальная температура постоянна и равна V, то соотношение (4.1) можно упростить, подставляя $x'=x+2\xi\sqrt{\varkappa t}$ в первую его часть, $x'=-x+2\xi\sqrt{\varkappa t}$ — во вторую. Тогда мы получим

$$v=\frac{V}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\frac{x}{\sqrt{\varkappa t}}}e^{-\xi^2}d\xi=\frac{2V}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}e^{-\xi^2}d\xi.$$

Этот интеграл совпадает с (1.3) данной главы, и поэтому решение задачи о полуограниченном твердом теле, поверхность которого поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура равна V, имеет вид

$$v=V\Phi\left\{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right\}. \quad (4.3)$$

Полученный результат можно вывести непосредственно из выражения (1.3), так как из свойств функции ошибок следует, что она удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению, а также начальным и граничным условиям.

Важно отметить, что в этом случае, т. е. в случае постоянной начальной температуры и нулевой температуры поверхности, полученный результат (4.3)

зависит только от одного безразмерного параметра

$$\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}. \qquad (4.4)$$

Это позволяет легко сравнивать температуры в различные моменты времени и в различных точках твердых тел, обладающих различной температуропроводностью. Аналогичные результаты справедливы и для часто встречающихся величин скорости охлаждения и градиента температуры в любой точке.

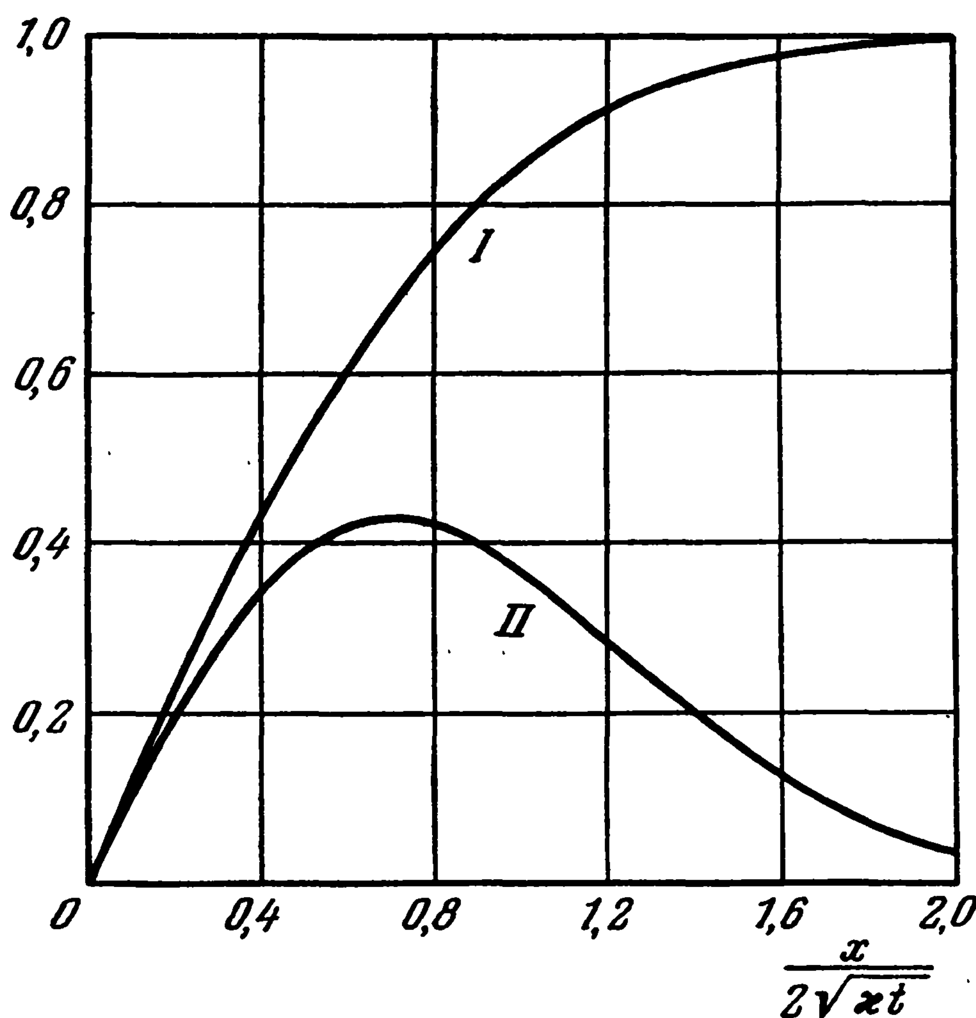


Рис. 5. Графики функции $\Phi\,[x/2\sqrt{\varkappa t}]$ (кривая I) и функции $[x/2\sqrt{\varkappa t}]\exp\,[-x^2/4\varkappa t]$ (кривая II).

Скорость охлаждения в любой точке записывается в виде

$$-\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{Vx}{2\sqrt{\pi\varkappa t^3}}\,e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}. \qquad (4.5)$$

Температурный градиент в любой точке — в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{V}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}. \qquad (4.6)$$

Переходя к параметру $\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$, получим

$$\frac{v}{V}=\Phi\,\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}, \qquad (4.7)$$

$$-\frac{t\sqrt{\pi}}{V}\,\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{x\sqrt{\pi}}{2V}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}. \qquad (4.8)$$

Численные значения этих величин приведены в приложении 2; кроме того, они показаны в виде кривых I и II на рис. 5. Кривая II имеет максимум, равный

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{1}{2}}=0{,}4288 \quad \text{при} \quad \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (4.9)$$

Из соотношения (4.7) следует, что для любого вещества время, необходимое для достижения заданной температуры в какой-либо точке тела, пропорционально квадрату расстояния этой точки от поверхности тела. Кроме того, время, необходимое для достижения в данной точке заданной температуры, обратно пропорционально температуропроводности.

Например, из рис. 5 или из таблицы приложения 2 следует, что

$$v=\frac{1}{2}V \quad \text{при} \quad \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}=0{,}477.$$

В серебре, для которого $\varkappa=1{,}72$, температура достигает указанной величины на глубине 1 *см* через 0,64 *сек*; в висмуте, для которого $\varkappa=0{,}07$, это произойдет через 15,7 *сек*, а в грунте, для которого $\varkappa=0{,}0047$, — через 234 *сек*. Для глубины 10 *см* соответствующие промежутки времени окажутся в 100 раз больше.

Наконец, мы приведем некоторые результаты, имеющие большое значение для практики. Их легко получить из соотношения (4.1).

1. Если на границе $x = 0$ поддерживается постоянная температура V, а начальная температура равна нулю, то

$$v = V\left\{1 - \Phi\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right\} = V\Phi^*\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}. \quad (4.10)$$

Это легко получить, вычтя из $v = V$ при $x > 0$, $t > 0$, которое является решением дифференциального уравнения теплопроводности, решение (4.3) для начальной температуры V и нулевой температуры поверхности.

Тепловой поток на поверхности равен

$$-K\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0} = \frac{KV}{\sqrt{\pi\varkappa t}}, \quad (4.11)$$

причем при $t \to 0$ это выражение стремится к бесконечности.

2. Если в начальный момент времени область $x > 0$ имеет постоянную температуру V, а область $x < 0$ — нулевую температуру, то

$$v = \frac{1}{2}V\left\{1 + \Phi\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right\}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.12)$$

3. Если в начальный момент времени область $x > 0$ имеет температуру $V + kx$, а плоскость $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре, то

$$v = V\Phi\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + kx. \quad (4.13)$$

4. Если в начальный момент времени область $0 < x < d$ имеет постоянную температуру V, а область $x > d$ — нулевую температуру, причем для $t > 0$ поверхность $x = 0$ сохраняет нулевую температуру, то

$$v = \frac{1}{2}V\left\{2\Phi\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}} - \Phi\frac{x-d}{2(\varkappa t)^{1/2}} - \Phi\frac{x+d}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right\}. \quad (4.14)$$

5. Если в начальный момент времени область $a < x < b$ имеет постоянную температуру V, а области $0 < x < a$ и $x > b$ — нулевую температуру, причем для $t > 0$ поверхность $x = 0$ сохраняет нулевую температуру, то

$$v = \frac{1}{2}V\left\{\Phi\frac{x-a}{2(\varkappa t)^{1/2}} + \Phi\frac{x+a}{2(\varkappa t)^{1/2}} - \Phi\frac{x-b}{2(\varkappa t)^{1/2}} - \Phi\frac{x+b}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right\}. \quad (4.15)$$

§ 5. Полуограниченное твердое тело. Начальная температура равна нулю. Поверхность находится при температуре $\varphi(t)$

Выше мы видели (см. § 14 гл. I), что из решения для случая постоянной температуры поверхности можно, пользуясь теоремой Дюамеля, получить решение и для случая переменной температуры поверхности.

Для полуограниченного твердого тела, когда v должно удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$v = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

и

$$v = 1 \quad \text{при} \quad x = 0$$

решение (4.10) принимает вид

$$v = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-\xi^2}d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi.$$

Если же

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$v = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

и

$$v = \varphi(t) \quad \text{при} \quad x = 0,$$

то из соотношения (14.10) гл. I следует, что решение имеет вид

$$v = \int_0^t \varphi(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} F(x, t-\lambda)\, d\lambda,$$

где

$$F(x, t-\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa(t-\lambda)}}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

В этом случае

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x, t-\lambda) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa(t-\lambda)}\right] \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa(t-\lambda)}}\right] =$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-\lambda)^3}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa(t-\lambda)}\right].$$

Следовательно, решение нашей задачи записывается следующим образом:

$$v = \frac{x}{2\sqrt{\pi\varkappa}} \int_0^t \varphi(\lambda) \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa(t-\lambda)}\right]}{(t-\lambda)^{3/2}}\, d\lambda.$$

Положив

$$\frac{x}{2\sqrt{\varkappa(t-\lambda)}} = \mu,$$

получим

$$t - \lambda = \frac{x^2}{4\varkappa\mu^2}$$

и

$$v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\varkappa\mu^2}\right) e^{-\mu^2}\, d\mu. \tag{5.1}$$

Отсюда ясно, что наше решение удовлетворяет дифференциальному уравнению, а также начальным и граничным условиям.

Ниже приводятся некоторые специальные случаи, представляющие практический интерес *).

1. $\varphi(t) = V_0$ (постоянная) при $0 < t < T$, $\varphi(t) = V_1$ (постоянная) при $t > T$,

$$v = V_0 \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right), \quad 0 < t < T. \tag{5.2}$$

$$v = V_0 \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + (V_1 - V_0)\, \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa(t-T)}}\right), \quad t > T. \tag{5.3}$$

*) Эти результаты проще всего получить при помощи преобразования Лапласа (см. § 4 гл. XII).

2. $\varphi(t) = kt$, где k — постоянная *)

$$v = kt\left\{\left(1+\frac{x^2}{2\varkappa t}\right)\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - \frac{x}{\sqrt{\pi\varkappa t}}e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}\right\}, \tag{5.4}$$

т. е.

$$v = 4kt\,\mathrm{i}^2\,\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \tag{5.5}$$

Обозначения, используемые в соотношениях (5.5), (5.7) и (5.8), см. в приложении 2.

3. $\varphi(t) = kt^{1/2}$, где k — постоянная.

$$v = kt^{1/2}\left\{e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}} - \frac{x\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\varkappa t}}\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\}, \tag{5.6}$$

т. е.

$$v = k(\pi t)^{1/2}\,\mathrm{i}\,\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \tag{5.7}$$

Как будет показано в § 9 настоящей главы, приведенное выражение соответствует температуре поверхности при постоянном тепловом потоке с этой поверхности.

4. $\varphi(t) = kt^{\frac{1}{2}n}$, где n — любое положительное целое число (четное или нечетное).

$$v = k\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)(4t)^{\frac{1}{2}n}\,\mathrm{i}^n\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \tag{5.8}$$

При использовании выражения (5.8) температуру на любой глубине для случая, когда температура поверхности является полиномом от t или от $t^{1/2}$, можно записать в виде табулированных функций. Следует отметить, что полиномом от $t^{1/2}$ можно пользоваться при эмпирическом представлении наблюдаемой температуры поверхности, так как член, содержащий $t^{1/2}$, соответствует постоянному тепловому потоку с поверхности (см. § 9 данной главы).

5. $\varphi(t) = e^{\lambda t}$, где λ — постоянная (положительная или отрицательная).

$$v = \frac{1}{2}e^{\lambda t}\left\{e^{-x\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}}\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} - \sqrt{\lambda t}\right] + e^{x\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}}\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + \sqrt{\lambda t}\right]\right\}. \tag{5.9}$$

Функции ошибок с комплексным аргументом, используемым в очень важном случае отрицательной λ, были совсем недавно затабулированы (см. приложение 2). Решение для положительных значений λ используется в гл. IV.

Мы можем решить задачу о полуограниченном твердом теле с начальной температурой $f(x)$ и температурой поверхности $\varphi(t)$, положив

$$v = u + w.$$

Здесь u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

при условии

$$u = 0 \text{ в начальный момент},$$

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad x = 0,$$

а w — уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

*) Линейное увеличение температуры поверхности представляет большой интерес для некоторых практических приложений (см. [12, 13]).

при условии

$$w = f(x) \text{ в начальный момент,}$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Иными словами, u служит решением задачи, рассмотренной выше, а w — решением задачи, приведенной в § 4 данной главы.

§ 6. Полуограниченное твердое тело. Температура поверхности является гармонической функцией времени

Задачи о теплопроводности твердого тела с периодически изменяющейся температурой на поверхности представляют весьма большой практический интерес. Подобные задачи встречаются в следующих случаях: а) при исследовании колебаний температуры коры Земли, периодически нагреваемой Солнцем (см. § 12 настоящей главы); б) при работе на различных экспериментальных установках для определения температуропроводности (см. § 12 настоящей главы, а также §§ 4 и 8 гл. IV); в) при вычислении периодически изменяющихся температур (а следовательно, и соответствующих термических напряжений) в стенках цилиндров паровых машин [14, 15] и двигателей внутреннего сгорания и, наконец, г) в теории автоматических систем регулировки температуры.

Если температура на поверхности полуограниченного тела $x > 0$ задается выражением $v = A\cos(\omega t - \varepsilon)$, а начальная температура равна нулю, то из (5.1) следует, что наше решение запишется в виде

$$v = \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x^2}{4\varkappa\mu^2}\right) - \varepsilon\right\} e^{-\mu^2}\, d\mu. \tag{6.1}$$

Как мы знаем,

$$\frac{2}{\pi^{1/2}} \int\limits_0^{\infty} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x^2}{4\varkappa\mu^2} - \varepsilon\right)\right\} e^{-\mu^2}\, d\mu =$$
$$= \exp\left[-x\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \cos\left\{\omega t - x\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon\right\},$$

и поэтому (6.1) можно записать в следующей форме:

$$v = A\exp\left[-x\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}\right] \cos\left\{\omega t - x\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2} - \varepsilon\right\} -$$
$$- \frac{2A}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int\limits_0^{\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x^2}{4\varkappa\mu^2}\right) - \varepsilon\right\} e^{-\mu}\, d\mu. \tag{6.2}$$

Второй член в правой части соотношения (6.2) соответствует нестационарному возмущению *), обусловленному началом колебаний температуры поверхности в момент времени $t = 0$; при достаточно большом t этот член

*) В § 7 гл. XII приведена другая форма. Если начальная температура твердого тела равна не нулю, а $f(x)$, то в соотношение (6.1) нужно добавить член, соответствующий решению задачи о полуограниченном твердом теле при заданной начальной температуре и нулевой температуре на поверхности (см. § 4 данной главы); при достаточно больших t этот член также должен становиться пренебрежимо малым.

исчезает. Оставшийся первый член соответствует установившимся колебаниям с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Прежде чем приступить к дальнейшему обсуждению, приведем другой вывод [16, 17], в котором мы будем исходить из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{6.3}$$

Будем искать решение уравнения (6.3) в виде

$$v = ue^{i(\omega t - \varepsilon)}, \tag{6.4}$$

где u — функция только x. Это решение должно иметь период, равный $2\pi/\omega$. Подставляя (6.4) в (6.3), мы находим, что u должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{i\omega}{\varkappa} u. \tag{6.5}$$

Уравнение (6.5) имеет следующее решение, ограниченное при $x \to \infty$:

$$u = A\exp\left[-x\sqrt{\frac{i\omega}{\varkappa}}\right] = A\exp\left[-x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}}\right].$$

Таким образом, решения уравнения (6.4) с периодом $2\pi/\omega$ запишутся в виде

$$v = Ae^{-k^*x}\cos(\omega t - \varepsilon - k^*x) \tag{6.6}$$

или

$$v = Ae^{-k^*x}\sin(\omega t - \varepsilon - k^*x),$$

где

$$k^* = \left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{6.7}$$

решение, которое при $x = 0$ соответствует величине $A\cos(\omega t - \varepsilon)$, имеет вид

$$v = Ae^{-k^*x}\cos(\omega t - k^*x - \varepsilon). \tag{6.8}$$

Соотношение (6.8) представляет температурную волну с волновым числом k^* и длиной волны λ, которая определяется выражением

$$\lambda = \frac{2\pi}{k^*} = \left(\frac{4\pi k}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6.9}$$

где n — частота, равная $\frac{\omega}{2\pi}$.

Для типичных горных пород, для которых $\varkappa = 0{,}01$, длина волны приблизительно равна 2,7 *см* при частоте 1 колебание в 1 *мин*, 1 *м* при 1 колебании в 1 день и 20 *м* при 1 колебании в 1 год. Для металлических проводников, для которых $\varkappa = 1$, длина волны равна 3,5 *см* при 1 колебании в 1 *сек* и 27 *см* при 1 колебании в 1 *мин*, а для металлов при температуре, близкой к абсолютному нулю, для которых $\varkappa$ равно по порядку величины 10^4, длина волны равна 11 *см* при 1000 колебаниях в 1 *сек*. Эти данные очень важны для измерений методами, основанными на периодическом нагреве. Обычно наблюдения проводят на расстоянии порядка длины волны, что и определяет требуемую частоту. Использование области звуковых частот для металлов при очень низких температурах привело в последнее время к значительному развитию этих методов [18].

Перечислим важнейшие свойства периодической функции температуры в установившемся режиме.

1. Амплитуда колебаний температуры уменьшается по закону

$$e^{-k^*x} = e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}}} = e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \tag{6.10}$$

и, следовательно, падает тем быстрее, чем больше ω. Если на поверхности тела задать температуру в виде ряда Фурье (см. (6.17)), то по мере перемещения внутрь тела более высокие гармоники исчезают чрезвычайно быстро. На расстоянии одной длины волны амплитуда уменьшается в $\exp[-2\pi] = 0{,}0019$ раз и, значит, волны очень быстро затухают. Отсюда следует, что для полуограниченного тела данное решение можно использовать для проводника, толщина которого составляет одну или две длины волны.

Рис. 6. Изменение температур на различных глубинах тела при температуре поверхности, являющейся гармонической функцией времени.

2. Фаза температурной волны запаздывает по закону

$$k^*x = x\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.11}$$

Это запаздывание увеличивается с возрастанием ω.

3. Температурные колебания (например, положение максимума и минимума температуры) распространяются внутри твердого тела со скоростью

$$(2\varkappa\omega)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.12}$$

Из выражений (6.10), (6.11) и (6.12) следует, что для определения температуропроводности $\varkappa$ достаточно измерить амплитуды или фазы волны на расстоянии x или скорость распространения волны.

Тепловой поток F на поверхности исследуемого тела равен следующей величине:

$$F = -K\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0} = 2^{\frac{1}{2}} k^* K A \cos\left(\omega t - \varepsilon + \frac{1}{4}\pi\right). \tag{6.13}$$

Таким образом, в установившемся режиме температура в полуограниченном твердом теле, которое нагревается в результате поступления на его поверхность $x = 0$ периодически изменяющегося теплового потока $F_0 \cos(\omega t - \varepsilon)$, выражается в виде

$$v = \frac{F_0}{Kk^*\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - k^*x - \varepsilon - \frac{1}{4}\pi\right). \tag{6.14}$$

Амплитуда данной функции содержит термические параметры в комбинации $K\rho c$, что позволяет измерить эту величину.

В соотношение (6.8) входят безразмерные параметры

$$\xi = x\sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}} \quad \text{и} \quad \tau = \omega t. \tag{6.15}$$

Следовательно, если мы выберем начальный момени временн так, чтобы $\varepsilon = 0$, то соотношение (6.8) можно записать в виде

$$f(\xi, \tau) = e^{-\xi}\cos(\tau - \xi). \tag{6.16}$$

На рис. 6 приведен график зависимости $f(\xi, \tau)$ от τ для величин ξ, равных 0, $\frac{\pi}{8}, \ldots, \frac{6\pi}{8}$. По мере возрастания ξ увеличивается как отставание по фазе, так и затухание амплитуды, что отмечалось уже выше.

На рис. 7 представлен график зависимости $f(\xi, \tau)$ от ξ для величин τ, равных 0, $\frac{\pi}{8}, \ldots, \pi$. Эти кривые показывают распределение температур по глубине тела в различные моменты времени. Семейства кривых, аналогичных указанным на рис. 6 и 7, часто получаются как результаты экспериментов (см. ссылки в § 12 настоящей главы).

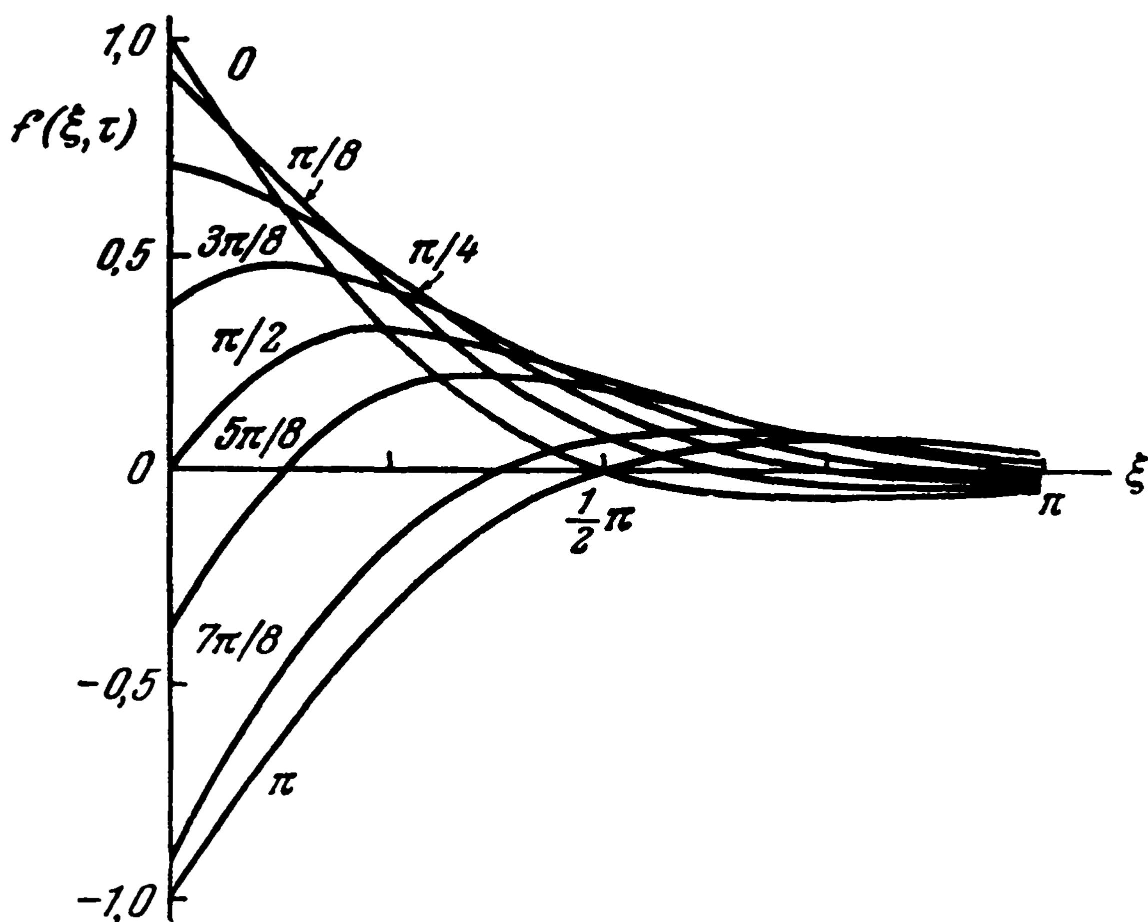


Рис. 7. Распределение температур по глубине тела в различные моменты при температуре поверхности, являющейся гармонической функцией времени.

Если температура поверхности является периодической функцией времени $\varphi(t)$ с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, то мы можем получить решение нашего уравнения, разлагая эту функцию в ряд Фурье:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1\cos(\omega t - \varepsilon_1) + A_2\cos(2\omega t - \varepsilon_2) + \ldots \tag{6.17}$$

Используя формулу (6.8), получим решение в виде

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-x\sqrt{\frac{n\omega}{2\varkappa}}} \cos\left\{n\omega t - \varepsilon_n - x\left(\frac{n\omega}{2\varkappa}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{6.18}$$

при условии, что, как и раньше, $\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$ мало.

В качестве примера рассмотрим случай, когда температура поверхности задается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(t) = V, && 2rT < t < (2r+1)T, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \\ &\varphi(t) = -V, && (2r+1)T < t < (2r+2)T. \end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi t}{T}.$$

Отсюда следует, что при установившемся состоянии периодически изменяющуюся температуру можно записать в виде

$$v=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\exp\left[-x\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2\varkappa T}}\right]\sin\times$$
$$\times\left[\frac{(2n+1)\pi t}{T}-x\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2\varkappa T}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (6.20)$$

На рис. 8 представлен график зависимости v/V от t для величин $x\sqrt{\frac{\pi}{2\varkappa T}}$, равных 0; 0,5; 1,0; 2,0. На графике ясно видно, как по мере продвижения в глубь твердого тела более высокие гармоники исчезают и «прямоугольная» волна постепенно становится синусоидальной.

Рис. 8. Изменение температур на различных глубинах тела при температуре поверхности, описываемой «прямоугольной» волной.

Наконец, можно указать на аналогию с теорией передающих линий. Для общности мы рассмотрим стержень с сечением Ω при отсутствии потерь тепла с боковой поверхности *). В этом случае температура v и тепловой поток в стержне I должны удовлетворять уравнениям

$$\Omega\rho c\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial I}{\partial x},\qquad I=-K\Omega\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (6.21)$$

Эти уравнения совершенно идентичны уравнениям, которым удовлетворяют потенциал v и ток I в передающей линии с последовательным сопротивлением $\frac{1}{K\Omega}$ и параллельным емкостным сопротивлением $\Omega\rho c$ на единицу длины, а также в линии с нулевой индуктивностью и неидеальной изоляцией («подводный кабель»).

Теория такой линии в установившемся периодическом режиме хорошо известна и ею можно сразу же воспользоваться. Это означает, что усложненную термическую схему можно описать методами теории электрических цепей. При выбранных нами обозначениях **) последовательный импеданс на единицу длины линии запишется в виде $Z=\frac{1}{\Omega K}$, а шунтирующий адмиттанс — в виде $Y=i\omega\Omega\rho c$. Характеристический импеданс линии Z_0 задается соотношением

$$Z_0=\left[\frac{Z}{Y}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\Omega(iK\omega\rho c)^{1/2}}=\frac{1}{\Omega k^{*}K(1+i)}, \qquad (6.22)$$

а постоянная распространения γ — соотношением

$$\gamma=(YZ)^{\frac{1}{2}}=k^{*}(1+i). \qquad (6.23)$$

Величины I и v в любой точке полуограниченной линии получаются из выражений

$$I=\frac{v}{Z_0},\qquad v=e^{-\gamma x}. \qquad (6.24)$$

*) Случай, когда имеет место теплопередача с поверхности, пропорциональная температуре, аналогичен случаю утечки в подводном кабеле.

**) См. любую работу по теории электрических цепей, например книгу Слейтера [19].

Эти результаты совпадают с полученными нами ранее (см. (6.8) и (6.13)). Данный метод был очень подробно разработан Маркусом [20], который использовал методы, развитые в теории волноводов, для исследования влияния изменения поперечного сечения проводника на температурную волну.

§ 7. Полуограниченное твердое тело. Теплообмен на поверхности в среду с нулевой температурой. Начальная температура постоянна *)

Когда начальная температура постоянна и равна V, уравнения для v имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$v=V \quad \text{при} \quad t=0,$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}+hv=0 \quad \text{при} \quad x=0.$$

Пусть

$$\varphi=v-\frac{1}{h}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

$$\varphi=V \quad \text{при} \quad t=0,$$

$$\varphi=0 \quad \text{при} \quad x=0.$$

Поэтому на основании соотношения (4.3)

$$\varphi(x,\ t)=\frac{2V}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2}\,du,$$

и мы замечаем, что при $x\to\infty$ функция $\varphi(x,\ t)$ имеет предел V.

Для определения v мы имеем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial x}-hv=-h\varphi(x,\ t).$$

Отсюда, интегрируя это уравнение обычным путем, находим

$$v=Ce^{hx}-he^{hx}\int\limits_{\infty}^{x}\varphi(\xi,\ t)\,e^{-h\xi}\,d\xi.$$

Положив $\xi=x+\eta$, получаем

$$v=Ce^{hx}+h\int\limits_0^{\infty}\varphi(x+\eta,\ t)\,e^{-h\eta}\,d\eta.$$

Однако при $x\to\infty$, $\varphi(x,\ t)$ имеет пределом V и, кроме того, v должно оставаться конечным; поэтому C должно равняться нулю. Следовательно,

---

*) Случай, когда начальная температура является функцией $f(x)$, разобран в § 2 гл. XIV.

решение нашей задачи запишется в виде

$$v = h\int_0^\infty \varphi(x+\eta,\ t)\, e^{-h\eta}\, d\eta = \frac{2Vh}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h\eta}\left[\int_0^{\frac{x+\eta}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2}\, du\right] d\eta.$$

Отсюда

$$v = \frac{2V}{\sqrt{\pi}}\left[-e^{-h\eta}\int_0^{\frac{x+\eta}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2} du\right]_0^\infty + \frac{2V}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-h\eta}\frac{d}{d\eta}\left\{\int_0^{\frac{x+\eta}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2} du\right\} d\eta =$$

$$= \frac{2V}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} \exp(-u^2)\, du + \frac{V}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_0^\infty \exp\left[-h\eta - \frac{(x+\eta)}{4\varkappa t}\right] d\eta =$$

$$= \frac{2V}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} \exp(-u^2)\, du + \frac{V}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\exp[hx + h^2\varkappa t]\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\eta+2h\varkappa t)^2}{4\varkappa t}\right] d\eta.$$

Положим во втором интеграле

$$x + \eta + 2h\varkappa t = 2\sqrt{\varkappa t}\, u,$$

тогда

$$v = \frac{2V}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} \exp(-u^2)\, du + \frac{2V}{\sqrt{\pi}}\exp(hx + h^2\varkappa t)\int_{\frac{x+2h\varkappa t}{2\sqrt{\varkappa t}}}^\infty \exp(-u^2)\, du =$$

$$= \frac{2V}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2} du + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} e^{(hx+h^2\varkappa t)}\left\{\int_0^\infty e^{-u^2} du - \int_0^{\frac{x+2h\varkappa t}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2} du\right\}.$$

Поэтому

$$\frac{v}{V} = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + \exp(hx + h^2\varkappa t)\, \Phi^*\left\{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + h\sqrt{\varkappa t}\right\}, \tag{7.1}$$

где $\Phi(x)$ и $\Phi^*(x)$ — интегралы, определенные в приложении 2.

Температура на поверхности твердого тела v_n, которую можно получить, положив $x = 0$ в соотношении (7.1), записывается в виде

$$\frac{v_{п}}{V} = e^{h^2\varkappa t}\, \Phi^*\left(h\sqrt{\varkappa t}\right). \tag{7.2}$$

В приложении 2 приведена краткая таблица значений этой функции. Для больших значений времен величина $v_{п}/V$ определяется, согласно выражению (5) приложения 2, по приближенной формуле

$$\frac{v_{п}}{V} = \frac{1}{h\sqrt{\pi\varkappa t}}\left\{1 - \frac{1}{2h^2\varkappa t} + \frac{3}{4h^4\varkappa^2 t^2} - \ldots\right\}. \tag{7.3}$$

Таким образом, по истечении значительного времени после начала охлаждения температуру поверхности можно считать равной

$$\frac{V}{h\sqrt{\pi\varkappa t}}, \tag{7.4}$$

с ошибкой, меньшей, чем $V/2h^3(\pi\varkappa^3 t^3)^{1/2}$.

Для задачи о *полуограниченном твердом теле с нулевой начальной температурой, которое нагревается вследствие теплообмена на границе $x=0$ со средой, имеющей температуру V*, решение записывается в виде

$$\frac{v}{V}=\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)-e^{(hx+h^2\varkappa t)}\Phi^*\left\{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right\}. \tag{7.5}$$

Это решение можно выразить в виде функции любых двух из следующих безразмерных параметров:

$$\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}},\quad h\sqrt{\varkappa t},\quad hx. \tag{7.6}$$

Любая из выбранных пар обладает своими преимуществами. На рис. 9 представлен график зависимости отношения v/V от $\lg\left[h(\varkappa t)\right)^{1/2}]$ для величин $x/2\sqrt{\varkappa t}$, равных 0; 0,1; ...; 1,5.

В § 9 гл. I отмечалось, что граничные условия третьего рода, характеризующиеся теплообменом на границе, имеют место в различных случаях, а именно при теплоотдаче вследствие вынужденной конвекции или излучения, а также при теплопередаче через тонкую поверхностную пленку. В первых двух случаях величины h можно получить из формул, аналогичных приведенным в § 9 гл. I, и тогда температуру полуограниченного твердого тела в любой его точке и в любой момент времени можно найти из соотношения (7.5).

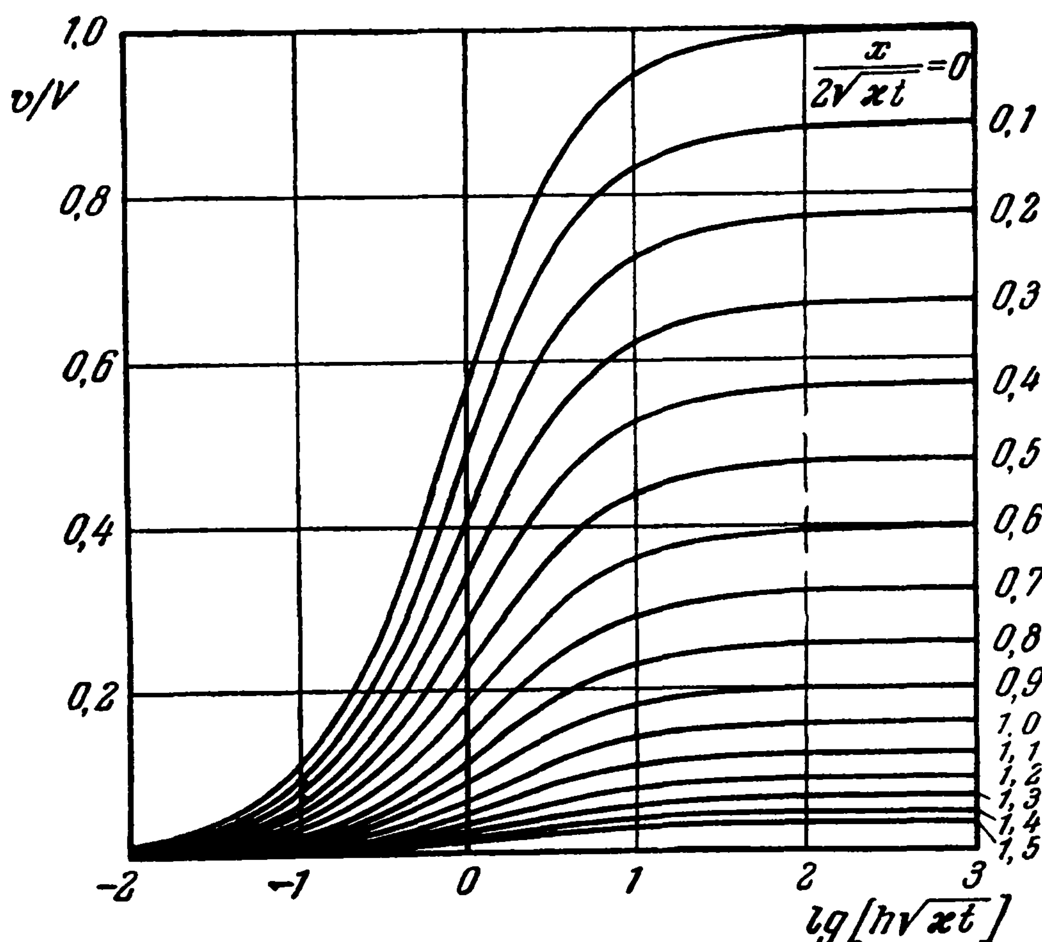


Рис. 9. Распределение температур в полуограниченном твердом теле при теплообмене на его поверхности.

Представляет интерес оценить эффект тонкой поверхностной пленки из плохого проводника и сравнить результаты, полученные из соотношения (7.5) для этого случая, с результатами, найденными в предположении, что поверхность $x=0$ поддерживается при температуре V при всех $t>0$ (см. § 4 настоящей главы). Граничное условие, требующее постоянной температуры на поверхности исследуемого тела, использовалось в теории теплопроводности значительно чаще, чем любое другое граничное условие. Однако на практике оно обычно не выполняется, так как, вообще говоря, при $x=0$ контакт не идеален, и поэтому температура V на этой поверхности устанавливается не мгновенно. Желательно знать, с какими ошибками нам приходится иметь дело в таком случае.

Рассмотрим на твердом теле поверхностные пленки воздуха, вазелина, воды и ртути толщиной 0,001 *см*; величины коэффициента теплообмена H указаны в таблице, приведенной на стр. 28. В качестве твердых тел рассмотрим хороший проводник, серебро ($K=1{,}001$, $\varkappa=1{,}716$), плохой металлический проводник, висмут ($K=0{,}020$, $\varkappa=0{,}0699$) и плохой неметаллический проводник, стекло ($K=0{,}0028$, $\varkappa=0{,}0058$). Пусть $x=1$ *см* во всех трех случаях, а время t выберем равным 0,64 *сек*, 15,7 *сек* и 189 *сек* соответственно; тогда для всех трех твердых тел величина $\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$ равна 0,477, а величина v/V для постоянной температуры поверхности равна 0,5. Ниже приведены величины v/V, найденные по формуле (7.5) для различных поверхностных пленок.

Вещество	Величины v/V					
	постоянная температура, $H=\infty$	воздух, $H=0{,}053$	контакт под небольшим давлением *), $H=0{,}07$	вазелин, $H=0{,}44$	вода, $H=1{,}44$	ртуть, $H=20$
Серебро . . .	0,5	0,022	0,029	0,145	0,295	0,479
Висмут . . .	0,5	0,368	0,394	0,481	0,494	0,500
Стекло . . .	0,5	0,478	0,483	0,497	0,499	0,500

*) См. примечание на стр. 28.

Из этой таблички видно, что в случае хорошего проводника с поверхностной пленкой из плохо проводящего материала влияние пленки оказывается весьма заметным; в случае же плохо проводящего твердого тела влияние поверхностной пленки на результаты становится значительно меньше.

§ 8. Полуограниченное твердое тело. Теплообмен на поверхности в среду с температурой $f(t)$. Начальная температура равна нулю

В этом случае температура v должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}+hv=hf(t) \quad \text{при} \quad x=0,$$

$$v=0 \quad \text{при} \quad t=0.$$

Поступая так же, как и в предыдущем параграфе, положим

$$\varphi=v-\frac{1}{h}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда получим следующие уравнения для определения φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

$$\varphi=f(t) \quad \text{при} \quad x=0,$$

$$\varphi=0 \quad \text{при} \quad t=0.$$

Эти уравнения уже рассматривались в § 5 настоящей главы, и мы видели, что

$$\varphi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} f\left(t-\frac{x^2}{4\varkappa\mu^2}\right)e^{-\mu^2}\,d\mu.$$

Отсюда, так же как и в § 7, имеем

$$v=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-h\eta}\,d\eta\int\limits_{\frac{x+\eta}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} f\left(t-\frac{(x+\eta)^2}{4\varkappa\mu^2}\right)e^{-\mu^2}\,d\mu. \tag{8.1}$$

Представляют интерес следующие специальные случаи.

1. $f(t)=A$ (постоянная), $0<t<T$, $f(t)=B$ (постоянная), $t>T$.

Здесь

$$v = A\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - A\exp(hx + h^2\varkappa t)\,\Phi^*\left\{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + h\sqrt{\varkappa t}\right\}, \quad 0 < t < T, \tag{8.2}$$

$$v = A\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + (B - A)\,\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa(t-T)}}\right) - A\exp(hx + h^2\varkappa t)\,\Phi^*\left\{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + h\sqrt{\varkappa t}\right\} - (B - A)\exp[hx + h^2\varkappa(t-T)]\,\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa(t-T)}} + h\sqrt{\varkappa(t-T)}\right], \quad t > T. \tag{8.3}$$

2. $f(t) = \sin(\omega t + \varepsilon)$.

Здесь

$$v = \frac{h}{\sqrt{(h+\omega')^2 + \omega'^2}}\, e^{-\omega' x}\sin(\omega t + \varepsilon - \omega' x - \delta) + \frac{2\varkappa h}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\omega\cos\varepsilon - \varkappa u^2\sin\varepsilon)(u\cos ux + h\sin ux)}{(\varkappa^2 u^4 + \omega^2)(h^2 + u^2)}\, e^{-\varkappa u^2 t}\, u\, du, \tag{8.4}$$

где $\omega' = \sqrt{\dfrac{\omega}{2\varkappa}}$, а $\delta = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{\omega'}{(h+\omega')}\right]$.

Первый член в соотношении (8.4) представляет собой установившееся периодическое решение и обладает теми же свойствами, что и решение (6.6).

§ 9. Полуограниченное тело. Тепловой поток на границе $x = 0$ является заданной функцией времени. Начальная температура равна нулю

1. *Тепловой поток* F_0 (*в единицу времени через единицу площади*) *постоянен*. Функция

$$f = -K\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.1}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению для v, т. е.

$$\varkappa\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad x > 0, \qquad t > 0. \tag{9.2}$$

Воспользовавшись соотношением (4.10), мы получим решение уравнения (9.2) при условии

$$f = F_0 \ (\text{постоянная}), \qquad x = 0, \qquad t > 0, \tag{9.3}$$

в виде

$$f = F_0\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \tag{9.4}$$

Таким образом, используя соотношения (9) и (11) из приложения 2, получим из выражения (9.1)

$$v = \frac{F_0}{K}\int_x^\infty \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)dx, \tag{9.5}$$

или

$$v = \frac{2F_0\sqrt{\varkappa t}}{K}\,\mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right), \tag{9.6}$$

или, наконец,

$$v = \frac{2F_0}{K}\left\{\left(\frac{\varkappa t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}} - \frac{x}{2}\,\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\}. \tag{9.7}$$

Таблица значений функций $\mathrm{i}\,\Phi^*(x)$ приведена в приложении 2. Температура при $x = 0$ оказывается равной

$$\frac{2F_0}{K}\left(\frac{\varkappa t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9.8}$$

Граничное условие, характеризуемое постоянным тепловым потоком, представляет значительный практический интерес. Оно встречается при генерировании тепла в результате пропускания электрического тока через плоский нагревательный элемент, при выделении тепла вследствие трения; кроме того, оно приближенно выполняется в ранних фазах процесса нагрева печи или помещения. Это граничное условие имеет также большое значение в задачах диффузии. Процесс охлаждения поверхности Земли после захода Солнца в ясную безветренную ночь [21] весьма похож на процесс отдачи тепла при постоянном потоке тепла (в единицу времени через единицу площади), и, следовательно, выражение (9.8) показывает изменение температуры поверхности Земли после захода Солнца.

Приведенные выше результаты применимы также к области $-\infty < x < \infty$, когда в плоскости $x = 0$ тепловой поток равен $2F_0$. Соответствующие результаты для случая, когда области $x > 0$ и $x < 0$ состоят из различных материалов, будут приведены в § 15 данной главы.

2. *Начальная температура в области $x > 0$ равна нулю. На плоскости $x = 0$ тепловой поток равен $f(t)$.* В данном случае

$$v = \frac{\varkappa^{1/2}}{K\pi^{1/2}} \int\limits_0^t f(t-\tau)\, e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}} \frac{d\tau}{\tau^{1/2}}. \tag{9.9}$$

Это следует из соотношения (9.5) и из теоремы Дюамеля (см. § 14 гл. I).

3. *Начальная температура в области $x > 0$ равна нулю. В течение некоторого времени T на плоскости $x = 0$ тепловой поток поддерживается постоянным и равным F_0. По истечении этого времени поступление тепла прекращается, и граница $x = 0$ термически изолируется.* Если $0 < t < T$, то температура в момент времени t определяется по формулам (9.6) или (9.7); если же $t > T$, то она равна следующей величине:

$$\frac{2F_0\varkappa^{1/2}}{K}\left\{t^{1/2}\mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{x}{2\varkappa^{1/2}t^{1/2}}\right) - (t-T)^{1/2}\,\mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{x}{2\varkappa^{1/2}(t-T)^{1/2}}\right)\right\}. \tag{9.10}$$

Указанная температура будет наблюдаться в опыте, в котором в неограниченную среду погружен плоский электронагревательный элемент, выделяющий в единицу времени через единицу площади количество тепла, равное $2F_0$, и включенный в течение времени T, а затем выключенный.

4. *Начальная температура в области $x > 0$ равна нулю. В течение некоторого времени T на плоскости $x = 0$ тепловой поток *) поддерживается равным $K(\varkappa\pi t)^{1/2}$. По истечении этого времени поступление тепла прекращается и ограничивающая поверхность изолируется.* В момент времени t температура

---

*) Это соответствует количеству тепла, которое должно поступать в единицу времени через единицу площади для того, чтобы поддерживать температуру на поверхности, равной единице (см. (4.11)). Интеграл (9.12) затабулирован в работе [22]. Вопрос о минимальном количестве тепла, которое необходимо для заданного повышения температуры в расчетной точке применительно к методам нагрева, рассмотренным в пунктах 3 и 4, разобран в [23].

на границе $x = 0$ будет равна

$$\left.\begin{aligned} v &= 1, \quad 0 < t < T, \\ v &= \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad t > T. \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

Эта температура совпадает с температурой поверхности полуограниченного твердого тела для случая, когда его граница $x = 0$ в течение некоторого времени T поддерживается при температуре, равной единице, а затем изолируется.

Температуру v для любого x при $t > T$ можно получить из выражения (9.9) в виде определенного интеграла:

$$v = \frac{1}{\pi} \int_0^T \exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\left(\frac{T}{t-T}\right)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2(1+u^2)}{4\varkappa t}\right] \frac{du}{1+u^2}. \tag{9.12}$$

5. *Начальная температура в области $x > 0$ равна нулю. Тепловой поток на плоскости $x = 0$ для $t > 0$ равен* $\sin(\omega t + \varepsilon)$. В данном случае

$$v = \frac{\varkappa^{1/2}}{K\omega^{1/2}} e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}}} \sin\left[\omega t + \varepsilon - \frac{1}{4}\pi - x\sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}}\right] - \\ - \frac{2\varkappa}{K\pi} \int_0^\infty \frac{(\varkappa u^2 \sin\varepsilon - \omega\cos\varepsilon)\cos ux}{\omega^2 + \varkappa^2 u^4} e^{-\varkappa u^2 t}\, du. \tag{9.13}$$

Как и прежде, первый член в правой части (9.13) представляет собой установившееся периодическое решение, а второй — неустановившееся.

6. *Тепловой поток на плоскости $x = 0$ записывается в виде*

$$\left.\begin{aligned} f &= -\left(\frac{1}{\pi}\right) \quad \text{при} \quad \frac{2r\pi}{\omega} < t < \frac{(2r+1)\pi}{\omega}, \\ f &= -\sin\omega t - \left(\frac{1}{\pi}\right) \quad \text{при} \quad \frac{(2r+1)\pi}{\omega} < t < \frac{(2r+2)\pi}{\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

Тогда периодическая компонента температуры для любого x в момент времени t равна следующей величине:

$$-\frac{\varkappa^{1/2}}{2K\omega^{1/2}} e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}}} \sin\left[\omega t - \frac{1}{4}\pi - x\sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}}\right] - \\ - \frac{(2\varkappa)^{1/2}}{\pi K\omega^{1/2}} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-x\sqrt{\frac{n\omega}{\varkappa}}} \sin\left[2n\omega t + \frac{1}{4}\pi - x\sqrt{\frac{n\omega}{\varkappa}}\right]}{n^{1/2}(4n^2-1)}. \tag{9.15}$$

Полученный результат можно рассматривать как некоторое приближение [21] *), описывающее нагревание Солнцем поверхности Земли в равноденствие; первая строка в соотношениях (9.14) соответствует условиям в ночное время, вторая — условиям в дневное время.

7. *Начальная температура в области $x > 0$ равна нулю. При $t > 0$ тепловой поток внутрь твердого тела равен $F_0 t^{\frac{1}{2}n}$, где n может равняться -1, 0 или какому-нибудь положительному целому числу.* В этом случае

$$v = \frac{F_0 \varkappa^{1/2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)}{K} (4t)^{\frac{1}{2}(n+1)}\, \mathrm{i}^{n+1}\Phi^* \frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}. \tag{9.16}$$

*) В работе [24] получены результаты для любых высот и любых времен года. Егер рассмотрел случай, когда поверхность излучает тепло как абсолютно черное тело [25, 26].

Функция $i^n\Phi^n x$ определяется в приложении 2. Температура на поверхности равна

$$\frac{F_0 \varkappa^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)}{K\Gamma\left(\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}\right)} t^{\frac{1}{2}(n+1)}. \qquad (9.17)$$

§ 10. Применение полученных результатов к определению теплопроводности

В математической задаче о полуограниченном теле с начальной температурой, равной нулю, и границей $x=0$, поддерживаемой при единичной температуре, температура в момент времени t, согласно (4.10), записывается в виде

$$v = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \qquad (10.1)$$

Таким образом, из наблюдения температуры в любой точке x_1 в момент времени t_1 можно по таблице функции ошибок (см. приложение 2, табл. 1) определить величину $\frac{x_1}{2\sqrt{\varkappa t_1}}$, а следовательно, и величину $\varkappa$. Трудность использования этого метода заключается в следующем: обычно конец стержня $x=0$ нагревают, омывая его потоком жидкости постоянной температуры; однако эксперименты показали, что он при этом не сразу принимает температуру жидкости. Таким образом, математическое выражение условий эксперимента следует рассматривать только как некоторое приближение [27, 28]. Учитывая приведенные выше соображения (см. стр. 77), можно, по-видимому, считать, что указанное приближение оказывается вполне приемлемым для плохих проводников, но для хороших проводников оно может привести к значительным ошибкам, и в этом случае при организации эксперимента следует принимать специальные меры предосторожности, например значительно увеличивать скорость, с которой жидкость обтекает твердое тело [29].

Было сделано множество попыток избежать подобных трудностей. Кирхгоф и Ганземанн [30, 31] предположили, что температуру при $x=0$ можно представить в виде суммы $C+\varphi(t)$, где C — константа, а $\varphi(t)$ — функция времени, которой можно пренебречь во всех случаях, за исключением случая малых t. Величину C следовало определять из данных о температуре в непосредственной близости от нагреваемой границы, не считая ее равной температуре нагревающей жидкости. В одной из модификаций этого метода предполагалось, что температуру поверхности можно представить в виде $C(1-e^{\alpha t})$, причем α должно быть велико.

В другом методе рассмотрения той же задачи [32—34] исследовалось изменение во времени температуры в двух точках. Действительные условия на границе $x=0$ использовались только для получения решения в удобной математической форме.

Целый ряд математических решений, приведенных в предыдущих разделах, можно использовать в качестве основы для экспериментальных методов измерения температуропроводности. Так, например, если твердое тело нагревается плоской нагревательной спиралью с пренебрежимо малой теплоемкостью или излучением источника с очень высокой температурой, то с некоторым приближением реализуется граничное условие, характеризуемое постоянным тепловым потоком на поверхности. Поэтому можно соответственно преобразовать соотношение (9.6) и найти величину $\varkappa$ из двух результатов измерения температуры. Кроме того, можно преобразовать соотношение (7.5) так, чтобы по двум наблюдаемым температурам определить как h, так и $\varkappa$.

§ 11. Полуограниченное твердое тело, внутри которого находится источник тепла

Для линейного теплового потока дифференциальное уравнение (6.7), приведенное в гл. I, принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{A}{K}. \qquad (11.1)$$

Здесь A — количество тепла, выделяющееся в единице объема в единицу времени, которое, вообще говоря, зависит от x, t и v. Пока мы рассмотрим

только случай, когда A не зависит от v. В этом случае*) для решения уравнения (11.1) пригодны следующие три способа: 1) интегрирование истокообразных решений (см. гл. X и XIV); 2) использование преобразования Лапласа (см. гл. XII); 3) приведение уравнения (11.1) к однородной форме путем замены переменной. Первые два способа являются наиболее сильными. Здесь мы просто кратко проиллюстрируем третий способ и приведем ряд результатов, представляющих интерес в связи с тепловыделением в коре Земли, обусловленным радиоактивным распадом (см. §§ 13 и 14 данной главы). Некоторые дополнительные сведения изложены в § 4 гл. XII и в § 7 гл. XV. Следует отметить, что случаи, когда количество выделяющегося в единицу времени тепла является линейной функцией температуры, можно исследовать методами, приведенными в § 14 гл. I и в § 7 гл. XV.

Решение для случая зависимости количества выделяющегося в единицу времени тепла от времени можно получить, воспользовавшись теоремой Дюамеля (см. § 14 гл. I) для случая, когда это количество не зависит от времени; поэтому вполне достаточно рассмотреть последнее, хотя не так трудно найти точные решения для простых типов зависимости от времени**).

1. В области $x>0$ начальная температура равна $a+bx$. При $t>0$ в единице объема за единицу времени выделяется постоянное количество тепла A_0. Плоскость $x=0$ поддерживается при нулевой температуре. Здесь мы должны решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{A_0}{K}=0, \qquad x>0, \qquad t>0,$$

при условиях

$$v=a+bx \quad \text{при} \quad t=0$$

и

$$v=0 \qquad \text{при} \quad x=0, \quad t>0.$$

Положив

$$v=u-\frac{A_0}{2K}x^2,$$

получим эти уравнения в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial u}{\partial t}=0, \qquad x>0, \qquad t>0,$$

$$u=a+bx+\frac{A_0}{2K}x^2, \qquad t=0$$

и

$$u=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad t>0.$$

Из соотношения (4.1) следует, что

$$u=\left(a+\frac{\varkappa t A_0}{K}+\frac{A_0x^2}{2K}\right)\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)+\frac{A_0 x}{K}\left(\frac{\varkappa t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}+bx$$

и, следовательно,

$$v=\left(a+\frac{\varkappa t A_0}{K}+\frac{A_0x^2}{2K}\right)\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)+\frac{A_0 x}{K}\left(\frac{\varkappa t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}+bx-\frac{A_0x^2}{2K}. \quad (11.2)$$

*) Многочисленные результаты, полученные для полуограниченного твердого тела, пластины, сферы и цилиндра при постоянной скорости выделения тепла и при различных граничных условиях, можно найти в литературе [35—37].

**) Некоторые результаты для случая, когда количество выделяющегося в единицу времени тепла пропорционально $t^{\frac{1}{2}n}$, где $n=-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$, приведены в § 4 гл. XII. См. также [38].

2. *Условия те же, что и в задаче 1, но количество тепла, выделяющегося в единицу времени на единицу объема, равно* $A_0 e^{-\alpha x}$. В данном случае

$$v = bx + \left(a - \frac{A_0}{K\alpha^2}\right)\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + \frac{A_0}{K\alpha^2}\left\{1 - e^{-\alpha x} + \frac{1}{2}\exp(\varkappa\alpha^2 t - \alpha x)\,\Phi^*\left[\alpha\sqrt{\varkappa t} - \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right] - \frac{1}{2}\exp(\varkappa\alpha^2 t + \alpha x)\,\Phi^*\left[\alpha\sqrt{\varkappa t} + \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right]\right\}. \quad (11.3)$$

3. *Условия те же, что и в задаче 1, но тепло выделяется только в слое* *) $0 < x < l$. В данном случае

$$v = \frac{\varkappa A_0 t}{K}\left\{1 - 4\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + 2\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - 2\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\} + bx + a\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) \quad \text{при} \quad 0 < x < l \quad (11.4)$$

и

$$v = \frac{\varkappa A_0 t}{K}\left\{2\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{x-l}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + 2\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{x+l}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - 4\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\} + bx + a\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) \quad \text{при} \quad x > l. \quad (11.5)$$

Температурный градиент на поверхности $x = 0$ равен следующей величине:

$$b + \frac{a}{\sqrt{\pi\varkappa t}} + \frac{2A_0\sqrt{\varkappa t}}{K}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{l}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right)\right\}. \quad (11.6)$$

При определении температуры в коре Земли нужно помнить, что тепло выделяется только в поверхностном слое толщиной, меньшей чем 50 *км*, и следовательно, в (11.5) l мало по сравнению с $2\sqrt{\varkappa t}$. Поэтому, воспользовавшись теоремой Тейлора, мы можем разложить выражение (11.5) по степеням l. Тогда для температуры в слоях, расположенных ниже радиоактивного слоя [39], получим **)

$$v = bx + a\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + \frac{A_0 l^2}{2K}\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right), \qquad x > l. \quad (11.7)$$

Температурный градиент на поверхности приближенно равен

$$b + \frac{a}{\sqrt{\pi\varkappa t}} + \frac{A_0}{K}\left(l - \frac{l^2}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} + \ldots\right). \quad (11.8)$$

4. *В области* $x > 0$ *начальная температура равна нулю. В области* $0 < x < l$ *при* $t > 0$ *в единице объема за единицу времени выделяется постоянное количество тепла* A_0. *На поверхности* $x = 0$ *тепловой поток отсутствует.* В данном случае

$$v = \frac{\varkappa A_0 t}{K}\left\{1 - 2\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - 2\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\}, \quad 0 < x < l, \quad (11.9)$$

$$v = \frac{2\varkappa A_0 t}{K}\left\{\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{x-l}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - \mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{x+l}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\}, \quad x > l. \quad (11.10)$$

Это также является решением для случая неограниченного твердого тела, в котором тепло выделяется в полосе толщиной $2l$.

5. *В области* $x > 0$ *начальная температура и температура на поверхности равны нулю. В области* $a < x < b$ *при* $t > 0$ *количество тепла, выделяющегося*

*) Случай, когда области $0 < x < l$ и $x > l$ имеют различные термические константы, рассмотрен в § 8 гл. XII.

**) Распространение полученных результатов для случая, когда термические константы изменяются с глубиной, проведено в работах [40, 41].

в единице объема за единицу времени, равно постоянной величине A_0. Температурный градиент *) на поверхности равен

$$\frac{2A_0(\varkappa t)^{1/2}}{K}\left\{ \mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) - \mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{b}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)\right\}. \qquad (11.11)$$

6. В области $x > 0$ *начальная температура равна нулю, а количество тепла, выделяющегося в единицу времени в единице объема, равно* $A_0 e^{-\lambda t}$. *При* $t > 0$ *граница* $x = 0$ *поддерживается при нулевой температуре.* В данном случае

$$v = \frac{A_0}{\rho c\lambda}\Phi\left(\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) - \frac{A_0}{\rho c\lambda}e^{-\lambda t}\left\{1 - \mathrm{Re}\, e^{-ix\sqrt{\lambda/\varkappa}}\,\Phi^*\left[\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}} - \mathrm{i}(\lambda t)^{1/2}\right]\right\}, \qquad (11.12)$$

где символ Re означает, что берется действительная часть соответствующей функции. Вопрос о функции ошибок комплексного аргумента рассматривается в приложении 2.

7. В области $x > 0$ *начальная температура равна* $a + bx$. *При* $t > 0$ *в единицу времени выделяется количество тепла, равное* $A_0 e^{-\alpha x}$. *На поверхности* $x = 0$ *тепловой поток отсутствует* **) [43, 44]. В данном случае

$$v = a + bx + \left(2b + \frac{2A_0}{K\alpha}\right)(\varkappa t)^{1/2}\,\mathrm{i}\,\Phi^*\left(\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) - \frac{A_0}{\alpha^2 K}e^{-\alpha x} +$$
$$+ \frac{A_0}{2K\alpha^2}\exp(\alpha^2\varkappa t - \alpha x)\,\Phi^*\left[\alpha(\varkappa t)^{1/2} - \frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] +$$
$$+ \frac{A_0}{2K\alpha^2}\exp(\alpha^2\varkappa t + \alpha x)\,\Phi^*\left[\alpha(\varkappa t)^{1/2} + \frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]. \qquad (11.13)$$

§ 12. Температура Земли и колебания температуры на ее поверхности

Измерения температуры Земли вблизи ее поверхности производились в течение многих лет на многочисленных метеорологических станциях, расположенных в различных частях света. Полученные результаты показали, что колебания температуры поверхности, вызываемые нагреванием в течение дня и охлаждением в течение ночи, не влияют на температуру Земли на глубине, превышающей 0,9—1,2 *м*, тогда как годовые изменения, обусловленные охлаждением зимой и нагреванием летом, можно наблюдать на глубине, достигающей 18—21 *м*. На бóльших глубинах температура остается практически постоянной и не зависит от перемен, происходящих на поверхности Земли. Другими словами, тепловые волны, вызываемые изменением температуры поверхности, затухают на глубине 18—21 *м*, и колебания температуры наблюдаются только в самом верхнем слое земной коры.

Ряд ученых, начиная с Фурье и Пуассона, использовал периодические колебания температуры Земли вблизи поверхности для определения теплопроводности горных пород. Приняв поверхность Земли за плоскость $x = 0$ с периодически изменяющейся температурой

$$v = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n\cos(n\omega t - \varepsilon_n), \qquad (12.1)$$

получим, воспользовавшись (6.18), что температура на глубине x имеет вид

$$v = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n e^{-k^* x\sqrt{n}}\cos(n\omega t - \varepsilon_n - k^* x n^{1/2}), \qquad (12.2)$$

*) В работе [42] рассмотрен случай области малой толщины.

**) Эта задача возникла в связи с рассмотрением нагрева тела сантиметровыми волнами. См. также [44].

где

$$k^* = \left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}. \tag{12.3}$$

Как отмечалось в § 6 настоящей главы, теория показывает, что каждая отдельная волна распространяется внутрь Земли с неизменным периодом и что амплитуды волн с меньшими периодами уменьшаются значительно быстрее, чем амплитуды волн с бóльшими периодами. Следовательно, периодическое изменение температуры принимает все более и более простую форму по мере продвижения в глубь Земли, причем основная волна с наибольшим периодом достигает наибольшей глубины. Глубина, на которой амплитуда годовых изменений температуры уменьшается в 10 раз, приблизительно в $\sqrt{365} = 19$ раз больше глубины, на которой во столько же раз уменьшается амплитуда суточных изменений температуры. Этот результат согласуется с приведенным выше положением о том, что годовые и суточные изменения температуры заметны лишь до глубин, равных соответственно 18—21 и 0,9—1,2 *м*.

Классическая работа по использованию этих наблюдений принадлежит Кельвину [45], обработавшему данные Форбса, который в течение 18 лет вел в Эдинбурге измерения. По этим данным была составлена средняя годовая температурная кривая и были определены ее гармонические составляющие. Так, для глубин x_1 и x_2 были найдены температуры v_1 и v_2 в виде

$$v_1 = V_0' + \sum_{n=1}^{\infty} V_n' \cos(n\omega t - \varepsilon_n'), \qquad v_2 = V_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} V_n'' \cos(n\omega t - \varepsilon_n''). \tag{12.4}$$

Сравнивая коэффициенты в соотношениях (12.2) и (12.4), получим

$$V_0' = V_0'' = V_0, \qquad V_n' = V_n e^{-k^* x_1 \sqrt{n}}, \qquad V_n'' = V_n e^{-k^* x_2 \sqrt{n}},$$

$$\varepsilon_n' = k^* x_1 n^{1/2} + \varepsilon_n, \qquad \varepsilon_n'' = k^* x_2 n^{1/2} + \varepsilon_n.$$

Отсюда

$$\frac{\ln V_n' - \ln V_n''}{x_2 - x_1} = \frac{\varepsilon_n'' - \varepsilon_n'}{x_2 - x_1} = k^* n^{1/2} = \left(\frac{n\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}. \tag{12.5}$$

Из выражения (12.5) следует, что для оценки $\varkappa$ можно воспользоваться как амплитудой, так и фазой любой гармоники. Кельвин нашел, что имеется почти полное соответствие между величинами $\varkappa$, полученными из данных об амплитуде или фазе первой гармоники и, как и следовало ожидать, менее удовлетворительное соответствие при использовании высших гармоник.

Эти методы интересны тем, что они позволяют получить среднюю величину температуропроводности почвенного слоя; однако было установлено, что передача тепла в почве является очень сложным процессом, на который сильно влияет присутствие воды *). Добавление воды к сухому грунту вызывает значительное увеличение теплопроводности; так температуропроводность обычно достигает своей максимальной величины (в 2—3 раза превышающую величину, соответствующую сухому грунту) при влажности 5—10%. В дальнейшем, когда почва периодически прогревается, возникают периодические колебания ее влажности и температуры. По этой причине теория, основанная на предположении о постоянстве температуропроводности, может дать лишь приближенные результаты.

---

*) Этот вопрос хорошо освещен в [46]. Большое количество результатов, полученных для различных почв, приведено в [47]. Вопрос о влиянии перемещения воды в почве рассмотрен в [48].

Теория, изложенная выше, позволяет получить не абсолютные величины, а лишь колебания температуры на различных глубинах в зависимости от изменений температуры на поверхности. Для нахождения абсолютных величин необходимо знать тепловой поток, поступающий от Солнца, и тепловые потери с поверхности Земли; нужно знать также, каким образом происходит поглощение тепла атмосферой. Последнее особенно трудно оценить из-за наличия в атмосфере водяных паров, которые играют доминирующую роль в этом процессе. Однако Бранту [21, 49] удалось получить кривые для безоблачных дней, хорошо согласующиеся с наблюдениями, предположив, что тепловые потери Земли вследствие излучения днем и ночью одинаковы. Следует указать, что количество тепла, получаемого от Солнца в дневное время, пропорционально косинусу зенитного расстояния Солнца. Средняя температура поверхности Земли определяется только солнечным излучением, причем в данном случае поток тепла, поступающий изнутри Земли (см. следующий параграф), можно считать пренебрежимо малым.

§ 13. Геотермический градиент и поток тепла

Уже на ранних этапах развития горной промышленности было известно, что температура Земли повышается с глубиной, причем расстояние по вертикали между точками, в которых температура отличается на 1° С (иногда это расстояние называют *геотермической ступенью*), примерно равно 24 *м*. Иногда в глубоких шахтах температура достигает относительно высоких значений, что приводит к дополнительным трудностям при работе в них.

Множество измерений температур, проведенных в глубоких скважинах, показало, что на суше скорость возрастания температуры с глубиной (так называемый *геотермический градиент*) варьирует в пределах 10—50° С на 1 *км*. Несколько измерений, проведенных на дне океана, показали, что эта величина примерно равна 40° С на 1 *км*. Величины, приведенные выше, а также все указываемые ниже данные относятся к областям, удаленным от зон активной вулканической деятельности. В термически активных зонах и вблизи действующих вулканов наблюдаемые температуры значительно выше. Из приводимых ниже расчетов следует, что эти расхождения обусловлены главным образом разницей в теплопроводности горных пород, и если учитывать ее, то результаты наблюдений *) во всех точках Земли (в том числе на дне океана) совместимы с величиной теплового потока, варьирующей в различных областях от $0{,}6 \cdot 10^{-6}$ до $2 \cdot 10^{-6}$ *кал/см² · сек*, причем средняя его величина примерно равна $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ *кал/см² · сек*. До сих пор не удавалось обнаружить никакого систематического изменения теплового потока с положением.

Для определения теоретической зависимости изменения температуры с глубиной предположим, что теплопроводность K и количество выделяющегося в единицу времени тепла A являются функциями только глубины x. Уравнение установившегося теплового потока записывается в виде

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dv}{dx}\right) = -A. \tag{13.1}$$

---

*) Имеющаяся в настоящее время обширная литература по этому вопросу суммируется в работах [50, 51]. Множество ранних данных о температуре, но не о теплопроводности горных пород приведено в работах [52, 53]. Статьи [54, 55] отражают начало современной практики систематического измерения в буровых скважинах как температур, так и теплопроводностей. В работе [56] приводятся данные об измерениях температур в тоннелях. Эффекты, наблюдаемые в областях вечной мерзлоты, описаны в статьях [57, 58].

Это уравнение примет более простую форму, если мы введем новую переменную

$$\xi = \int_0^x \frac{dx}{K}. \tag{13.2}$$

Так как $R = \frac{1}{K}$ — удельное термическое сопротивление исследуемого твердого тела, то величина ξ является общим термическим сопротивлением твердого тела, ограниченного наружной поверхностью и плоскостью, расположенной на глубине x. Из выражения (13.2) следует, что

$$\frac{dv}{d\xi} = K\frac{dv}{dx}, \tag{13.3}$$

и, таким образом, $\frac{dv}{d\xi}$ служит мерой теплового потока. Подставляя (13.3) в выражение (13.1), получим

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} = -AK. \tag{13.4}$$

1. Случай, когда тепло не выделяется, $A = 0$. Интегрируя выражение (13.4), получим

$$v = V_0 + F\xi,$$

где V_0 и F — постоянные, которые можно считать температурой поверхности и тепловым потоком. Таким образом, при отсутствии источника тепла график зависимости v от ξ имеет вид прямой; поэтому, если наблюдаемые величины температур представляют в таком виде в соответствии с измеренными коэффициентами теплопроводности, то многие кажущиеся аномалии исчезают. Предполагается, что величина V_0, найденная таким же образом, должна совпадать со средним годовым значением температуры воздуха, однако обычно она выше, что приписывают влиянию испарения.

2. В единицу времени через единицу площади в плоскости ξ_1 *поступает количество тепла, равное* Q. В данном случае

$$\left.\begin{aligned} v &= V_0 + F\xi, && 0 < \xi < \xi_1, \\ v &= V_0 + Q\xi_1 + (F - Q)\,\xi, && \xi > \xi_1. \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

Отсюда следует, что внезапное изменение формы графика зависимости v от ξ обусловлено притоком или оттоком тепла на данной глубине (например, при течении воды).

3. Количество выделяющегося в некоторой области тепла постоянно. Это может происходить в трех случаях: а) при переносе тепла грунтовыми водами; б) при радиоактивном распаде; в) при химической реакции вблизи рудного тела. В качестве примера рассмотрим случаи трех слоев, для которых $K = K_1$, $A = 0$ при $0 < x < x_1$; $K = K_2$, $A = A_2$ при $x_1 < x < x_2$ и $K = K_3$, $A = 0$ при $x > x_2$, где K_1, K_2, K_3, A_2 — константы. Тогда

$$\left.\begin{aligned} v &= V_0 + \frac{Fx}{K_1}, \quad 0 < x < x_1, \\ v &= V_0 + \frac{Fx_1}{K_1} + \frac{F(x - x_1)}{K_2} - \frac{A_2(x - x_1)^2}{2K_2}, \quad x_1 < x < x_2, \\ v &= V_0 + \frac{Fx_1}{K_1} + \frac{F(x_2 - x_1)}{K_2} - \frac{A_2(x_2 - x_1)^2}{2K_2} + \\ &\quad + \frac{[F - A_2(x_2 - x_1)](x - x_2)}{K_3}, \quad x > x_2. \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

Из соотношений (13.4) и (13.6) следует, что график зависимости v от ξ вогнут вниз в области, где выделяется тепло. Соотношения типа (13.6), в которых используется известная величина теплового потока на поверхности F и предполагаемое распределение радиоактивности, часто применяются для оценки температур в земной коре.

Это простое рассмотрение значительно изменяется при учете геологических условий, например при наличии эффектов противодавления и денудации (см. § 2 гл. XV), эффектов отклонения от горизонтальной поверхности (см. § 3 гл. XVI), эффектов изменения теплопроводности в поперечном направлении и эффектов изменения темпе-

ратуры на поверхности. В частности, очень заметно выражено влияние последних ледниковых периодов, которое в настоящее время уже тщательно изучено [60]. Простейший случай, из которого вытекает много других, связан с ледниковым периодом, продолжавшимся в течение времени T, причем в этот период поверхность Земли поддерживалась при нулевой температуре, а до и после него температура поверхности была равна V_0. Считая, что ледниковый период закончился в момент времени $t=0$, мы предполагаем, что в момент времени $t=-T$ температура равнялась $v=V_0+Gx$, что соответствовало постоянному геотермическому градиенту G. Отсюда, используя выражения (4.10), мы получим для температуры в момент времени $t>0$ величину

$$v=V_0+Gx+V_0\Phi\left(\frac{x}{2[\varkappa(t+T)]^{1/2}}\right)-V_0\Phi\left(\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right). \qquad (13.7)$$

§ 14. Возраст Земли. Анализ Кельвина

Еще Фурье [60, 61] показал, что, пользуясь измеренной величиной геотермического градиента, можно грубо оценить время, прошедшее с начала остывания Земли, находившейся в расплавленном состоянии. При математическом анализе этой задачи он, ради упрощения, пренебрегал кривизной земной поверхности и считал коэффициент температуропроводности $\varkappa$ постоянной величиной. Поверхность Земли он принимал за плоскость $x=0$ и предполагал, что на этой поверхности происходит теплообмен со средой, температура которой равнялась нулю. В начале охлаждения, т. е. в момент времени $t=0$, он считал температуру постоянной и равной v_0. Фурье нашел, что для больших значений t температурный градиент вблизи поверхности приблизительно равен $v_0(\pi\varkappa t)^{-1/2}$, т. е. получил результат, приведенный в § 7 настоящей главы.

Кельвин *) решал более простую задачу, считая Землю полуограниченным телом, граница $x=0$ которого поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура везде одинакова и равна v_0. Из соотношения (4.3) следует, что температура v на глубине x в момент времени t будет равна

$$v=v_0\Phi\frac{x}{2(kt)^{1/2}}, \qquad (14.1)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{v_0}{(\pi kt)^{1/2}}e^{-x^2/4\varkappa t}.$$

Отсюда вытекает, что величина $\partial v/\partial x$ при $x=0$, т. е. геотермический градиент G, выражается так же, как и в задаче Фурье, а именно:

$$G=v_0(\pi\varkappa t)^{-1/2}. \qquad (14.2)$$

Положив $v_0=3900°$ C (так как эту температуру можно считать температурой плавления горных пород), $G=\frac{1}{2700}$, а $\varkappa=0{,}018$ (как наиболее приемлемую среднюю величину), Кельвин нашел из выражения (14.2) величину, равную $94\cdot10^6$ лет, для времени, по истечении которого геотермический градиент упадет до своего теперешнего значения, т. е. «возраст» Земли **). Кельвин

*) См. [62]. В этой работе Кельвин полностью исключал возможность выделения тепла за счет химической реакции.

**) В настоящее время широко распространена другая теория, в которой предполагается, что Земля образовалась в результате агрегации пылевых частиц, а затем ее температура начала повышаться вследствие давления и радиоактивного распада содержащихся в ней радиоактивных веществ. (*Прим. ред.*)

признавал, что принятая им начальная температура 3900° С слишком высока, и из более поздних исследований свойств горных пород при высоких температурах он заключил, что начальную температуру следует считать равной 1200° С [63, 64]. При этом его оценка возраста Земли снижается до значения, немного меньшего чем 10^7 лет, что мало отличается от величины, найденной Кингом [65], который полагал, что у нас нет данных считать возраст Земли бóльшим, чем 24 000 000 лет.

Предельные значения возраста Земли, которые Кельвин получил в 1864 г., вызвали большой интерес, поскольку в те годы, так же как и сейчас, геологи считали, что для остывания Земли из расплавленного состояния необходим значительно больший период времени. Они основывали свои аргументы на данных о наблюдаемых процессах и об эффектах стратификации. Вывод Кельвина вызвал обширную дискуссию между физиками и геологами [66, 67], причем полемика закончилась лишь в начале XX века, когда была открыта радиоактивность. Следует, однако, отметить, что задача Кельвина по существу сводится к задаче об охлаждении тонкого поверхностного слоя, поскольку $\Phi(2) = 0{,}995$, мы получим, используя приведенные выше численные значения, что по истечении 10^8 лет температура на глубине 250 *км* изменится лишь на 0,5% и, следовательно, огромные количества тепла внутри Земли окажутся совершенно незатронутыми. Было отмечено, что если бы физические условия внутри Земли позволяли использовать бóльшие количества тепла, то для возраста Земли мы получили бы значительно бóльшие величины [68, 69] (см. также § 8 гл. XII).

Теперь известно, что в горных породах земной коры тепло выделяется вследствие распада содержащихся в них [50—52, 70—74] радиоактивных веществ. Однако интенсивность выделения тепла при этом оценить довольно трудно ввиду большого расхождения в содержании радиоактивных веществ в образцах горных пород одного и того же типа, а также вследствие различий между горными породами разных типов. Последние из полученных результатов составляют $6{,}3 \cdot 10^{-6}$; $1{,}7 \cdot 10^{-6}$; $0{,}04 \cdot 10^{-6}$ *кал/г* в год для гранитных, основных и ультраосновных горных пород соответственно. Данные для осадочных пород сильно варьируют, но величину $2 \cdot 10^{-6}$ *кал/г* в год можно считать наиболее правдоподобной. Распределение радиоактивных материалов по глубине неизвестно, однако можно предположить, что количество их, равное по порядку величины количеству, наблюдаемому на поверхности Земли, должно сосредоточиваться в относительно тонком слое толщиной несколько десятков километров; в противном случае количество выделяющегося тепла было бы больше того, которое можно объяснить наблюдаемой потерей тепла с поверхности Земли. Таким образом, для решения нашей задачи можно прибегнуть к физическим моделям, описанным выше (см. стр. 84, 88). Эти модели часто использовались при обсуждении вопросов о температуре в земной коре и о возможных значениях возраста Земли. В связи с тем, что период полураспада некоторых радиоактивных веществ (в частности, для калия он равен $1{,}3 \cdot 10^9$ лет) значительно меньше $4 \cdot 10^9$ лет (что считается вероятным значением возраста Земли), возникают дополнительные осложнения, так что при определении интенсивности выделения тепла следует учитывать экспоненциальный характер распада.

Уже в 1893 г. было признано, что предположение Кельвина о постоянной начальной температуре должно быть заменено другим, учитывающим повышение точки плавления с давлением [65, 75]. При этом обычно принимается линейная зависимость $(v_0 + bx)$, где v_0 примерно равно 1400° С, а b приблизительно равно 3°/*км*. Данная задача по-прежнему сводится к за-

даче 3 § 11, и, идя этим путем, Джеффриз получил величину возраста Земли, равную $1{,}6 \cdot 10^9$ лет.

В последние годы на смену попыткам вычислить возраст Земли термическими методами пришли попытки вычислить температуры внутри Земли, исходя из ее предполагаемого возраста. Это потребовало рассмотрения задачи о сфере, обсуждение которой приведено в § 14 гл. IX.

§ 15. Неограниченное составное твердое тело

Пусть область $x > 0$ состоит из одного вещества (K_1, ρ_1, $\varkappa_1$), а область $x < 0$ из другого (K_2, ρ_2, $\varkappa_2$), причем граничные условия в плоскости раздела $x = 0$ совпадают с (9.18) и (9.19) гл. I, т. е.

$$v_1 = v_2, \qquad x = 0,\ t > 0 \tag{15.1}$$

и

$$K_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad x = 0,\ t > 0, \tag{15.2}$$

где v_1 — температура в области $x > 0$, а v_2 — температура в области $x < 0$.

Многие задачи подобного типа можно решить, используя решения для полуограниченного твердого тела, приведенные в § 4 данной главы.

1. Начальная температура постоянна и равна в области $x > 0$ величине V, а в области $x < 0$ она равна нулю. Ищем решения типа

$$v_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}}\right), \qquad x > 0, \tag{15.3}$$

$$v_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{|x|}{2\sqrt{\varkappa_2 t}}\right), \qquad x < 0. \tag{15.4}$$

Из § 4 данной главы известно, что эти решения удовлетворяют дифференциальным уравнениям теплопроводности в соответствующих областях. Находим постоянные A_1, B_1, A_2, B_2, удовлетворяющие начальным и граничным условиям. Начальные условия дают

$$A_1 + B_1 = V, \qquad A_2 + B_2 = 0,$$

а граничные —

$$A_1 = A_2 \quad \text{и} \quad B_1 K_1 \varkappa_1^{-\frac{1}{2}} = -B_2 K_2 \varkappa_2^{-\frac{1}{2}}.$$

Решая эти уравнения и подставляя в (15.3) и (15.4), окончательно получим *)

$$v_1 = \frac{K_1 \varkappa_1^{-1/2} V}{K_1 \varkappa_1^{-1/2} + K_2 \varkappa_2^{-1/2}} \left\{ 1 + \frac{K_2 \varkappa_2^{-1/2}}{K_1 \varkappa_1^{-1/2}}\, \Phi\, \frac{x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}} \right\}, \tag{15.5}$$

$$v_2 = \frac{K_1 \varkappa_1^{-1/2} V}{K_1 \varkappa_1^{-1/2} + K_2 \varkappa_2^{-1/2}}\, \Phi^*\, \frac{|x|}{2\sqrt{\varkappa_2 t}}. \tag{15.6}$$

2. Начальная температура равна нулю. В плоскости $x = 0$ при $t > 0$ через единицу площади в единицу времени поступает количество тепла, равное F_0. В данном случае, исходя из соотношения (9.6) настоящей главы, примем, что

$$v_1 = \frac{2F_1 (\varkappa_1 t)^{1/2}}{K_1}\, \mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}}\right), \qquad x > 0, \tag{15.7}$$

$$v_2 = \frac{2F_2 (\varkappa_2 t)^{1/2}}{K_2}\, \mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{|x|}{2\sqrt{\varkappa_2 t}}\right), \qquad x < 0. \tag{15.8}$$

---

*) Другие методы решения см. в [76—78].

Здесь неизвестные постоянные F_1 и F_2 следует находить из граничных условий при $x = 0$; тогда мы получим

$$\frac{F_1 \varkappa_1^{1/2}}{K_1} = \frac{F_2 \varkappa_2^{1/2}}{K_2} \quad \text{и} \quad F_1 + F_2 = F_0.$$

Отсюда

$$v_1 = \frac{2F_0 \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2 t}}{K_1 \varkappa_2^{1/2} + K_2 \varkappa_1^{1/2}} \, \mathrm{i}\Phi^* \left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}} \right), \tag{15.9}$$

$$v_2 = \frac{2F_0 \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2 t}}{K_1 \varkappa_2^{1/2} + K_2 \varkappa_1^{1/2}} \, \mathrm{i}\Phi^* \left(\frac{|x|}{2\sqrt{\varkappa_2 t}} \right). \tag{15.10}$$

Случай контактного сопротивления между поверхностями раздела был рассмотрен Шафом [79]. Он различал два случая: а) когда тепло подводится к одной или обеим поверхностям — случай, соответствующий «сухому» трению, и б) когда тепло подводится между поверхностями — случай, соответствующий жидкостному трению или наличию тонкого плоского нагревательного элемента.

3. *Условия задачи те же, что и в пункте* 1, *но в плоскости* $x = 0$ *имеется контактное сопротивление, и поэтому вместо соотношения* (15.1) *мы должны написать*

$$K_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + H(v_2 - v_1) = 0, \tag{15.11}$$

тогда как соотношение (15.2) *по-прежнему остается справедливым* (см. пункт Ж § 9 гл. I).

Поступая точно так же, как и в пункте 1, и учитывая, что при $x = 0$ мы имеем граничное условие третьего рода, будем искать для данной задачи решения вида:

$$v_1 = \frac{K_1 \varkappa_1^{-1/2} V}{K_1 \varkappa_1^{-1/2} + K_2 \varkappa_2^{-1/2}} \left\{ 1 + \frac{K_2 \varkappa_2^{-1/2}}{K_1 \varkappa_1^{-1/2}} \left[\Phi \frac{x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \exp\left(h_1 x + h_1^2 \varkappa_1 t\right) \Phi^* \left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}} + h_1 \sqrt{\varkappa_1 t} \right) \right] \right\}, \tag{15.12}$$

$$v_2 = \frac{K_1 \varkappa_1^{-1/2} V}{K_1 \varkappa_1^{-1/2} + K_2 \varkappa_2^{-1/2}} \left\{ \Phi^* \left(\frac{|x|}{2\sqrt{\varkappa_2 t}} \right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(h_2 x + h_2^2 \varkappa_2 t\right) \Phi^* \left(\frac{|x|}{2\sqrt{\varkappa_2 t}} + h_2 \sqrt{\varkappa_2 t} \right) \right\}, \tag{15.13}$$

где

$$h_1 = \frac{H\left(K_1 \varkappa_1^{-1/2} + K_2 \varkappa_2^{-1/2}\right)}{K_1 K_2 \varkappa_2^{-1/2}}, \qquad h_2 = \frac{H\left(K_1 \varkappa_1^{-1/2} + K_2 \varkappa_2^{-1/2}\right)}{K_1 K_2 \varkappa_1^{-1/2}}. \tag{15.14}$$

Эти задачи, а также более сложные задачи легче всего решать при помощи преобразования Лапласа (см. гл. XII).

§ 16. Случай зависимости термических характеристик вещества от температуры

В § 6 гл. I было показано, что если K и c зависят от температуры, то уравнение линейного потока тепла

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho c \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{16.1}$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{d(\ln K)}{dv} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial v}{\partial t} \tag{16.2}$$

приводится в результате замены переменной

$$\theta = \int_0^v \frac{K}{K_0}\, dv \tag{16.3}$$

к виду

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \tag{16.4}$$

где $\varkappa = \frac{K}{\rho c}$ — функция θ. Здесь можно использовать любое из уравнений (16.1), (16.2) и (16.4).

Исторически сложилось так, что в первых статьях рассматривались задачи с переменными термическими характеристиками; однако впоследствии, частично из-за возникавших трудностей, частично из-за недостатка данных об изменении термических характеристик с температурой, таким задачам посвящалось очень мало работ. В последнее время благодаря накоплению сведений о термических характеристиках веществ, а также ввиду важности подобных задач в теории диффузии эти проблемы привлекли очень большое внимание. Для их решения обычно следует применять численные методы, но имеются также некоторые чрезвычайно интересные теоретические подходы. Здесь мы подробно рассмотрим лишь те из них, которые важны для задач теплопроводности. Полный разбор остальных методов можно найти в гл. IX книги Крэнка [80].

I. *Преобразование Больцмана* [81].

Решения ряда важных задач, в которых температуропроводность постоянна, представляют собой функции только от

$$\xi = x t^{-\frac{1}{2}}. \tag{16.5}$$

Отсюда следует, что необходимо рассмотреть возможность нахождения в такой форме решений уравнения (16.1). Если предположить, что v является функцией только ξ, то уравнение (16.1) приводится к обычному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left(K \frac{dv}{d\xi}\right) + \frac{1}{2}\rho c \xi \frac{dv}{d\xi} = 0, \tag{16.6}$$

а уравнение (16.4) принимает вид

$$\varkappa \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi \frac{d\theta}{d\xi} = 0. \tag{16.7}$$

Пригодность выражения (16.5) лимитируется тем, что граничные и начальные условия также должны выражаться только через ξ. Например, поскольку $\xi \to \infty$ при $t \to 0$ и $x > 0$, а $\xi = 0$ при $t > 0$ и $x = 0$, очевидно, что это соотношение применимо в области $x > 0$ для постоянной начальной температуры и в плоскости $x = 0$ для постоянной температуры при $t > 0$.

Следует отметить, что употребление термина «преобразование» применительно к соотношению (16.5) нельзя считать правильным, так как при этом предполагается, что при замене переменных в уравнении (16.1), скажем, на ξ и t, уравнение в частных производных приводится к обычному дифференциальному уравнению (16.6), тогда как на самом деле оно просто преобразуется в уравнение по ξ. Смысл данного метода заключается в том, что если начальные и граничные условия, которым удовлетворяет уравнение (16.1), можно выразить только через ξ, то решение (16.6), которое удовлетворяет этим условиям, дает решение (16.1) с граничными условиями; при этом полученное решение представляет собой функцию только $xt^{-1/2}$ и можно полагать, что оно является единственным.

Если $\varkappa$ — постоянная величина, то для (16.7) непосредственно получается обычное решение

$$\theta = A\Phi\left(\frac{\xi}{2\varkappa^{1/2}}\right) = A\Phi\left(\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right). \tag{16.8}$$

Имеются различные интегралы уравнений (16.6) и (16.7), например

$$\int \xi\, dv = -2\varkappa \frac{dv}{d\xi}, \tag{16.9}$$

для случая, когда c — постоянная величина. Этот интеграл является исходным для численного метода Филипа [82] *). Приближенные решения уравнения (16.6) легко получаются для случаев, при которых K изменяется медленно.

Кирхгоф и Ганземан [30] разобрали случай $c = c_0 + c_1 v$ и $K = K_0 + K_1 v$. При этом они искали решение в виде $v = v(\xi)$ и считали, что c_1 и K_1 малы.

II. *Преобразование Пика* **).

Предположим, что ψ является функцией x и t, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}{f_1(\psi)} = \frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}{f_2(\psi)}, \tag{16.10}$$

где $f_1(\psi)$ и $f_2(\psi)$ — функции только ψ. Тогда, если v — функция только ψ, то уравнение (16.2) принимает вид

$$\left[\frac{1}{\varkappa} - f_2(\psi)\right]\frac{dv}{d\psi} - f_1(\psi)\left(\frac{dv}{d\psi}\right)^2\frac{d(\ln K)}{dv} = f_1(\psi)\frac{d^2v}{d\psi^2}. \tag{16.11}$$

Необходимо также преобразовать граничные условия. Так, если граничными условиями для v служат $v = v_1 = \text{const}$ при $F_1(x, t) = 0$ и $v = v_2$ при $F_2(x, t) = 0$, то граничные условия для ψ имеют вид $\psi = V_1$, при $F_1(x, t) = 0$ и $\psi = V_2$ при $F_2(x, t) = 0$.

Например, для области $x > 0$, в которой граничными условиями служат $v = v_1$ при $x > 0$, $t = 0$ и $v = v_2$ при $x = 0$, $t > 0$, получим, что $\psi = \exp(-xt^{-1/2})$ удовлетворяет уравнению (16.10), а уравнение (16.11) принимает вид

$$\left[\frac{1}{2\varkappa}\ln\psi + 1\right]\frac{dv}{d\psi} + \psi\left(\frac{dv}{d\psi}\right)^2\frac{d(\ln K)}{dv} + \psi\frac{d^2v}{d\psi^2} = 0$$

и решается с граничными условиями $v = v_1$ при $\psi = 0$ и $v = v_2$ при $\psi = 1$.

III. *Точные решения для частных случаев.*

Задачи, в которых термические характеристики являются ступенчатыми функциями температуры [80, 85], можно точно решить методами, изложенными в § 2 гл. XI.

Разобраны также задачи, в которых теплопроводности выражаются в виде $K_0/(1 - \lambda v)$, $K_0/(1 - \lambda v)^2$ и $K_0/(1 + 2av + bv^2)$ [80, 86].

IV. *Другие методы.*

Были рассмотрены различные приближенные методы для решения задач, в которых теплопроводности выражаются в виде $a + bv$ и $\exp(av)$ [80]. Следует отметить, что самый важный закон в теории диффузии, а именно закон

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{E}{RT}\right],$$

где T — абсолютная температура, а D_0, E, R — постоянные, еще полностью не проанализирован.

Был предложен метод последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения используется случай постоянных термических характеристик, а для получения первого приближения применяется функция Грина [87].

V. *Установившееся состояние.*

В данном случае уравнение (16.1) сводится к обыкновенному уравнению

$$K\frac{dv}{dx} = \text{const},$$

которое можно сразу же проинтегрировать для целого ряда важных специальных случаев. В задачах, в которых K зависит только от v, результаты непосредственно следуют из результатов для постоянного K, найденных в ряде важных специальных задач как одномерных, так и двух- и трехмерных (см. § 6 гл. I). Были получены графики распределений температур при линейном и радиальном потоке тепла для величин K, выражающихся в виде $K_0[1 + f(v)]$ и $K_0[1 + f(x)]$ [88].

---

*) О его применении к уравнению (16.1) с дополнительным членом $A(v)\frac{\partial v}{\partial x}$ см. [83].

**) В работе [84] Пик распространил этот метод на трехмерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gray, Proc. Roy. Soc. Edin. **45**, 230—244 (1924—1925).
2. Ribaud, C. R. Acad. Sci. **226**, 140—142, 204—206, 449—451 (1948).
3. Nordon, C. R. Acad. Sci. **228**, 167—168 (1949).
4. Appell, J. Math. Pure Appl. **8**, 187—216 (1892).
5. Goursat, Cours d'Analyse, Gauthier-Villars, ed. 5, vol. 3. (Э. Гурса, Курс математического анализа, ОНТИ, ч. III, 1934, перев. с 5-го изд.)
6. Paterson, Proc. Glasgow Math. Ass. **1**, 48—52 (1952—1953).
7. Titchmarsh, Theory of Fourier Integrals, Oxford, 1937. (Э. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, перев. с 1-го изд.)
8. Lovering, Bull. Geol. Soc. Am. **46**, 69—93 (1935).
9. Lovering, Econ. Geol. Fiftieth Anniv vol., p. 249, 1955.
10. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Heat Conduction, MacMillan, ed. 2, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1947.)
11. Carslaw, Fourier's Series and Integrals, MacMillan, ed. 3, 1930.
12. Williamson, Adams, Phys. Rev. **14**, 99 (1919).
13. Taylor, Phil. Trans. Roy. Soc. **A215**, 1 (1915).
14. Kirsch, Die Bewegung der Wärme in den Cylinderwandungen der Dampfmaschine, Leipzig, 1886.
15. Dahl, Trans. ASME **46**, 161 (1924).
16. Stokes, Scientific Papers, iii, 1.
17. Lamb, Hydrodynamics, ed. 4, § 345. (Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, перев. с 6-го изд.)
18. Howling, Mendoza, Zimmerman, Proc. Roy. Soc. **A229**, 86—109 (1955).
19. Slater, Microwave Transmission, McGraw-Hill, 1942.
20. Marcus, Carnegie Institute of Technology, Report, 1953.
21. Brunt, Quart. J. R. Met. Soc. **58**, 389 (1932).
22. Smith, Aust. J. Phys. **6**, 127—130 (1953).
23. Lauwerier, Appl. Sci. Res. **A4**, 142—152 (1954).
24. Jaeger, Johnson, Geofis. Pura é Appl. **24**, 104 (1953).
25. Jaeger, Proc. Camb. Phil. Soc. **49**, 355—359 (1953).
26. Jaeger, Aust. J. Phys. **6**, 10—21 (1953).
27. Schulze, Ann. Phys. (N. F.) **66**, 207 (1898).
28. Schaufelberger, Ann. Phys. (4) **7**, 589 (1902).
29. Frazier, Phys. Rev. **39**, 515 (1932).
30. Kirchhoff, Hansemann, Ann. Phys. (N. F.) **9**, 1 (1880).
31. Kirchhoff, Hansemann, Ann. Phys. (N. F.) **13**, 406 (1881).
32. Grüneisen, Ann. Phys. (4), **3**, 43 (1900).
33. Giebe, Verh. dtsch. phys. Ges. 60, 1903.
34. Hobson, Diesselhorst, Wärmeleitung, Enc. der Math. Wiss., Bd. V, Tl. I, 224—227, 1905.
35. Fox, Phil. Trans. Roy. Soc. **A232**, 431 (1934).
36. Paterson, Phil. Mag. **32**, 384 (1941).
37. Paterson, Proc. Glasgow Math. Ass. **1**, 164—169 (1953).
38. Jaeger, Quart. Appl. Math. **4**, 100—103 (1946).
39. Jeffreys, Beitr. Geophys. **18**, 1 (1927).
40. Bullard, Mon. Not. R. Astr. Soc., Geophys. Suppl. **4**, 534 (1939).
41. Jeffreys, The Earth, Cambridge, ed. 3, 1952, Chap. X.
42. Van Orstrand, J. Wash. Acad. Sci. 22, 529 (1932).
43. Cook, Brit. J. Appl. Phys. **3**, 1—6 (1952).
44. Jaeger, Brit. J. Appl. Phys. **3**, 221—222 (1952).
45. Kelvin, The Reduction of Observations of Underground Temperature. Trans. Roy. Soc. Edin. **22**, 405 (1861).
46. Keen, The Physical Properties of the Soil, Rothamsted Monographs on Agricultural Science, 1931, Chap. IX.
47. Patten, Bull. U. S. Dir. Soils No. 59 (1909).
48. De Vries, Trans. Int. Congr. Soil. Sci. vol. II, 1950.
49. Lettau, Trans. Am. Geophys. Union **32**, 189—200 (1951).
50. Bullard, The Earth as a Planet, Ed. Kuiper, University of Chicago Press, 1953.
51. Jacobs, Encyclopaedia of Physics, Springer, vol. 47, 1956.
52. Internal Constitution of the Earth, Ed. Gutenberg, Dover, 1951.
53. Temperature, its Measurement anx Control in Science and Industry, Am. Inst. Phys. 1941.
54. Benfield, Proc. Roy. Soc. **A173**, 428—450 (1939).

55. Bullard, Proc. Roy. Soc. **A173**, 474—502 (1939).
56. Birch, Bull. Geol. Soc. Am. **61**, 567—630 (1950).
57. Terzaghi, J. Boston Soc. Civil Engrs **39**, 1—50 (1952).
58. Misener, Trans. Am. Geophys. Union **36**, 1055—1060 (1955).
59. Birch, Am. J. Sci. **246**, 729—760 (1948).
60. Fourier, Extrait d'un Mémoire sur le refroidissement du globe terrestre. Bull. Sci. par la Société philomatique de Paris 1820.
61. Fourier, Oeuvres complèts, Paris, 1888, T. II, p. 284.
62. Kelvin, The secular cooling of the Earth, Trans. Roy. Soc. Edin. **23**, 157 (1864).
63. Kelvin, Nature **59**, 438 (1895).
64. Kelvin, Phil. Mag. **47**, 66 (1899).
65. King, Am. J. Sci. **145**, 1 (1893).
66. Woodward, The mathematical theories of the Earth, Am. Ass. Adv. Sci., Toronto, 1889.
67. Woodward, The century's progress in applied mathematics, Bull. Am. Math. Soc. **6**, 147 (1900).
68. Perry, Nature **51**, 224, 341, 582 (1895).
69. Heaviside, Electromagnetic Theory, 1899, vol. II.
70. Rutherford, Chadwick, Ellis, Radiation from Radioactive Substances, Cambridge, 1930.
71. Holmes, The Age of the Earth, Harper's, 1913.
72. Jeffreys, Mon. Not. R. Astr. Soc. Geophys. Supp. **5**, 37 (1942).
73. Bullard, Mon. Not. R. Astr. Soc. Geophys. Supp. **5**, 41 (1942).
74. Birch, Nuclear Geology, Ed. Faul, Wiley, 1954, Chap. 5.
75. Barus, Phil. Mag. **35**, 173 (1893).
76. Tranter, Phil. Mag. **28**, 579 (1939).
77. Carslaw, Phil. Mag. **30**, 414 (1940).
78. Churchill, Phil. Mag. **31**, 81 (1941).
79. Schaaf, Quart. Appl. Math. **5**, 107—111 (1947).
80. Crank, The Mathematics of Diffusion, Oxford, 1956.
81. Boltzmann, Ann. Phys. **53**, 959 (1894).
82. Philip, Trans. Faraday Soc. **51**, 885—892 (1955).
83. Philip, Aust. J. Phys. **10**, 29—42 (1957).
84. Peek, Phys. Rev. **35**, 554—561 (1930).
85. Crank, Trans. Faraday Soc. **47**, 450—461 (1951).
86. Fujita, Text. Res. J. **22**, 757, 823 (1952).
87. Hopkins, Proc. Phys. Soc. **50**, 703 (1938).
88. Barrer, Proc. Phys. Soc. **58**, 321—331 (1946).

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЙ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ, ОГРАНИЧЕННОМ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

§ 1. Введение

В настоящей главе мы рассмотрим различные задачи о линейном тепловом потоке в твердом теле, ограниченном двумя параллельными плоскостями (обычно $x = 0$ и $x = l$). Эту область мы будем называть для краткости «пластина $0 < x < l$». Полученные нами результаты применимы также к стержню длиной l с теми же условиями на концах при отсутствии теплообмена с его поверхности.

§ 2. Установившаяся температура

В случае установившегося потока тепла в пластине толщиной l с коэффициентом теплопроводности K, поверхность которой поддерживается при температурах v_1 и v_2, дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dv}{dx} = \text{const} = \frac{v_2 - v_1}{l}.$$

Таким образом, тепловой поток в любой точке равен

$$f = -K\frac{dv}{dx} = -\frac{K(v_2 - v_1)}{l} = \frac{v_1 - v_2}{R}, \tag{2.1}$$

где

$$R = \frac{l}{K}. \tag{2.2}$$

Соотношение (2.1) по форме полностью совпадает с законом Ома для установившегося электрического тока: тепловой поток f соответствует электрическому току, а разность температур $v_1 - v_2$ — падению напряжения. Таким образом, R можно назвать термическим сопротивлением пластины.

Теперь предположим, что мы имеем составную пластину, состоящую из n пластинок с толщинами $l_1, \ldots, l_n$ и коэффициентами теплопроводности $K_1, \ldots, K_n$ соответственно. Если пластинки находятся в идеальном тепловом контакте по поверхностям раздела, то изменение температуры между противоположными поверхностями всей составной пластины равно сумме изменений температур в отдельных пластинках, и, так как тепловой поток одинаков в любой точке, эта сумма равна следующей величине:

$$\frac{fl_1}{K_1} + \frac{fl_2}{K_2} + \ldots + \frac{fl_n}{K_n} = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n) f. \tag{2.3}$$

Это равносильно утверждению, что при идеальном тепловом контакте между отдельными слоями составной пластины ее термическое сопротивление равно сумме термических сопротивлений отдельных слоев.

Рассмотрим теперь составную пластину с такими контактными сопротивлениями, что тепловой поток между поверхностями последовательных слоев равен произведению H на разность температур этих поверхностей (см. соотношение (9.20) гл. I). Здесь $1/H$ можно считать термическим сопротивлением контакта, и тогда полное термическое сопротивление составной пластины равно сумме термических сопротивлений отдельных слоев плюс термическое сопротивление контактов между ними.

Если коэффициент теплопроводности K является функцией температуры, то наше дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dv}{dx}\right)=0,$$

и, следовательно, остается справедливым соотношение

$$-K\frac{dv}{dx}=f=\text{const}.$$

Интегрируя его от v_1 до v_2, т. е. в пределах поверхностных температур пластины толщиной l, получим

$$-\int_{v_1}^{v_2} K\,dv=lf,$$

и, следовательно,

$$f=\frac{(v_1-v_2)K_{\text{ср}}}{l}, \tag{2.4}$$

где

$$K_{\text{ср}}=\frac{1}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2} K\,dv \tag{2.5}$$

представляет собой средний коэффициент теплопроводности для всего диапазона температур в пластине. Таким образом, если коэффициент теплопроводности зависит от температуры, то предыдущие результаты остаются справедливыми при замене K на $K_{\text{ср}}$.

§ 3. Область $0<x<l$. Границы поддерживаются при нулевой температуре. Начальная температура $f(x)$

Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \tag{3.1}$$

при условиях

$$v=0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=l \tag{3.2}$$

и

$$v=f(x) \text{ при } t=0. \tag{3.3}$$

Если начальное распределение представляется в виде

$$v=A_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

то ясно, что выражение

$$v = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \exp\left(-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right)$$

будет удовлетворять всем условиям (3.1), (3.2), (3.3) нашей задачи.

Предположим, что начальная температура $f(x)$ представляет собой ограниченную функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле*) [1] в интервале $(0,\ l)$ и, следовательно, ее можно разложить в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x')\sin\frac{n\pi x'}{l}\,dx'. \tag{3.4}$$

Рассмотрим теперь функцию v, определяемую бесконечным рядом

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]. \tag{3.5}$$

Благодаря присутствию множителя $\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]$ этот ряд равномерно сходится**) в любом интервале x при $t > 0$. Если рассматривать его как функцию t, то мы увидим, что он равномерно сходится при $t \geqslant t_0 > 0$, где t_0 — некоторое положительное число.

Таким образом, в указанных интервалах функция v, определяемая рядом (3.5), является непрерывной функцией как от x, так и от t ***).

Легко показать, что ряды, полученные почленным дифференцированием ряда (3.5) по x и t, также равномерно сходятся в указанных интервалах x и t. Таким образом, они равны производным от v.

Следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\sum_{1}^{\infty}\frac{\varkappa n^2\pi^2}{l^2}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]$$

и

$$\varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\sum_{1}^{\infty}\frac{\varkappa n^2\pi^2}{l^2}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]$$

при $t > 0$ и $0 < x < l$.

---

*) Это требование снимается [2], так как было показано, что приводимые ниже результаты справедливы, если функция $f(x)$ является ограниченной и интегрируемой в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$.

**) Так как $f(x)$ является ограниченной функцией, то имеется такое положительное число M, что $|f(x)| < M$ в интервале $0 < x < l$. Отсюда следует, что $|a_n| < 2M$ для всех значений n. Поэтому

$$\left|a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\right| < 2M\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t_0}{l^2}\right], \quad \text{где} \quad t \geqslant t_0 > 0.$$

В таком случае ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{kn^2\pi^2 t_0}{l^2}\right]$$

сходится: его члены не зависят от x и t, и мы получаем соответствующие решения.

***) Если считать v функцией двух переменных x, t, то она является непрерывной функцией от $(x,\ t)$ в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant t_0 > 0$ [1].

Итак, уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

удовлетворяется во всех точках стержня при $t > 0$ функцией, определяемой рядом (3.5).

Посмотрим теперь, удовлетворяет ли данная функция граничным и начальным условиям.

Рассматриваемый нами ряд равномерно сходится относительно x в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ при $t > 0$, и поэтому он служит непрерывной функцией x в данном интервале.

Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} v = 0 \text{ (т. е. величине суммы ряда при } x = 0)$$

и

$$\lim_{x \to l} v = 0 \text{ (т. е. величине суммы ряда при } x = l).$$

Следовательно, *граничные условия* удовлетворены.

Что же касается *начальных условий*, то мы можем воспользоваться обобщением теоремы Абеля [1].

Пусть функция $f(x)$ ограничена и удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $(0, l)$. Тогда ряд синусов для $f(x)$

$$a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ldots,$$

сходится и его сумма равна $f(x)$ в каждой точке между 0 и l, где $f(x)$ непрерывна; во всех остальных точках эта сумма равна *) $\frac{1}{2}\left\{f(x+0) + f(x-0)\right\}$.

Из обобщения теоремы Абеля следует, что если v определено рядом (3.5), то

$$\lim_{t \to 0} v = \lim_{t \to 0} \sum_{1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right] = f(x)$$

в точках, где функция непрерывна; во всех остальных точках

$$\lim_{t \to 0} v = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

Таким образом, мы доказали, что если начальная температура удовлетворяет условиям Дирихле, непрерывна в интервале $0 \geqslant x \geqslant l$, а $f(0) = f(l) = 0$, то функция, определяемая (3.5) **), удовлетворяет всем условиям нашей задачи.

Если начальная температура имеет разрывы непрерывности, то в точках разрыва функция, определяемая (3.5), стремится к $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ при $t \to 0$. При сколь угодно малом, но не равном нулю t функция v уже

*) Если функция $f(x)$ ограничена и удовлетворяет условиям Дирихле, то она может иметь только разрыв первого рода [1].

**) Выражение (3.5) можно записать в виде

$$v = \frac{2}{l} \int_0^l f(x') \sum_{1}^{\infty} \left(\sin \frac{n\pi x'}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right]\right) dx',$$

поскольку ряд под интегралом равномерно сходится (см. [1], § 70).

не будет иметь разрыва в указанной точке и кривая температуры будет проходить вблизи точки $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$.

Следует помнить, что физическая задача в том виде, в каком мы сформулировали ее для разрывного распределения температур на концах стержня или в самом стержне, представляет собой идеализированный случай. В действительности же в начальный момент в стержне не может быть прерывного распределения температуры. Решая физическую задачу, мы должны предположить, что происходит мгновенное изменение температуры в стержне в момент, когда мы начинаем измерения в непосредственной близости от точки разрыва или от концов стержня (если они являются точками разрыва). Разрыв температур, таким образом, сглаживается. Наше решение поставленной математической задачи удовлетворяет приведенным выше условиям и можно считать, что оно соответствует и измененной нами физической задаче.

Представляют интерес следующие частные случаи *).

1. Пластина $0<x<l$ с постоянной начальной температурой, т. е. $f(x) = V_0 = \text{const}$. Тогда

$$v=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{l^2}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}. \tag{3.6}$$

2. Линейное начальное распределение в пластине $0<x<l$, т. е. $f(x)=kx$. Тогда

$$v=\frac{2lk}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2t}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{3.7}$$

Обычно выгоднее использовать результаты, полученные для пластины $-l<x<l$ (симметричный случай), так как тогда можно непосредственно сравнивать их с аналогичными результатами для сферы и цилиндра. Кроме того, обычно для малых значений $\frac{\varkappa t}{l^2}$, например для $\frac{\varkappa t}{l^2}<0{,}01$, такие ряды, как (3.6) и (3.7), сходятся медленно, но ниже будет показано (см. § 5 гл. XV), что для подобных значений аналогичные ряды с функциями ошибок или их интегралами сходятся быстро. Для удобства упомянутые ряды будут рассмотрены здесь (см. (3.9) и (3.11)), а их производные мы рассмотрим в § 5 гл. XII. Все результаты, приводимые ниже, справедливы также и для пластины $0<x<l$, если при $x=0$ тепловой поток отсутствует, а плоскость $x=l$ поддерживается при температуре, равной нулю.

3. Пластина $-l<x<l$ с постоянной начальной температурой, равной V_0. Перенося начало координат в выражении (3.6) в среднюю точку пластины и заменяя $\frac{1}{2}l$ на l, получим

$$v=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{4l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \tag{3.8}$$

или

$$v=V_0-V_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\Phi^*\left(\frac{(2n+1)l-x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)+\Phi^*\left(\frac{(2n+1)l+x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)\right\}. \tag{3.9}$$

Некоторые численные результаты, найденные при решении этой задачи, приведены на рис. 10, *а* и 11. Средняя температура $v_{\text{ср}}$ в пластине в момент времени t равна

$$v_{\text{ср}}=\frac{8V_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{4l^2}\right], \tag{3.10}$$

*) Ряд (3.6) можно также выразить через тэта-функции [3].

или

$$v_{\text{ср}} = V_0 - 2V_0\left(\frac{\varkappa t}{l^2}\right)^{1/2}\left\{\pi^{-1/2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \,\mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{nl}{(\varkappa t)^{1/2}}\right)\right\}. \tag{3.11}$$

Количество тепла, приходящееся на единицу площади в момент времени t, равно $2l\rho c v_{\text{ср}}$. Данные об этой величине часто используются для определения

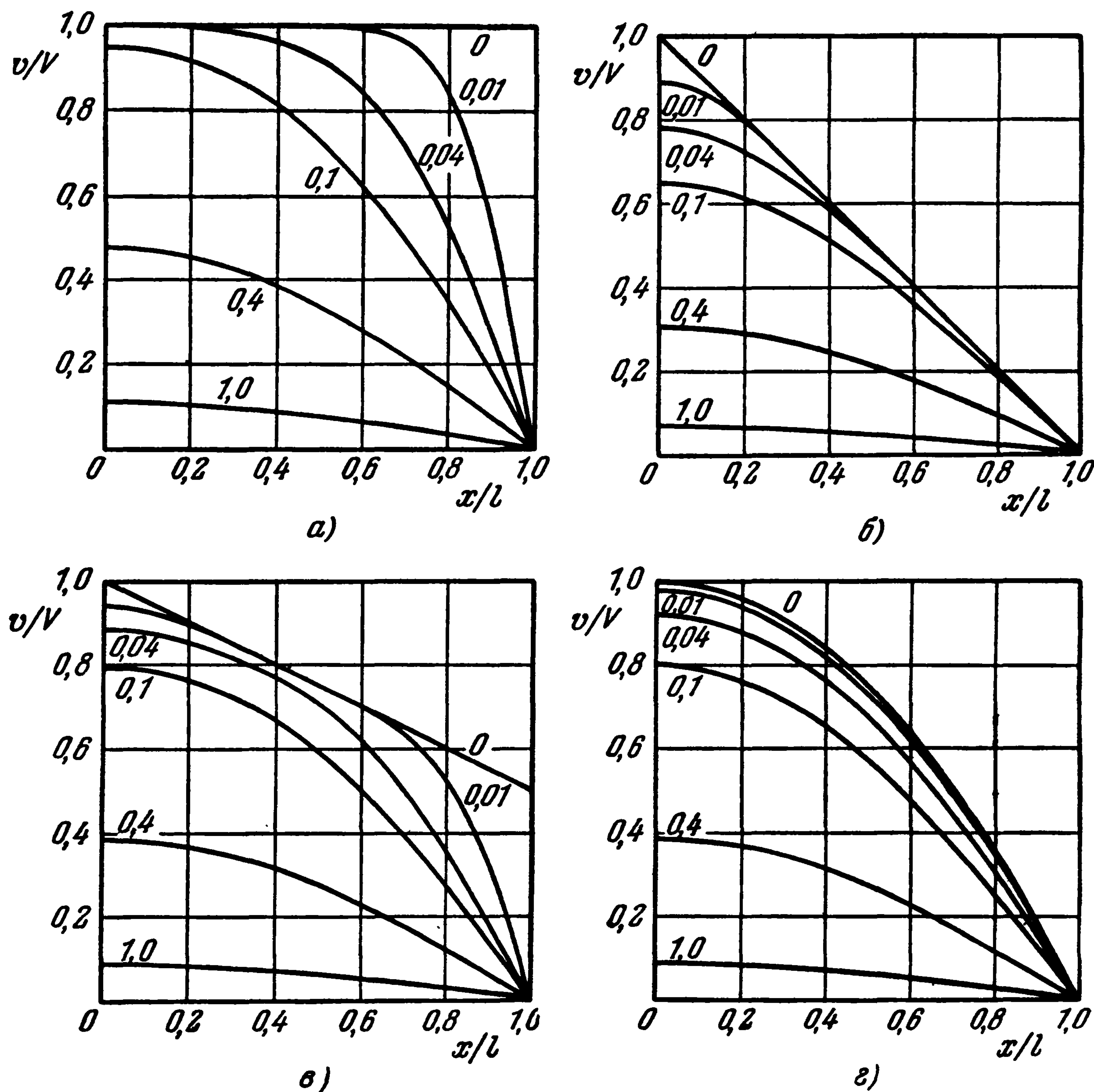


Рис. 10. Распределение температур в пластине $0 < x < l$ в отсутствие теплового потока при $x = 0$, нулевой температуре при $x = l$ и различных начальных распределениях температуры.

а) Постоянная начальная температура; б) линейное начальное распределение температуры $V_0(l - |x|)/l$ (см. пункт 4); в) начальное распределение температуры $(V_0(l - |x|)/l + \text{const}$; г) параболическое начальное распределение температуры (см. пункт 5). Числа на кривых указывают $\varkappa t/l^2$.

коэффициентов температуропроводности [4]. Тепловой поток f на поверхность равен следующей величине:

$$f = -K\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=l} = \frac{2KV_0}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right], \tag{3.12}$$

или

$$f = \frac{KV_0}{(\pi\varkappa t)^{1/2}}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left[-\frac{n^2l^2}{\varkappa t}\right]\right\}. \tag{3.13}$$

Это решение было использовано при определении $\varkappa$ для составляющих земной коры [5]; кроме того, оно применялось при исследовании металлических стержней; при этом

определяли разность температур в стержне между точками $x=a$ и $x=b$ [6]. Точки a и b были выбраны таким образом, что

$$\cos(3\pi a/2l)=\cos(3\pi b/2l).$$

В этом случае второй член ряда, полученный из (3.8) для разности температур, обращается в нуль, а третий член ряда, содержащий множитель $\exp[-25\varkappa\pi^2 t/4l^2]$, очень быстро исчезает.

4. *Область* $-l<x<l$ *с начальной температурой* $V_0(l-|x|)/l$ *и температурой поверхности, равной нулю.* В этом случае

$$v=\frac{8V_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right], \tag{3.14}$$

или

$$v=\frac{v_0(l-|x|)}{l}-\frac{2V_0(\varkappa t)^{1/2}}{l}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{2nl+|x|}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)-\mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{(2n+2)l-|x|}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)\right\}, \tag{3.15}$$

5. *Область* $-l<x<l$ *с начальной температурой* $V_0(l^2-x^2)/l^2$ *и температурой поверхности, равной нулю*. В этом случае

$$v=\frac{32V_0}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2 n^2 t}{4l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \tag{3.16}$$

или

$$v=\frac{V_0(l^2-x^2)}{l^2}-\frac{2\varkappa tV_0}{l^2}+\frac{8\varkappa tV_0}{l^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{(2n+1)l-x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)+\mathrm{i}^2\Phi\left(\frac{(2n+1)}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)\right\}. \tag{3.17}$$

6. *Область* $-l<x<l$ *с начальной температурой* $V_0\cos(\pi x/2l)$ *и температурой поверхности, равной нулю.* В этом случае

$$v=V_0\cos\frac{\pi x}{2l}\exp\left[-\frac{\varkappa\pi^2 t}{4l^2}\right]. \tag{3.18}$$

Приведенные выше решения представляют значительный интерес, так как они дают качественное представление о том, как отводится тепло из пластины при заданном начальном распределении температуры. Из соотношения (3.5) следует, что в первую очередь исчезают более высокие гармоники в ряде Фурье для $f(x)$, оставляя основную гармонику, амплитуда которой уменьшается по экспоненциальному закону. Это фактически подтверждается и соотношением (3.18). На рис. 10 показано уменьшение температуры для четырех различных начальных распределений температур, а именно: для постоянного, линейного, «линейное + постоянное» и параболического распределения. Как мы видим, тепло отводится таким образом, что распределение температур приблизительно косинусоидально. Для случая постоянной начальной температуры тепло сначала отводится из области вблизи поверхности; при линейном распределении температур — из области вблизи центра; при «линейном + + постоянном» — как из центра, так и с поверхности.

§ 4. Область $0<x<l$. Начальная температура $f(x)$. Границы поддерживаются при постоянной температуре или изолированы

Если границы поддерживаются при постоянных температурах v_1 и v_2, то мы можем написать

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}\quad (0<x<l),$$

$$v=v_1\quad \text{при}\quad x=0,$$

$$v=v_2\quad \text{при}\quad x=l,$$

и

$$v = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Как и в § 14 гл. I, сведем эту задачу к задаче об установившейся температуре и к задаче, в которой границы поддерживаются при температуре, равной нулю.

Пусть

$$v = u + w,$$

где u и w удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad (0 < x < l),$$

$$u = v_1 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$u = v_2 \quad \text{при} \quad x = l$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l),$$

$$w = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0 \text{ и } x = l,$$

$$w = f(x) - u \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Отсюда сразу находим, что

$$u = v_1 + (v_2 - v_1)\frac{x}{l}$$

и, как следует из § 3 настоящей главы,

$$w = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right],$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left[f(x') - \left\{v_1 + (v_2 - v_1)\frac{x'}{l}\right\}\right] \sin\frac{n\pi x'}{l}\, dx'.$$

Таким образом,

$$v = v_1 + (v_2 - v_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{v_2 \cos n\pi - v_1}{n} \sin\frac{n\pi x}{l} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right] + \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right] \int_0^l f(x') \sin\frac{n\pi x'}{l}\, dx'. \tag{4.1}$$

Наиболее прост и наиболее важен случай *области* $-l < x < l$ *с нулевой начальной температурой и постоянной температурой* V *на плоскостях* $x = \pm l$ *при* $t > 0$. Решение, которое непосредственно следует из (4.1) или (3.8), имеет вид

$$v = V - \frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left[\frac{-\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right] \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \tag{4.2}$$

Вводя безразмерные параметры

$$T = \frac{\varkappa t}{l^2}, \qquad \xi = \frac{x}{l}, \tag{4.3}$$

можно записать (4.2) следующим образом:

$$\frac{v}{V} = 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 T}{4}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi\xi}{2}, \qquad (4.4)$$

и решение для всех значений $\varkappa$, l, t и x легко получить из семейства кривых в двух измерениях. На рис. 11 изображен ряд графиков зависимости v/V от ξ для различных значений T.

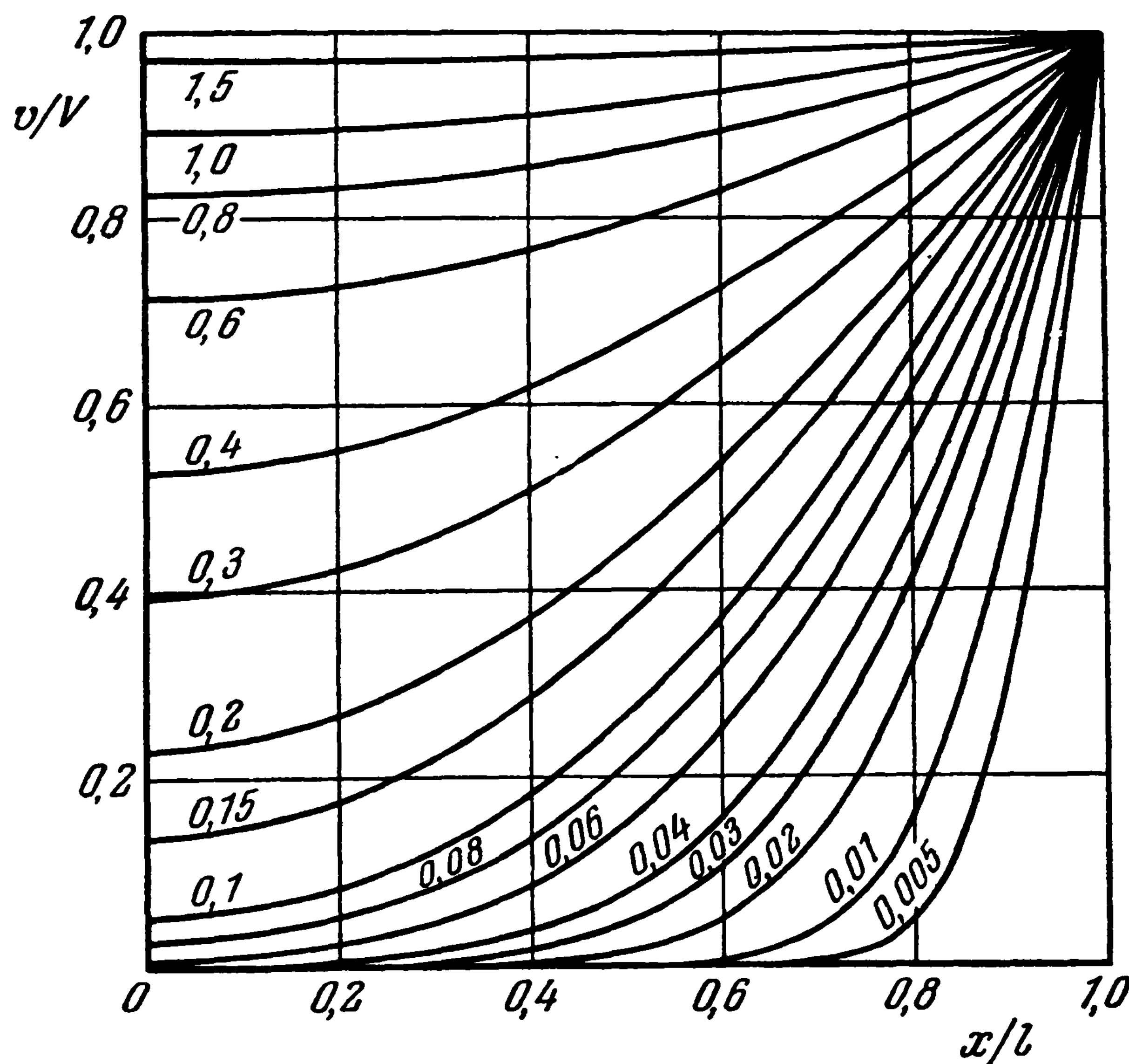


Рис. 11. Распределение температур в различные моменты времени в пластине $-l < x < l$ при нулевой начальной температуре и температуре поверхности, равной V.

Числа на кривых указывают значения $\varkappa t/l^2$.

На рис. 12 приведены графики для температур в центре*) ($x = 0$) и средних температур для пластины, цилиндра и сферы. Для случая, когда *конец* $x = 0$ *изолирован, конец* $x = l$ *поддерживается при температуре* V, *а начальная температура равна* $f(x)$, решение получается таким же, как и в §§ 3 и 4 данной главы, но теперь $f(x)$ будет уже выражаться рядом косинусов. Это решение записывается в виде

$$v = V + \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\times$$
$$\times\left\{\frac{2l(-1)^{n+1}V}{(2n+1)\pi} + \int_0^l f(x')\cos\frac{(2n+1)\pi x'}{2l}dx'\right\}. \qquad (4.5)$$

*) В работе [7] приводятся обширные таблицы численных значений температур в центре пластин и сфер.

Некоторые результаты для этого случая были приведены выше (см. стр. 101—103).

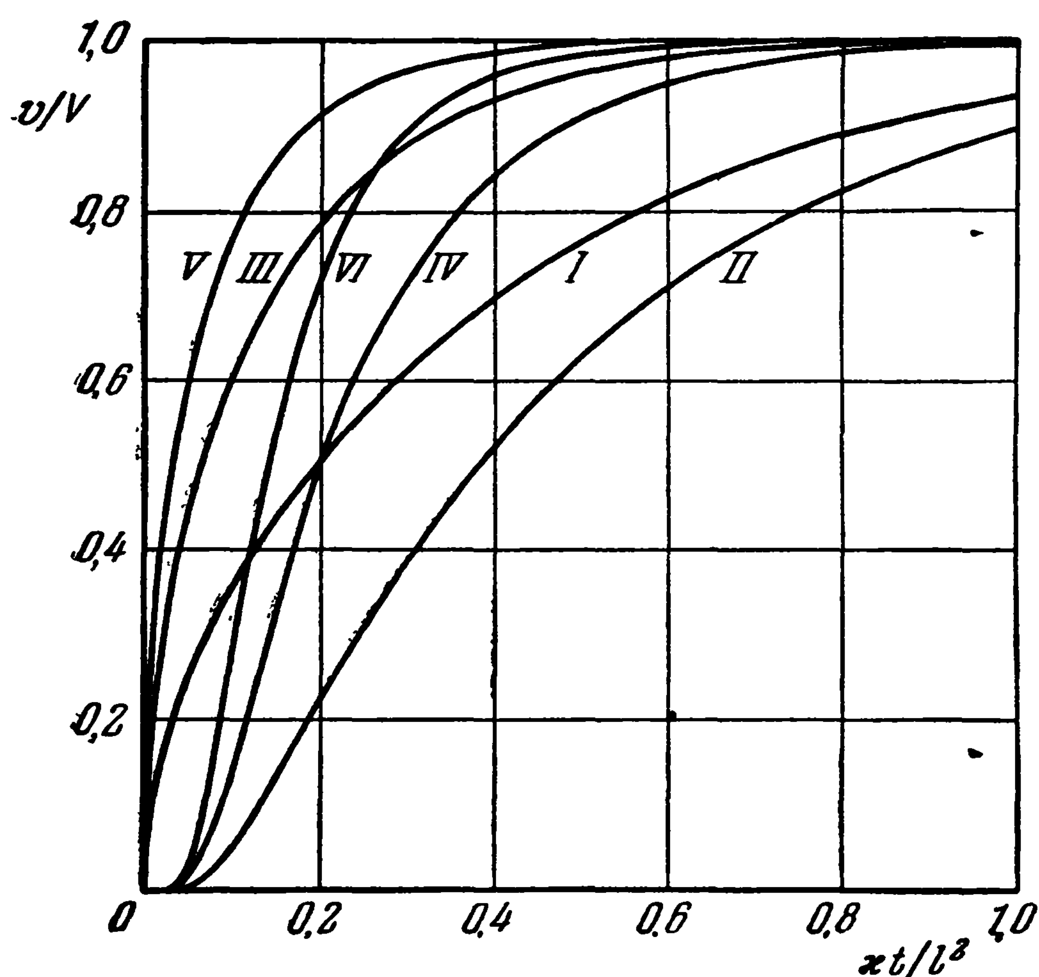


Рис. 12. Распределения средней температуры и температуры в центре для пластины толщиной $2l$ (I, II), неограниченного кругового цилиндра диаметром $2l$ (III, IV) и сферы диаметром $2l$ (V, VI).

Начальная температура равна нулю, температура поверхности равна V.

Если начальная температура равна $f(x)$ *и оба конца* $x=0$ *и* $x=l$ *изолированы*, то решение имеет вид

$$v=\frac{1}{l}\int_0^l f(x')\,dx'+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(x')\cos\frac{n\pi x'}{l}\,dx'. \quad (4.6)$$

§ 5. Область $0<x<l$. Температуры границ равны $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Начальная температура $f(x)$

В этом случае уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (0<x<l),$$

$$v=\varphi_1(t) \quad \text{при} \quad x=0,$$

$$v=\varphi_2(t) \quad \text{при} \quad x=l,$$

и

$$v=f(x) \quad \text{при} \quad t=0.$$

Следуя общему методу, приведенному в § 14 гл. I, положим

$$v=u+w,$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<l),$$

$$u=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=l,$$

$$u=f(x) \quad \text{при} \quad t=0$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l),$$
$$w = \varphi_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0,$$
$$w = \varphi_2(t) \quad \text{при} \quad x = l,$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение для u (см. § 3 данной главы) записывается в виде

$$u = \frac{2}{l} \sum_1^\infty \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right] \sin\frac{n\pi x}{l} \int_0^l f(x') \sin\frac{n\pi x'}{l}\, dx'.$$

Для определения w мы должны использовать теорему Дюамеля*) (§ 14 гл. I), при помощи которой решение для случая, когда температуры на поверхности равны $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, получается из решения, найденного для случая температур на поверхности, равных v_1 и v_2.

Если температура всей пластины в момент $t = \lambda$ равна нулю, а ее концы поддерживаются при температурах $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ в интервале от $t = \lambda$ до $t = t_1$, то тогда температура в момент времени t определяется соотношением

$$w = \varphi_1(\lambda)\left\{1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\exp\left[-\frac{\varkappa^2 n^2\pi^2(t-\lambda)}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\right\} + \\ + \varphi_2(\lambda)\left\{\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\cos n\pi \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2(t-\lambda)}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}.$$

Следовательно, при температурах поверхности концов, равных $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, получим

$$w = \int_0^t \left[\varphi_1(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}F_1(x, t-\lambda) + \varphi_2(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}F_2(x, t-\lambda)\right] d\lambda,$$

где

$$F_1(x, t-\lambda) = 1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2(t-\lambda)}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$F_2(x, t-\lambda) = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\cos n\pi \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2(t-\lambda)}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Отсюда

$$w = \frac{2\varkappa\pi}{l^2}\sum_1^\infty n \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l} \times \\ \times \int_0^t \exp\frac{\varkappa n^2\pi^2\lambda}{l^2}\left[\varphi_1(\lambda) - (-1)^n \varphi_2(\lambda)\right] d\lambda. \qquad (5.1)$$

*) Другой метод изложен в [8].

Наконец, окончательно получаем

$$v=\frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\left[\int_0^l f(x')\sin\frac{n\pi x'}{l}\,dx+\right.$$
$$\left.+\frac{n\varkappa\pi}{l}\int_0^t \exp\frac{\varkappa n^2\pi^2\lambda}{l^2}\{\varphi_1(\lambda)-(-1)^n\varphi_2(\lambda)\}\,d\lambda\right]. \quad (5.2)$$

Для области $0<x<l$ *с начальной температурой* $f(x)$, *когда на границе* $x=0$ *отсутствует поток тепла, а на границе* $x=l$ *поддерживается температура* $\varphi_2(t)$, решение, получаемое тем же способом, будет иметь вид

$$\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{\frac{(2n+1)\pi\varkappa(-1)^n}{2l}\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^t\exp\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2\lambda}{4l^2}\varphi_2(\lambda)\,d\lambda+\int_0^l f(x')\cos\frac{(2n+1)\pi x'}{2l}\,dx'\right\}. \quad (5.3)$$

Приведем ряд решений, представляющих определенную практическую ценность. Они даются для области $-l<x<l$, поскольку в таких симметричных случаях легче проводить сравнение с соответствующими результатами для цилиндра и сферы.

1. Область $-l<x<l$ *с начальной температурой, равной нулю. При* $t>0$ *границы* $x=\pm l$ *поддерживаются при температуре* kt [9, 10] *). В данном случае

$$v=kt+\frac{k(x^2-l^2)}{2\varkappa}+\frac{16kl^2}{\varkappa\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \quad (5.4)$$

2. Область $-l<x<l$ *с начальной температурой, равной нулю. При* $t>0$ *границы* $x=\pm l$ *поддерживаются при температуре* $V(1-e^{-\beta t})$. В данном случае

$$v=V-Ve^{-\beta t}\frac{\cos x(\beta/\varkappa)^{1/2}}{\cos l(\beta/\varkappa)^{1/2}}-$$
$$-\frac{16\beta Vl^2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]}{(2n+1)[4\beta l^2-\varkappa\pi^2(2n+1)^2]}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (5.5)$$

при условии, что β не равно ни одному из значений $\varkappa(2n+1)^2\pi^2/4l^2$. Решение (3.5) полезно для случая, когда температура границы изменяется быстро, но не мгновенно [11].

3. Область $-l<x<l$ *с начальной температурой, равной нулю. При* $t>0$ *границы* $x=\pm l$ *поддерживаются при температуре* $Ve^{\nu t}$.

*) В этих работах приводятся также некоторые численные результаты.

В данном случае

$$v = Ve^{\nu t}\frac{\operatorname{ch} x(\nu/\varkappa)^{1/2}}{\operatorname{ch} l(\nu/\varkappa)^{1/2}} - \frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]}{(2n+1)\left[1+\frac{4\nu l^2}{(2n+1)^2\pi^2\varkappa}\right]}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \quad (5.6)$$

§ 6. Пластина с периодически изменяющейся температурой поверхности

Рассмотрим вначале задачу для *пластины* $-l < x < l$ *с начальной температурой, равной нулю, и температурой поверхности, изменяющейся по закону* $\sin(\omega t+\varepsilon)$ *при* $t > 0$. Решение, получаемое из (5.2) данной главы или из § 6 гл. XII, имеет вид

$$v = A\sin(\omega t+\varepsilon+\varphi) + 4\pi\varkappa\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)\left[4l^2\omega\cos\varepsilon - \varkappa(2n+1)^2\pi^2\sin\varepsilon\right]}{16l^4\omega^2+\varkappa^2\pi^4(2n+1)^4}\times \exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (6.1)$$

где

$$A = \left|\frac{\operatorname{ch} k^*x(1+i)}{\operatorname{ch} k^*l(1+i)}\right| = \left\{\frac{\operatorname{ch} 2k^*x+\cos 2k^*x}{\operatorname{ch} 2k^*l+\cos 2k^*l}\right\}^{1/2}, \quad (6.2)$$

$$\varphi = \arg\left\{\frac{\operatorname{ch} k^*x(1+i)}{\operatorname{ch} k^*l(1+i)}\right\}, \quad (6.3)$$

$$k^* = \left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}. \quad (6.4)$$

Первый член соотношения (6.1) представляет собой решение для установившегося периодического состояния, второй член — для неустановившегося состояния. Первый член можно найти из первых основных уравнений при помощи рассуждений, используемых в § 6 гл. II (см. соотношения (6.4) — (6.6)) для полуограниченного твердого тела.

Величины A и φ, представляющие собой амплитуду и фазу установившегося колебания температуры в точке x, являются функциями двух безразмерных величин x/l и k^*l.

Характер изменения A и φ по поперечному сечению пластины для значений k^*l, равных 0,5, 1,0, 1,5, 2,0, 3,0, 5,0, 10,0 kl, показан на рис. 13 и 14.

Для пластины $0 < x < l$ *с начальной температурой, равной нулю, и границами* $x = 0$ *и* $x = l$, *на которых поддерживаются температуры, равные соответственно нулю и* $\sin(\omega t+\varepsilon)$, можно написать

$$v = A\sin(\omega t+\varepsilon+\varphi) + 2\pi\varkappa\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n(\varkappa n^2\pi^2\sin\varepsilon - \omega l^2\cos\varepsilon)}{\varkappa^2n^4\pi^4+\omega^2l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right], \quad (6.5)$$

где

$$A = \left|\frac{\operatorname{sh} k^*x(1+i)}{\operatorname{sh} k^*l(1+i)}\right| = \left\{\frac{\operatorname{ch} 2k^*x-\cos 2k^*x}{\operatorname{ch} 2k^*l-\cos 2k^*l}\right\}^{1/2}, \quad (6.6)$$

$$\varphi = \arg\frac{\operatorname{sh} k^*x(1+i)}{\operatorname{sh} k^*l(1+i)},$$

а k^* определяется соотношением (6.4).

Если температуру поверхности можно представить рядом Фурье

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin(m\omega t + \varepsilon_m), \tag{6.7}$$

то решение для установившегося периодического состояния имеет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m A_m \sin(m\omega t + \varepsilon_m + \varphi_m), \tag{6.8}$$

где A_m и φ_m определяются из соотношений (6.2) и (6.3) или — при рассмотрении второй задачи — из соответствующих соотношений, в которых ω заменено на $m\omega$.

Так как в соотношении (6.8) амплитуды и фазы A_m и φ_m определяются при помощи довольно сложных выражений, приведенный выше метод, хотя он остается всегда пригодным, часто неудобен. Приведем теперь другой изящный метод ([12], см. также § 8 гл. IV и § 5 гл. XV), где решение выражается в виде тригонометрического ряда по x с коэффициентами, которые являются функциями времени. Этот метод, в частности, полезен при рассмотрении ряда простых колебаний температуры поверхности, которые часто возникают на практике (например, «прямоугольные» и «пилообразные» колебания).

Рис. 13. Изменение амплитуды установившегося колебания температуры в пластине, вызываемое гармоническим изменением температуры поверхности.

В качестве первого примера мы рассмотрим случай *установившейся периодически изменяющейся температуры в пластине* $0 < x < l$, *когда граница* $x = 0$ *поддерживается при температуре, равной нулю, а граница* $x = l$ — *при температуре*

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(t) &= V, \quad rT < t < rT + T_1, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \\ \varphi_2(t) &= 0, \quad rT + T_1 < t < (r+1)T. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Иными словами, температура V «включена» на время T_1 и «выключена» на время $(T - T_1)$, причем эти циклы повторяются неограниченное число раз.

Предположим, что такое колебание температуры поверхности продолжается так долго, что наступает установившееся периодическое состояние и исчезает влияние начальной температуры. Приступим к нахождению температуры в момент t' после начала периода «включения».

В соотношении (5.2) мы полагаем, что $f(x) = 0$, $\varphi_1(\lambda) = 0$ и

$$t = rT + t', \tag{6.10}$$

где $0 < t' < T_1$ и r — большая величина. Если мы положим

$$\alpha_n = \frac{\varkappa n^2 \pi^2}{l^2}, \tag{6.11}$$

то из (5.2) данной главы следует, что решение принимает вид

$$v = \frac{2\pi\varkappa}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-\alpha_n t} \sin\frac{n\pi x}{l} \int_0^t e^{\alpha_n \lambda} \varphi_2(\lambda)\, d\lambda. \tag{6.12}$$

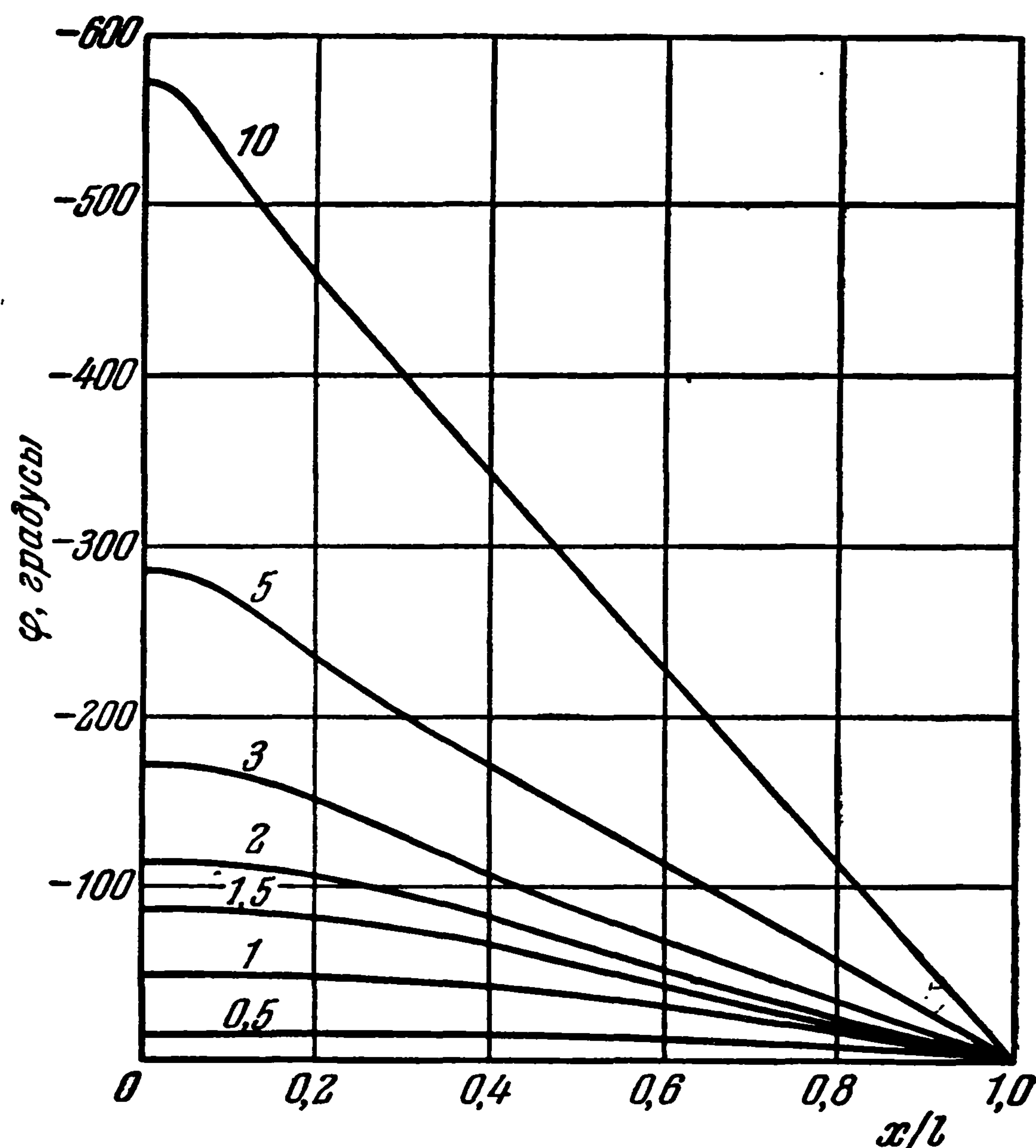


Рис. 14. Изменение фазы установившегося колебания температуры в пластине, вызываемое гармоническим изменением температуры поверхности.

Вводя величины, определяемые условиями (6.9) и (6.10), получим

$$e^{-\alpha_n t} \int_0^t e^{\alpha_n \lambda} \varphi_2(\lambda)\, d\lambda = V e^{-\alpha_n t} \left\{ \int_0^{T_1} + \int_T^{T+T_1} + \ldots + \int_{(r-1)T}^{[(r-1)T+T_1]} + \int_{rT}^{(rT+t')} e^{\alpha_n \lambda}\, d\lambda \right\} =$$

$$= \frac{V}{\alpha_n} e^{-\alpha_n t} \left\{ \left(e^{\alpha_n T_1} - e^{\alpha_n T}\right) \sum_{s=0}^{r-1} e^{s\alpha_n T} - 1 + e^{\alpha_n T} \right\} =$$

$$= \frac{V}{\alpha_n} e^{-\alpha_n t} \left\{ \frac{\left(e^{\alpha_n T_1} - e^{\alpha_n T}\right)\left(1 - e^{r\alpha_n T}\right)}{1 - e^{\alpha_n T}} - 1 + e^{\alpha_n T} \right\}. \tag{6.13}$$

Для больших значений r (6.13) принимает вид

$$\frac{V}{\alpha_n} \left\{ 1 - \frac{e^{\alpha_n (T_1 - t')} - e^{\alpha_n (T - t')}}{1 - e^{\alpha_n T}} \right\}. \tag{6.14}$$

Таким образом, для больших значений времени наше решение запишется следующим образом:

$$v=\frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\left\{1-\frac{e^{\alpha_n(T_1-t')}-e^{\alpha_n(T-t')}}{1-e^{\alpha_n T}}\right\}. \qquad (6.15)$$

Так как

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{x}{l}, \qquad (6.16)$$

то уравнения (6.15) можно представить также в виде

$$v=\frac{Vx}{l}+\frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\frac{e^{\alpha_n(T_1-t')}-e^{\alpha_n(T-t')}}{1-e^{\alpha_n T}}. \qquad (6.17)$$

Аналогичным образом, положив $t=rT+T_1+t''$, где r — большая величина, найдем

$$Ve^{-\alpha_n t}\int_0^t e^{\alpha_n\lambda}\varphi_2(\lambda)\,d\lambda\to V\frac{e^{\alpha_n(T-T_1-t'')}-e^{\alpha_n(T-T'')}}{\alpha_n\left(1-e^{\alpha_n T}\right)}. \qquad (6.18)$$

Следовательно, через время t'' после начала интервала «выключения» температура равна

$$v=\frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left[e^{\alpha_n(T-T_1-t'')}-e^{\alpha_n(T-t'')}\right]}{n\left[1-e^{\alpha_n T}\right]}\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (6.19)$$

Эти решения обычно более удобны для численных расчетов, чем ряд Фурье (6.8). Кроме того, данный метод оказывается достаточно общим и формулы (6.14) и (6.18) непосредственно пригодны для любой задачи, в которой решение для постоянных внешних условий выражается в виде суммы ряда экспонент с показателями $(-\alpha_n t)$, а решение для внешних условий, задаваемых (6.9), можно получить при помощи теоремы Дюамеля. Таким образом, используя результаты §§ 8 и 12 настоящей главы с соответствующими значениями α_n, легко записать решения задач по теплообмену стержня со средой, имеющей температуру $\varphi_2(t)$, или с подводом тепла, задаваемым функцией $\varphi_2(t)$, и т. д., где $\varphi_2(t)$ определяется из условий (6.9).

Используя (6.14) и (6.18) в (5.3) данной главы, мы получим следующие решения задачи *для случая установившейся, периодически изменяющейся температуры в стержне* $0<x<l$, *когда на плоскости* $x=0$ *отсутствует тепловой поток, а на плоскости* $x=l$ *поддерживается температура* $\varphi_2(t)$, *определяемая условиями* (6.9): для интервалов «включения»

$$\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{1-\frac{e^{\beta_n(T_1-t')}-e^{\beta_n(T-t')}}{1-e^{\beta_n T}}\right\} \qquad (6.20)$$

и для интервалов «выключения»

$$\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\,\frac{e^{\beta_n(T-T_1-t'')}-e^{\beta_n(T-t'')}}{1-e^{\beta_n T}}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \qquad (6.21)$$

где

$$\beta_n=\varkappa(2n+1)^2\pi^2/4l^2. \qquad (6.22)$$

§ 7. Установившаяся периодически изменяющаяся температура в составных пластинах

Такие задачи лучше всего решать матричным методом, который обычно используется в теории электрических цепей [13—17]. Сначала рассмотрим периодически изменяющуюся температуру в пластине в обозначениях, принятых в этой теории. Предполагается, что все величины умножены на временной множитель $\exp(i\omega t)$; мы опускаем его повсюду, и он появляется лишь в конце вычисления, если необходимо выбирать действительные или мнимые части. В каждой точке нас всегда будут интересовать две величины — температура v и тепловой поток f. В этом случае, как и в § 6 гл. II, общее решение, соответствующее установившимся периодически изменяющимся состояниям (как указывалось выше, мы опускаем временной множитель), имеет вид

$$v_x = P \operatorname{sh} k^*x(1+i) + Q \operatorname{ch} k^*x(1+i), \tag{7.1}$$

$$f_x = -Kk^*(1+i)\operatorname{ch} k^*x(1+i) - Kk^*Q(1+i)\operatorname{sh} k^*x(1+i), \tag{7.2}$$

где

$$k^* = \left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}, \tag{7.3}$$

P и Q — (комплексные) константы, а v_x и f_x — температура и тепловой поток в точке x.

Пусть v и f — температура и тепловой поток на плоскости $x=0$ пластины, а v' и f' — соответствующие величины на плоскости $x=l$. Тогда, если заданы любые две из этих четырех величин, то можно определить P и Q и, следовательно, оставшиеся две величины из v, v', f, f' легко выразить через первые две. В частности,

$$\left.\begin{aligned} v' &= Av + Bf, \\ f' &= Cv + Df, \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

где

$$A = \operatorname{ch} k^*l(1+i), \qquad B = -\frac{\operatorname{sh} k^*l(1+i)}{Kk^*(1+i)}, \tag{7.5}$$

$$C = -Kk^*(1+i)\operatorname{sh} k^*l(1+i), \quad D = \operatorname{ch} k^*l(1+i). \tag{7.6}$$

Из уравнений (7.5) и (7.6) следует, что

$$AD - BC = 1. \tag{7.7}$$

Решая уравнения (7.4), получаем

$$\left.\begin{aligned} v &= Dv' - Bf', \\ f &= -Cv' + Af'. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Существенно ново здесь то, что уравнение (6.4) можно рассматривать как матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} v' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ f \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

связывающее две матрицы (v', f') и (v, f) (каждая из двух строк и одного столбца) при помощи следующего простого правила умножения матриц: если a_{rs} — элемент r-й строки и s-го столбца в матрице (a_{rs}), состоящей из m строк и n столбцов, а b_{rs} — элемент в матрице (b_{rs}), состоящей из n строк и t столбцов, то произведение матриц (a_{rs}) и (b_{rs}) представляет собой матрицу (c_{rs}) из m строк и t столбцов, причем элемент c_{rs} в ряду r и столбце s

имеет вид *)

$$c_{rs}=\sum_{j=1}^{n} a_{rj}b_{js}. \tag{7.10}$$

Например,

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1A_2+B_1C_2 & A_1B_2+B_1D_2 \\ C_1A_2+D_1C_2 & C_1B_2+D_1D_2 \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

Предположим теперь, что мы имеем составную пластину, состоящую из n слоев, r-й слой которой характеризуется толщиной l_r, коэффициентом теплопроводности K_r, коэффициентом температуропроводности $\varkappa_r$ и величинами v_r, f_r и v'_r, f'_r на его левой и правой поверхностях соответственно. Тогда в случае идеального теплового контакта между плоскостями слоев повторное применение уравнения (7.9) дает

$$\begin{pmatrix} v'_n \\ f'_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

где A_r, B_r и т. д. определяются из формул (7.5) и (7.6) для отдельных слоев. Умножение матриц в соотношении (7.12) можно производить последовательно при помощи формулы (7.11). Таким способом можно записать точные формулы для пластины, состоящей из n слоев, но они оказываются исключительно сложными. Ценность данного метода заключается в том, что он позволяет очень легко получить числовые величины для частных случаев, подставляя численные значения A_r, B_r ..., в (7.12) и умножая *числовые* матрицы.

Если между слоями пластины или на поверхностях имеются контактные сопротивления, то их также можно представить в виде матриц и включить в произведения (7.12). Например, если контактное сопротивление между первым и вторым слоем равно R_1, то

$$f'_1=f_2=(v'_1-v_2)/R_1, \tag{7.13}$$

или

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'_1 \\ f'_1 \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

Отсюда, например,

$$\begin{pmatrix} v'_2 \\ f'_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

Конечный результат этих вычислений представляет собой два линейных соотношения, связывающих температуры и тепловые потоки v_1, v'_n, f_1, f'_n на двух поверхностях составной пластины. Граничные условия дадут еще два соотношения, и поэтому мы сможем найти четыре величины. В случае необходимости температуру в пределах любого слоя можно определить из формулы (7.1).

В качестве простого примера рассмотрим пластину $0<x<l$, в которой на границе $x=0$ теплообмен отсутствует, а на границе $x=l$ с термическим сопротивлением R происходит теплообмен со средой, температура которой меняется по закону $V\cos\omega t$. Тогда, если v_1 и $f_1(=0)$ — температура и тепловой поток при $x=0$, а V и f_2 — температура и тепловой поток во

*) Следует отметить, что произведение матриц не коммутативно.

внешней среде, то из (7.14) и (7.9) следует, что

$$\begin{pmatrix} V \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_1 - RCv_1 \\ Cv_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$v_1 = \frac{V}{A - RC} = V \{\operatorname{ch} k^* l (1 + i) + RKk^* (1 + i) \operatorname{sh} k^* l (1 + i)\}^{-1}.$$

Вводя временной множитель $\exp(i\omega t)$ и беря действительную часть, получим решение, которое согласуется с решением (12.7) данной главы.

§ 8. Пластина с заданным тепловым потоком на ее границе

Задачи подобного типа приобретают в технике все большее и большее значение. Они делятся на два типа. В задачах первого типа тепло поступает от плоского подогревателя, погруженного в твердое тело. В этом случае потери тепла на границе отсутствуют и граничное условие точно удовлетворяется, если теплоемкость подогревателя пренебрежимо мала; в противном случае его можно считать идеальным проводником, как и в § 13 данной главы. В задачах второго типа, которые возникают при индукционном нагреве поверхности металла, эта поверхность может выделять тепло, и если постулируется линейный перенос тепла с коэффициентом теплообмена в среду с нулевой температурой, равным H, то из соотношения (9.4) гл. I следует, что граничное условие запишется в виде

$$-K \frac{\partial v}{\partial n} = -F + Hv, \tag{8.1}$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial n} + h(v - V) = 0, \tag{8.2}$$

где F — тепловой поток, поступающий через поверхность в твердое тело, а $V = F/H$. Таким образом, для постоянного H эта задача сводится к задаче о нагревании в результате теплообмена со средой, имеющей температуру V (см. § 11 данной главы).

Ниже приводятся некоторые решения для случая, когда потери тепла с поверхности отсутствуют. Эти решения легче всего получить при помощи методов, изложенных в гл. XII.

1. Область $0 < x < l$ *с начальной температурой, равной нулю. Через плоскости* $x = l$ *тепловой поток внутрь твердого тела постоянен и равен* F_0. *Через плоскость* $x = 0$ *тепловой поток отсутствует* [18—23]. В данном случае

$$v = \frac{F_0 t}{\rho c l} + \frac{F_0 l}{K} \left\{ \frac{3x^2 - l^2}{6l^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2 \pi^2 t}{l^2} \right] \cos \frac{n\pi x}{l} \right\}, \tag{8.3}$$

или

$$v = \frac{2F_0 (\varkappa t)^{1/2}}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathrm{i}\Phi^* \left(\frac{(2n+1) l - x}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right) + \mathrm{i}\Phi^* \left(\frac{(2n+1) l + x}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right) \right\}. \tag{8.4}$$

Распределение температуры в (8.3) есть сумма линейной функции времени $F_0 t/\rho c l$ и корректирующего фактора, который является функцией времени и положения. График этого корректирующего члена приведен на рис. 15.

2. *Область* $0 < x < l$ *с начальной температурой, равной нулю. Через плоскость* $x = l$ *тепловой поток постоянен и равен* F_0. *Плоскость* $x = 0$ *поддерживается при температуре, равной нулю.* В данном случае

$$v = \frac{F_0 x}{K} - \frac{8F_0 l}{K\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \qquad (8.5)$$

или

$$v = \frac{2F_0(\varkappa t)^{1/2}}{K}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{(2n+1)l-x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) - \mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{(2n+1)l+x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right)\right\}. \qquad (8.6)$$

3. *Тепловой поток задан функцией времени.* В этом случае для нахождения решения можно воспользоваться теоремой Дюамеля. Отметим два простых решения

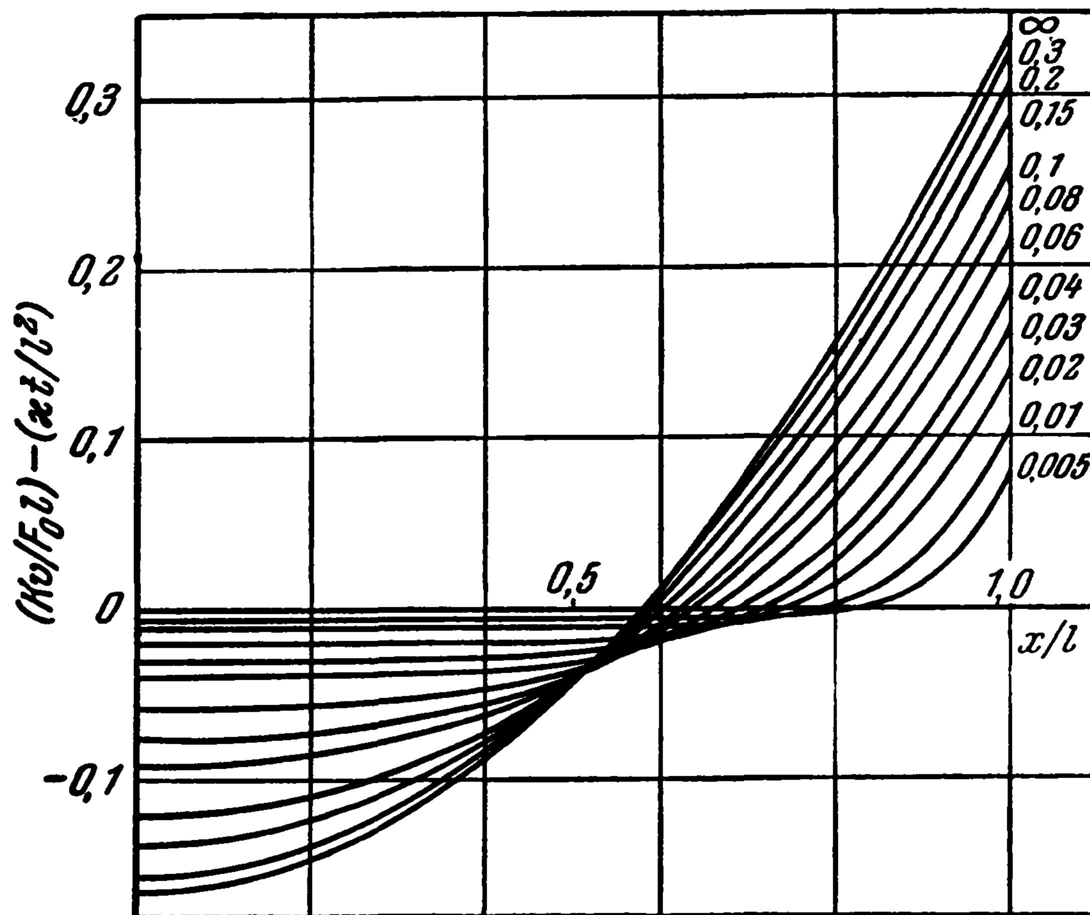


Рис. 15. Распределение значений $(Kv/F_0 l) - (\varkappa t/l^2)$ в пластине толщиной l в отсутствие теплового потока при $x = 0$ и при постоянном тепловом потоке при $x = l$.

Числа на кривых указывают величины $\varkappa t/l^2$.

для теплового потока $F_0 t^{\frac{1}{2}m}$, где $m = -1, 0, 1, \ldots$; уравнения (8.4) и (8.6) сводятся соответственно к следующим:

$$v = \frac{2^{m+1}F_0\varkappa^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}(m+1)}\Gamma\left(\frac{1}{2}m+1\right)}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mathrm{i}^{m+1}\Phi^*\frac{(2n+1)l-x}{2(\varkappa t)^{1/2}} + \mathrm{i}^{m+1}\Phi^*\frac{(2n+1)l+x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right\} \qquad (8.7)$$

и

$$v = \frac{2^{m+1}F_0\varkappa^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}(m+1)}\Gamma\left(\frac{1}{2}m+1\right)}{K}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\mathrm{i}^{m+1}\Phi^*\frac{(2n+1)l-x}{2(\varkappa t)^{1/2}} - \mathrm{i}^{m+1}\Phi^*\frac{(2n+1)l-x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right\}. \qquad (8.8)\,^{*)}$$

*) Для случая $m = 2$ см. [24].

§ 9. Область $0 < x < l$. Теплообмен на границах в среду с температурой, равной нулю. Начальная температура равна $f(x)$

В этом случае наши уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l), \tag{9.1}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0, \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0 \qquad \text{при} \qquad x = l \tag{9.3}$$

и

$$v = f(x) \qquad \text{при} \qquad t = 0. \tag{9.4}$$

Выражение $e^{-\varkappa\alpha^2 t}(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x)$ удовлетворяет уравнению (9.1). Оно удовлетворяет также уравнениям (9.2) и (9.3) при условии, что

$$-\alpha B + hA = 0$$

и

$$\alpha(B\cos\alpha l - A\sin\alpha l) + h(B\sin\alpha l + A\cos\alpha l) = 0.$$

Отсюда $A/B = \alpha/h$ и

$$\operatorname{tg}\alpha l = \frac{2\alpha h}{\alpha^2 - h^2}. \tag{9.5}$$

Следовательно, выражение

$$A\left(\cos\alpha x + \frac{h}{\alpha}\sin\alpha x\right)e^{-\varkappa\alpha^2 t}$$

удовлетворяет уравнениям (9.1), (9.2) и (9.3), где A — произвольная константа и α — некоторый, отличный от нуля корень уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha l = \frac{2h\alpha}{\alpha^2 - h^2}.$$

Чтобы составить себе представление о совокупности действительных корней*) уравнения (9.5), необходимо лишь отметить, что они соответствуют абсциссам общих точек кривых

$$\eta = 2\operatorname{ctg}\xi \qquad \text{и} \qquad \eta = \frac{\xi}{hl} - \frac{hl}{\xi},$$

где мы положили $\alpha l = \xi$.

Вторая из этих кривых представляет собой гиперболу с центром в начале координат и асимптотами

$$\xi = 0 \qquad \text{и} \qquad \eta = \frac{\xi}{hl}.$$

Если начертить эту гиперболу и котангенсоиду (рис. 16), то мы увидим, что в каждом из интервалов $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ... лежит положительный корень уравнения, а отрицательные корни по абсолютным величинам равны положительным. Ясно также, что кратных корней нет.

Кроме того, очевидно, что уравнение (9.5) не может иметь чисто мнимого корня ib, так как мы должны были бы в этом случае написать

$$\operatorname{th} lb + \frac{2hb}{b^2 + h^2} = 0,$$

что невозможно, поскольку оба члена имеют одинаковый знак.

*) Об этих корнях см. § 10 данной главы. Там же приведены и их численные значения.

В конце данного параграфа мы покажем также, что уравнение (9.5) не может иметь комплексных корней вида $a \pm ib$; следовательно, все его корни действительны.

Предположим, что $f(x)$ можно разложить в ряд

$$f(x) = A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots, \tag{9.6}$$

где

$$X_n = \cos\alpha_n x + \frac{h}{\alpha_n}\sin\alpha_n x, \tag{9.7}$$

а α_n — n-й положительный корень уравнения (9.5).

Тогда решение нашей задачи будет иметь вид

$$v = \sum_1^\infty A_nX_ne^{-\varkappa\alpha_n^2 t}. \tag{9.8}$$

К вопросу о возможности разложения (9.6) и справедливости решения (9.8) мы еще вернемся в § 1 гл. XIV. Если предположить, что такое разложение существует и что этот ряд можно интегрировать почленно, то значения

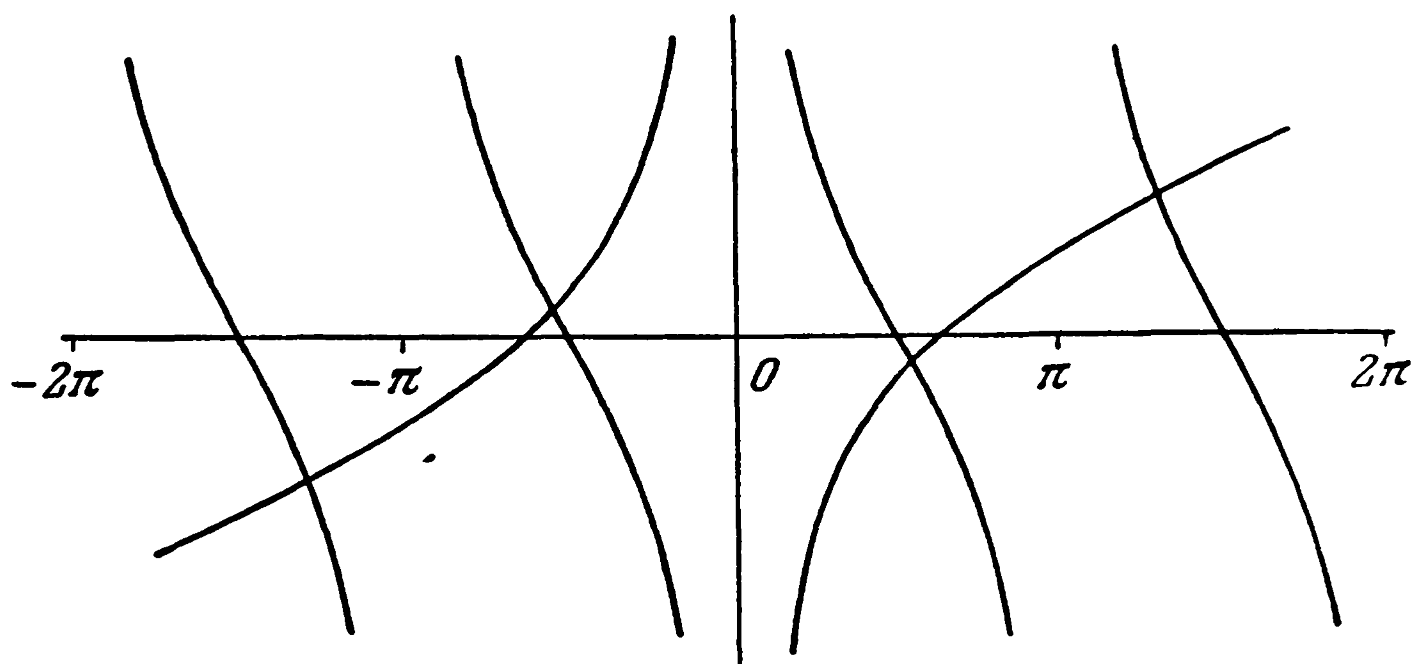


Рис. 16.

коэффициентов нетрудно получить тем же способом, каким при аналогичных предположениях находят коэффициенты ряда Фурье.

Для этого нам нужно доказать, что

$$\int_0^l X_mX_n\,dx = 0 \quad (m \neq n) \tag{9.9}$$

и

$$\int_0^l X_n^2\,dx = \frac{(\alpha_n^2 + h^2)\,l + 2h}{2\alpha_n^2}. \tag{9.10}$$

Это мы сейчас и сделаем.

Так как

$$\frac{d^2X_m}{dx^2} + \alpha_m^2X_m = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2X_n}{dx^2} + \alpha_n^2X_n = 0,$$

то

$$(\alpha_m^2 - \alpha_n^2)\int_0^l X_mX_n\,dx = \int_0^l \left(X_m\frac{d^2X_n}{dx^2} - X_n\frac{d^2X_m}{dx^2}\right)dx = \left[X_m\frac{dX_n}{dx} - X_n\frac{dX_m}{dx}\right]_0^l.$$

Но

$$-\frac{dX_r}{dx}+hX_r=0 \quad \text{при} \quad x=0$$

и

$$\frac{dX_r}{dx}+hX_r=0 \quad \text{при} \quad x=l,$$

где r — любое целое положительное число.

Тогда

$$(\alpha_m^2-\alpha_n^2)\int_0^l X_m X_n\,dx=0$$

и, если m не равно n, то

$$\int_0^l X_m X_n\,dx=0.$$

Чтобы получить величину $\int_0^l X_n^2\,dx$, напомним, что

$$\alpha_n^2\int_0^l X_n^2\,dx=-\int_0^l X_n\frac{d^2X_n}{dx^2}\,dx.$$

Следовательно,

$$\alpha_n^2\int_0^l X_n^2\,dx=-\left[X_n\frac{dX_n}{dx}\right]_0^l+\int_0^l\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx.$$

Но

$$\alpha_n X_n=\alpha_n\cos\alpha_n x+h\sin\alpha_n x$$

и

$$\frac{dX_n}{dx}=-\alpha_n\sin\alpha_n x+h\cos\alpha_n x.$$

Поэтому

$$\alpha_n^2X_n^2+\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2=\alpha_n^2+h^2$$

и

$$\alpha_n^2\int_0^l X_n^2\,dx+\int_0^l\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx=(\alpha_n^2+h^2)\,l.$$

Но мы видели, что

$$\alpha_n^2\int_0^l X_n^2\,dx-\int_0^l\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx=-\left[X_n\frac{dX_n}{dx}\right]_0^l.$$

Следовательно,

$$2\alpha_n^2\int_0^l X_n^2\,dx=l(\alpha_n^2+h^2)-\left[X_n\frac{dX_n}{dx}\right]_0^l.$$

Но

$$-\frac{dX_n}{dx}+hX_n=0 \quad \text{при} \quad x=0$$

и

$$\frac{dX_n}{dx}+hX_n=0 \quad \text{при} \quad x=l.$$

Следовательно,

$$X_n \frac{dX_n}{dx} = -hX_n^2 \quad \text{при} \quad x = l$$

и

$$X_n \frac{dX_n}{dx} = hX_n^2 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Но

$$\alpha_n^2 X_n^2 + \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 = \alpha_n^2 + h^2.$$

Следовательно,

$$X_n^2 = 1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l.$$

Таким образом,

$$\left[X_n \frac{dX_n}{dx}\right]_0^l = -2h$$

и

$$\int_0^l X_n^2\,dx = \frac{(\alpha_n^2 + h^2)\,l + 2h}{2\alpha_n^2}.$$

Итак, если мы предположим, что разложение в ряд возможно и что ряд можно интегрировать почленно, то

$$A_n \int_0^l X_n^2\,dx = \int_0^l f(x)\,X_n\,dx$$

и

$$A_n = \frac{2\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + h^2)\,l + 2h} \int_0^l f(x)\,X_n\,dx. \tag{9.11}$$

Таким образом *),

$$v = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{\alpha_n \cos\alpha_n x + h\sin\alpha_n x}{(\alpha_n^2 + h^2)\,l + 2h} \int_0^l f(x)\,(\alpha_n \cos\alpha_n x + h\sin\alpha_n x)\,dx. \tag{9.12}$$

Если на границах $x = 0$ и $x = l$ происходит теплообмен со средой с температурами v_1 и v_2 соответственно, то данную задачу можно свести к разобранной выше, воспользовавшись заменой

$$v = u + w.$$

Здесь u — функция только от x, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (0 < x < l),$$

$$-\frac{du}{dx} + h(u - v_1) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

и

$$\frac{du}{dx} + h(u - v_2) = 0 \quad \text{при} \quad x = l,$$

так что

$$u = \frac{(v_2 - v_1)\,hx + v_1(1 + lh) + v_2}{lh + 2},$$

*) Во всех рассуждениях предполагается, что $h > 0$. Если $h = 0$, т. е. поток тепла через плоскости $x = 0$ и $x = l$ отсутствует, то решение (9.12) остается справедливым (см. соотношение (4.6) гл. III), если мы добавим к нему член $\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx$.

а w — функция от x и t, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l),$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x} + hw = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + hw = 0 \quad \text{при} \quad x = l$$

и

$$w = f(x) - u \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Задачи, в которых один конец стержня поддерживается при постоянной температуре, а на втором происходит теплообмен с окружающей средой, либо задачи, в которых один конец совершенно изолирован, можно рассматривать тем же способом. Некоторые результаты приводятся в §§ 10 и 11 настоящей главы.

Мы отмечали выше, что уравнение

$$\operatorname{tg} \alpha l = \frac{2\alpha h}{\alpha^2 - h^2}$$

не может иметь комплексных корней вида $a \pm ib$.

Если бы это было возможно, то мы получили бы два сопряженных корня $a \pm ib$, и они дали бы два выражения

$$X = \cos \alpha x + \frac{h}{\alpha} \sin \alpha x, \qquad X' = \cos \alpha' x + \frac{h}{\alpha'} \sin \alpha' x,$$

где

$$\alpha = a + ib \quad \text{и} \quad \alpha' = a - ib.$$

Теперь мы видим, что для любых двух неравных корней уравнения (9.5)

$$\int_0^l X_m X_n \, dx = 0.$$

Но это применимо также к X и X', и следовательно,

$$\int_0^l XX' \, dx = 0.$$

Отделяя в X действительную и мнимую части

$$X = R + iS \quad \text{и} \quad X' = R - iS,$$

мы должны были бы получить

$$\int_0^l (R^2 + S^2) \, dx = 0,$$

что невозможно.

Итак, мы убедились в том, что уравнение (9.5) имеет только действительные корни.

§ 10. Область $-l < x < l$. На границах $x = \pm l$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры. Начальная температура $f(x)$

Часто начало координат удобно выбирать в центре исследуемой области, так как тогда яснее выявляется любая симметрия решения. Часто полезно также считать толщину пластины равной $2l$, так как тогда результаты легче сравнивать с результатами для цилиндров и сфер диаметром $2a$. По этим

причинам перепишем соответствующим образом выражение (9.12). Оно будет иметь вид

$$v=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\frac{c_n\cos\alpha_n x+d_n\sin\alpha_n x}{(\alpha_n^2+h^2)l+h}\int_{-l}^{l} f(x)[c_n\cos\alpha_n x+d_n\sin\alpha_n x]\,dx, \tag{10.1}$$

где

$$c_n=h\sin\alpha_n l+\alpha_n\cos\alpha_n l, \tag{10.2}$$

$$d_n=h\cos\alpha_n l-\alpha_n\sin\alpha_n l, \tag{10.3}$$

а α_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha l=\frac{2\alpha h}{\alpha^2-h^2}. \tag{10.4}$$

Так как уравнение (10.4) эквивалентно

$$(h\sin\alpha l+\alpha\cos\alpha l)(h\cos\alpha l-\alpha\sin\alpha l)=0, \tag{10.5}$$

то его положительные корни α_n находят из следующих двух уравнений:

$$\alpha\operatorname{tg}\alpha l-h=0, \tag{10.6}$$

$$\alpha\operatorname{ctg}\alpha l+h=0. \tag{10.7}$$

Из результатов, полученных в § 9 данной главы, следует, что все корни *) уравнений (10.6) и (10.7) являются действительными и простыми. Это, конечно, легко доказать. Некоторые численные их значения приведены в приложении 4.

Если α_n — корень уравнения (10.6), то $d_n=0$ и $c_n^2=h^2+\alpha_n^2$; если же a_n — корень уравнения (10.7), то $c_n=0$ и $d_n^2=h^2+\alpha_n^2$.

Если $f(x)$ — четная функция от x, то выражение (10.1) принимает вид

$$v=2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\frac{(h^2+\alpha_n^2)\cos\alpha_n x}{(\alpha_n^2+h^2)l+h}\int_0^l f(x)\cos\alpha_n x\,dx, \tag{10.8}$$

где α_n — положительные корни уравнения (10.6). Оно является также решением задачи *о теплопроводности в области* $0<x<l$ *в отсутствие теплообмена на границе* $x=0$, *при наличии теплообмена на границе* $x=l$ *со средой, имеющей нулевую температуру, и при начальной температуре, равной* $f(x)$; это решение легко получить непосредственно при помощи метода, изложенного в § 9 настоящей главы. В данном случае разложение (9.6), приведенное в предыдущем параграфе, принимает вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(h^2+\alpha_n^2)\cos\alpha_n x}{(\alpha_n^2+h^2)l+h}\int_0^l f(x)\cos\alpha_n x\,dx, \tag{10.9}$$

где α_n — положительные корни уравнения (10.6). В частном случае, когда $f(x)=1$, из (10.9) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2h\cos\alpha_n x}{[(\alpha_n^2+h^2)l+h]\cos\alpha_n l}=1. \tag{10.10}$$

---

*) Все корни уравнения (10.6) действительны, если $h>0$; все корни уравнения (10.7) действительны, если $lh>-1$ (см. § 4 гл. IX).

Аналогичным образом, если $f(x)$ — нечетная функция от x, то выражение (10.1) принимает вид

$$v = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{(h^2+\alpha_n^2)\sin\alpha_n x}{(h^2+\alpha_n^2)l+h} \int_0^l f(x)\sin\alpha_n x\,dx, \tag{10.11}$$

где α_n — положительные корни уравнения (10.7). Это выражение является также решением задачи *о теплопроводности в области* $0 < x < l$ *в том случае, когда при* $t > 0$ *на границе* $x = 0$ *поддерживается нулевая температура, на границе* $x = l$ *происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, и начальная температура равна* $f(x)$.

Если $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной функцией, то решение имеет вид (10.1) и содержит корни как уравнения (10.6), так и уравнения (10.7). В данном случае подход оказывается аналогичным подходу при использовании ряда Фурье для представления произвольной функции $f(x)$ в интервале $(-l, l)$ с дальнейшим его выражением в виде ряда косинусов или синусов с учетом четности или нечетности функции $f(x)$.

§ 11. Частные случаи и численные результаты для пластины с граничным условием третьего рода

Это граничное условие характерно для многих задач, имеющих важное практическое значение. Для их решения мы располагаем множеством числовых данных в форме таблиц и графиков. Приведем здесь некоторые из имеющихся результатов, причем для упрощения выразим числовые величины через безразмерные параметры

$$L = lh, \qquad T = \frac{\varkappa t}{l^2}, \qquad \frac{x}{l}. \tag{11.1}$$

Обычно при рассмотрении ограничиваются такими важными величинами, как температура в центре, на поверхности или средняя температура, которые содержат только два параметра L и T и, следовательно, могут быть выражены в виде семейства кривых. В самом деле, имеется восемь функций *) от L и T, при помощи которых можно выразить многие результаты подобного рода.

Первые четыре из этих функций имеют вид

$$f_1(L, T) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{L(L+1)+\alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2 T}, \tag{11.2}$$

$$f_2(L, T) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\sec\alpha_n}{L(L+1)+\alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2 T}, \tag{11.3}$$

$$f_3(L, T) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L^2}{\alpha_n^2\left[L(L+1)+\alpha_n^2\right]} e^{-\alpha_n^2 T}, \tag{11.4}$$

$$f_4(L, T) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2\sec\alpha_n}{(L+2)\alpha_n^2\left[L(L+1)+\alpha_n^2\right]} e^{-\alpha_n^2 T}, \tag{11.5}$$

*) Графики этих функций (их аргументом служит $\operatorname{arctg} L$) для определенных значений T, а также некоторые их применения приведены в работе [25]; графики функций $1 - f_1$, $1 - f_2$, $1 - f_3$ показаны на рис. 17—19.

где α_n (при $n = 1, 2, \ldots$) — положительные корни уравнения

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha = L, \tag{11.6}$$

которое в принятых нами обозначениях представляет собой уравнение (10.6), приведенное в предыдущем параграфе.

Рис. 17. Функция $[1 - f_1(L, T)]$, где $f_1(L, T)$ определяется из (11.2).

Показано изменение температуры поверхности пластины толщиной $2l$, имеющей начальную температуру V и охлаждаемой в результате теплообмена со средой нулевой температуры. Числа на кривых указывают значения $L = lh$.

Другие четыре функции, соответствующие корням уравнения (10.7), имеют вид

$$\varphi_1(L, T) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(L+1)}{L(L+1) + \beta_n^2} e^{-\beta_n^2 T}, \tag{11.7}$$

$$\varphi_2(L, T) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(L+1)\sec\beta_n}{L(L+1) + \beta_n^2} e^{-\beta_n^2 T}, \tag{11.8}$$

$$\varphi_3(L, T) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(L+1)^2}{\beta_n^2 \left[L(L+1) + \beta_n^2\right]} e^{-\beta_n^2 T}, \tag{11.9}$$

$$\varphi_4(L, T) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12L(L+1)^2 \sec\beta_n}{(L+3)\beta_n^2 \left[L(L+1) + \beta_n^2\right]} e^{-\beta_n^2 T}, \tag{11.10}$$

где β_n (при $n = 1, 2, \ldots$) — положительные корни уравнения

$$\beta \operatorname{ctg} \beta + L = 0. \tag{11.11}$$

Некоторые значения корней уравнений (11.6) и (11.11) приведены в приложении 4. Следует отметить, что при больших значениях T важны только первые члены приведенных выше рядов. Во многих случаях это оказывается справедливым, если $T > 0{,}5$.

При малых значениях T (скажем, $T < 0{,}01$) ряды сходятся медленно и, пользуясь методом, изложенным ниже (см. § 5 гл. XII), можно вывести другие выражения. Они не приводят к таким простым и точным формулам, как это было в некоторых случаях, рассмотренных ранее.

Рассмотрим теперь ряд важных частных задач.

1. Область $-l < x < l$ с постоянной начальной температурой V и теплообменом на ее границах со средой нулевой температуры. Используя здесь (11.1), (11.6), а также соотношение (10.8), получим

$$\frac{v}{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\cos(\alpha_n x/l)\sec\alpha_n}{L(L+1) + \alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2 T}. \tag{11.12}$$

Температура поверхности $v_п = V[1 - f_1(L, T)]$, температура в центре $v_ц = [1 - f_2(L, T)]$, где f_1 и f_2 определяются из выражений (11.2) и (11.3).

Средняя температура в пластине $v_{ср} = V[1 - f_3(L, T)]$. Количество тепла, отдаваемое пластиной (с обеих поверхностей) за время t, равно

$$Q = 2l\rho c[V - v_{ср}] = 2lV\rho c f_3(L, T).$$

На рис. 17, 18 и 19 изображены графики зависимости $v_п/V$, $v_ц/V$ и $(1 - Q/2Vl\rho c)$ от $\lg T$ для различных значений L (0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; ∞).

Ввиду важности рассматриваемых задач был составлен ряд таблиц и диаграмм с численными значениями этих величин. Были построены графики зависимости $\lg(v/V)$ от T для фиксированных значений L и x/l [26, 27]. Эти графики, как правило, представляют собой прямые, что соответствует случаю, в котором важен только первый член (11.12). Другие авторы не пытались изучать эти функции для всех значений параметров, а исследовали величины $v_п$, $v_ц$ и Q или $v_{ср}$, которые определены выше. Грёбер [28; 29] приводит краткие таблицы и графики зависимости этих величин от $\lg L$ при определенных значениях T, или от $\lg T$ при определенных значениях L. Шак *) [30] обобщил результаты Грёбера и построил графики зависимости от L в линейном масштабе, придавая L значения $L = 10^n$ (при $n = 1, 2, 3, \ldots$). Были составлены также графики зависимости $\ln(T)$ от $\ln(L/K)$ для определенных значений $v_ц$, $v_п$ и $v_{ср}$ и дана числовая таблица для построения таких графиков [34]. Было приведено множество таблиц с критическим введением к ним [35] **). Нейман [33, 37] дает таблицы значений для постоянного и параболического начального распределения температуры. Кроме того, были опубликованы численные результаты, а также решения, пригодные для расчетов [38—42].

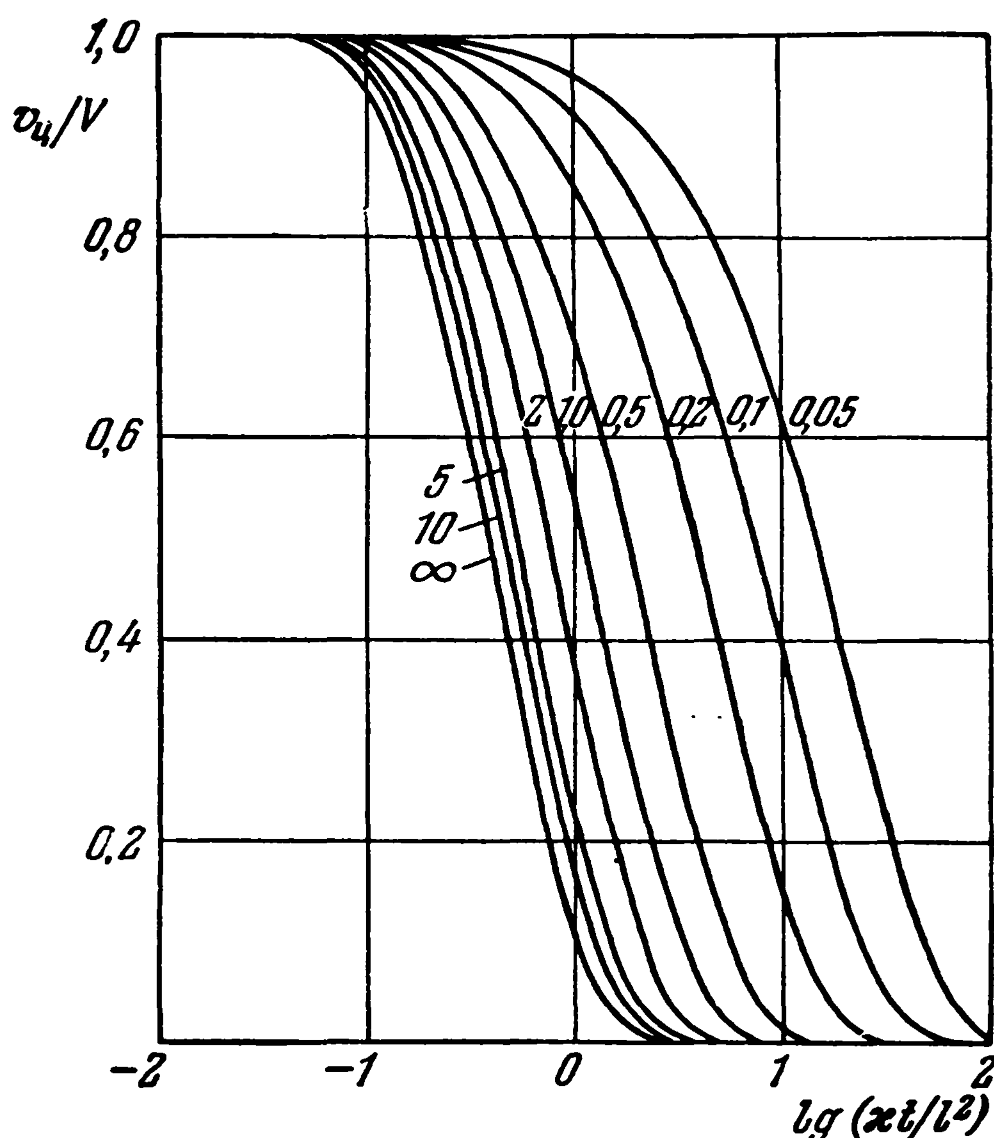


Рис. 18. Функция $[1 - f_2(L, T)]$, где $f_2(L, T)$ определяется из (11.3).

Показано изменение температуры в центре пластины толщиной $2l$, имеющей начальную температуру V и охлаждаемой за счет теплообмена со средой нулевой температуры. Числа на кривых указывают значения $L = lh$.

2. *Область $-l < x < l$ при наличии на плоскостях $x = \pm l$ теплообмена со средой нулевой температуры. Начальная температура $a - bx^2$.* В данном случае

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{2La\alpha_n^2 - 2bl^2[\alpha_n^2(L+2) - 2L]\}\cos(\alpha_n x/l)}{\alpha_n^2[\alpha_n^2 + L^2 + L]\cos\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 T}, \tag{11.13}$$

где α_n — корни уравнения (11.6).

3. *Область $-l < x < l$ с нулевой начальной температурой нагревается за счет теплообмена со средой с температурой V.* Как отмечалось в § 8 данной главы, эта задача сводится к задаче о нагревании пластины постоянным потоком

*) Его кривые воспроизведены в работах [31—33].

**) Некоторые из результатов данной работы воспроизводятся в книге Якоба [36].

тепла, подводимым к его поверхности, при наличии теплообмена со средой, имеющей нулевую температуру. Искомая температура равна разности между V и температурой, полученной в примере 1.

4. Область $0 < x < l$ с нулевой начальной температурой. Через плоскость $x = 0$ тепловой поток внутрь твердого тела постоянен и равен F_0; на плоскости $x = l$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры *). В данном случае

$$v = \frac{lF_0}{KL}\left\{1 + L\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\left(\alpha_n^2 + L^2\right)\cos(\alpha_n x/l)}{\alpha_n^2\left[L + L^2 + \alpha_n^2\right]} e^{-\alpha_n^2 T}\right., \tag{11.14}$$

где α_n — положительные корни уравнения (11.6). На плоскости $x = 0$ температура равна $(lF_0/KL)[f_1(L, T) + Lf_3(L, T)]$; на плоскости $x = l$ она равна $(lF_0/KL) \times f_2(L, T)$. Количество тепла, проходящее через единицу площади плоскости $x = l$ за промежуток времени от $t = 0$ до $t = t$, равно $(F_0 l^2/\varkappa)\{T - [(L+2)/2L] f_4(L, T)\}$.

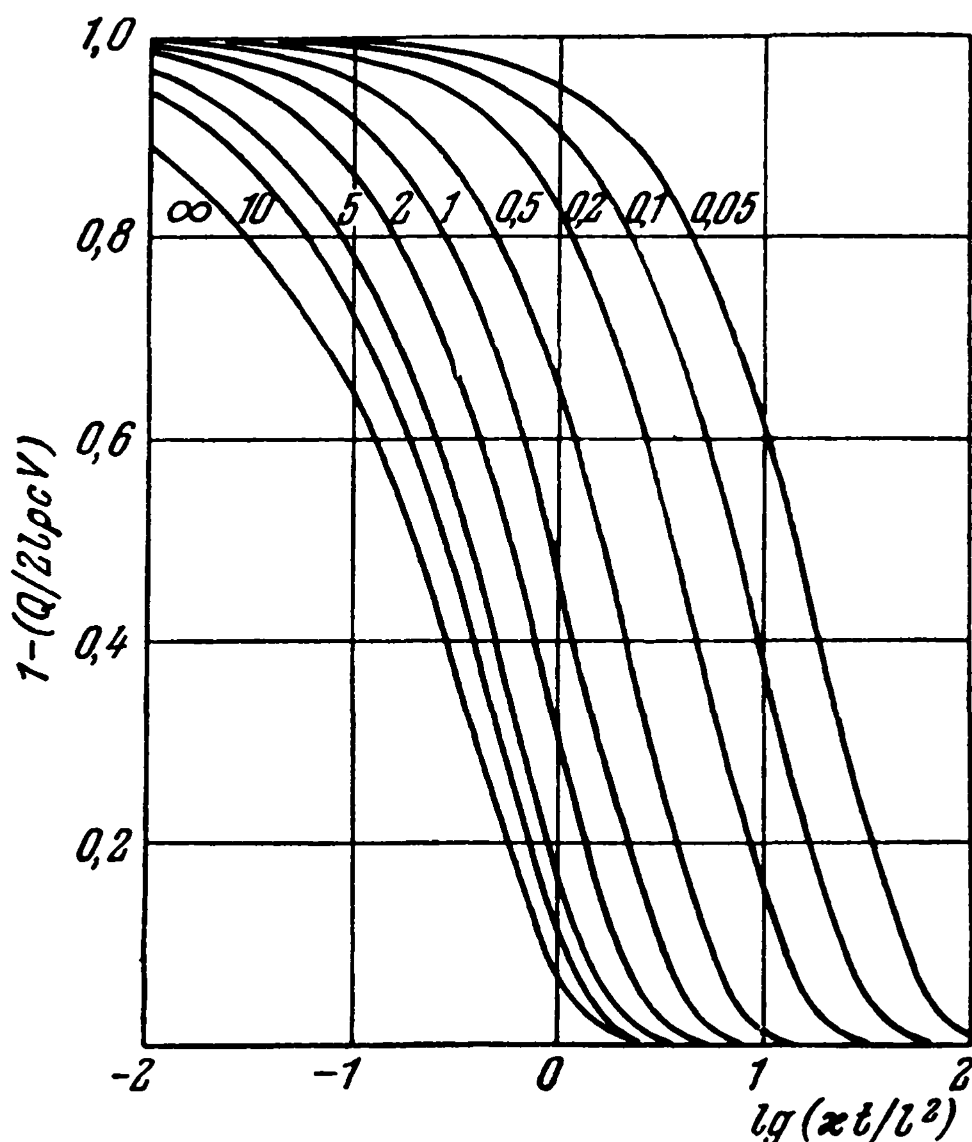


Рис. 19. Функция $[1 - f_3(L, T)]$, где $f_3(L, T)$ определяется из (11.4).

Показано изменение количества тепла Q_1, теряемого единицей поверхности пластины толщиной $2l$, имеющей начальную температуру V и охлаждаемой за счет теплообмена со средой нулевой температуры. Числа на кривых указывают значения $L = lh$.

5. Область $0 < x < l$ с начальной нулевой температурой. При $t > 0$ на плоскости $x = 0$ поддерживается нулевая температура. На плоскости $x = l$ происходит теплообмен со средой, имеющей постоянную температуру V. В данном случае

$$v = \frac{LVx}{l(1+L)} - 2LV \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n x/l)}{\left(L + L^2 + \beta_n^2\right)\sin\beta_n} e^{-\beta_n^2 T}, \tag{11.15}$$

где β_n (при $n = 1, 2, \ldots$) — положительные корни уравнения (11.11). Температура на плоскости $x = l$ равна $[LV/(L+1)]\varphi_1(L, T)$, а в выражение для количества тепла, поступающего через единицу площади плоскостей $x = 0$ и $x = l$ за время t, входит соответственно $\varphi_4(L, T)$ и $\varphi_3(L, T)$.

6. Область $0 < x < l$ с нулевой начальной температурой. При $t > 0$ температура границы $x = 0$ поддерживается равной V. На границе $x = l$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры. В данном случае

$$\frac{v}{V} = \frac{1 + L(1 - x/l)}{1 + L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(\beta_n^2 + L^2\right)\sin(\beta_n x/l)}{\beta_n\left[L + L^2 + \beta_n^2\right]} e^{-\beta_n^2 T}, \tag{11.16}$$

где β_n — положительные корни уравнения (11.11). Температура на границе $x = l$ равна $[V/(1+L)]\varphi_2(L, T)$.

7. Область $0 < x < l$ с начальной температурой $v_0 x/l$. При $t > 0$ температура на границе $x = 0$ поддерживается равной нулю; на границе $x = l$ происходит теплообмен со средой, имеющей температуру V_1. В данном случае

$$v = \frac{V_0 x}{l} + \frac{(x/l)[L(V_1 - V_0) - V_0]}{L+1} - 2[L(V_1 - V_0) - V_0]\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n x/l)}{\left[L^2 + L + \beta_n^2\right]\sin\beta_n} e^{-\beta_n^2 T}, \tag{11.17}$$

*) Некоторые численные результаты приведены в [43].

где β_n — положительные корни уравнения (11.11). Это выражение показывает изменение температуры на внешней стороне составной пластины при установившихся условиях. Анализируя соответствующее дифференциальное уравнение, легко показать, что изменение температуры выражается формулой (11.15), в которой V заменено на

$$V_1 - V_0 - \left(\frac{V_0}{L}\right). \tag{11.18}$$

8. Область $-l < x < l$ с нулевой начальной температурой. При $x = l$ происходит теплообмен со средой с температурой V, а при $x = -l$ — со средой нулевой температуры. Коэффициенты теплообмена на обеих границах одинаковы. Решение этой задачи получается комбинированием (11.12) и (11.15)

$$v = \frac{LVx}{2l(1+L)} - LV\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\beta_n x/l)}{\left(L^2+L+\beta_n^2\right)\sin\beta_n}e^{-\beta_n^2 T} + \\ + \frac{1}{2}V - LV\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\alpha_n x/l)}{\left(L^2+L+\alpha_n^2\right)\cos\alpha_n}e^{-\alpha_n^2 T}, \tag{11.19}$$

где α_n и β_n — положительные корни уравнений (11.6) и (11.11).

9. Область $0 < x < l$ с начальной температурой $f(x)$. Граничные условия записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} k_1\frac{\partial v}{\partial x} - h_1 v = 0, \quad x = 0, \\ k_2\frac{\partial v}{\partial x} + h_2 v = 0, \quad x = l, \end{aligned}\right\} \tag{11.20}$$

где $k_1 \geqslant 0$, $h_1 \geqslant 0$, причем они не должны одновременно обращаться в нуль; k_2 и h_2 также должны удовлетворять этим условиям. Записанные нами граничные условия включают девять возможных комбинаций нулевой температуры, нулевого теплового потока или теплообмена со средой, имеющей нулевую температуру на любой поверхности. В данном случае

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x)\, e^{-\varkappa\beta_n^2 t}\int_0^l Z_n(x')\, f(x')\, dx', \tag{11.21}$$

где

$$Z_n(x) = \frac{\left[2\left(k_2^2\beta_n^2 + h_2^2\right)\right]^{1/2}\left(k_1\beta_n\cos\beta_n x + h_1\sin\beta_n x\right)}{\left\{\left(k_1^2\beta_n^2 + h_1^2\right)\left[l\left(k_2^2\beta_n^2 + h_2^2\right) + k_2 h_2\right] + k_1 h_1\left(k_2^2\beta_n^2 + h_2^2\right)\right\}^{1/2}}. \tag{11.22}$$

Здесь β_n (при $n = 1, 2, \ldots$) — положительные корни уравнения

$$(k_1 k_2\beta^2 - h_1 h_2)\sin\beta l = \beta\,(k_1 h_2 + k_2 h_1)\cos\beta l; \tag{11.23}$$

если $h_1 = h_2 = 0$, то в соотношение (11.21) следует ввести дополнительный член

$$\frac{1}{l}\int_0^l f(x')\, dx'. \tag{11.24}$$

Это является обобщением результата, полученного в § 9 данной главы, на случай различных коэффициентов теплообмена для двух поверхностей. Распространение результатов на случай теплообмена со средой, имеющей различные температуры, производится так же, как и в конце § 9 данной главы.

§ 12. Область $-l < x < l$ с нулевой начальной температурой и теплообменом на границах со средой, имеющей температуру $\varphi(t)$

Из теоремы Дюамеля (см. § 14 гл. I) следует, что

$$v = 2\varkappa h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2 e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\cos\alpha_n x}{\left\{h + l\left(\alpha_n^2 + h^2\right)\right\}\cos\alpha_n l}\int_0^t e^{\varkappa\alpha_n^2\lambda}\varphi(\lambda)\, d\lambda, \tag{12.1}$$

где α_n — корни уравнения

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha l = h. \tag{12.2}$$

Если температура среды равна V_0 *при* $0 < t < T$ *и* V_1 *при* $t > T$, то искомое решение имеет вид

$$v = V_0 \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{2h \cos \alpha_n x}{\left[\left(h^2 + \alpha_n^2\right) l + h\right] \cos l\alpha_n} \right\}, \quad 0 < t < T \tag{12.3}$$

и

$$v = V_1 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{2h\left[V_0 + (V_1 - V_0)\, e^{\varkappa\alpha_n^2 T}\right] \cos \alpha_n x}{\left[\left(h^2 + \alpha_n^2\right) l + h\right] \cos l\alpha_n}, \quad t > T. \tag{12.4}$$

Если температура среды равна $V \sin(\omega t + \varepsilon)$, то решение имеет вид

$$v = \frac{hVM_0}{M_1} \sin(\omega t + \varepsilon + \gamma_0 - \gamma_1) + {}$$
$$+ 2h\varkappa V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \left(\omega \cos \varepsilon - \varkappa\alpha_n^2 \sin \varepsilon\right) \cos \alpha_n x}{\left(\varkappa^2\alpha_n^4 + \omega^2\right)\left[\left(\alpha_n^2 + h^2\right) l + h\right] \cos \alpha_n l} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{12.5}$$

где

$$M_0 e^{i\gamma_0} = \operatorname{ch} \omega' x \cos \omega' x + i \operatorname{sh} \omega' x \sin \omega' x, \tag{12.6}$$

$$M_1 e^{i\gamma_1} = \omega' \operatorname{sh} \omega' l \cos \omega' l - \omega' \operatorname{ch} \omega' l \sin \omega' l + h \operatorname{ch} \omega' l \cos \omega' l + {}$$
$$+ i\left[\omega' \operatorname{sh} \omega' l \cos \omega' l + \omega' \operatorname{ch} \omega' l \sin \omega' l + h \operatorname{sh} \omega' l \sin \omega' l\right] \tag{12.7}$$

и

$$\omega' = \sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}}. \tag{12.8}$$

Если температура среды равна kt, то решение имеет вид

$$v = kt + \frac{k\left(hx^2 - l^2 h - 2l\right)}{2\varkappa h} + \frac{2hk}{\varkappa} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^2\left[\left(h^2 + \alpha_n^2\right) l + h\right] \cos l\alpha_n}, \tag{12.9}$$

где α_n — положительные корни уравнения (12.2).

§ 13. Пластина, одна из поверхностей которой соприкасается со слоем идеального проводника или хорошо перемешиваемой жидкости

Если граница $x = l$ пластины находится в идеальном тепловом контакте с массой M' (на единицу площади) хорошо перемешиваемой жидкости (или идеального проводника) с удельной теплоемкостью c', то граничное условие при $x = l$, как и в (9.14) гл. I, имеет вид

$$K \frac{\partial v}{\partial x} + M'c' \frac{\partial v}{\partial t} = Q, \tag{13.1}$$

где Q/M' — скорость подвода тепла извне (если он вообще имеет место) на единицу массы жидкости. Предполагается, что тепло из жидкости передается только пластине. При решении таких задач встретятся безразмерные параметры трех типов $\varkappa t/l^2$, lh и x/l. В разбираемых ниже примерах 1—6 мы запишем

$$h = \rho c / M'c'. \tag{13.2}$$

Для ряда простых задач приведем решения, которые можно выразить через корни уравнений

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha l = h \tag{13.3}$$

и

$$\beta \operatorname{ctg} \beta l = -h. \tag{13.4}$$

Численные значения этих решений можно выразить через численные значения функций f и φ, определенных в § 11 данной главы. В более сложных задачах, в которых рассматривается теплообмен при $x=0$ или отвод тепла от жидкости, или контактное сопротивление между твердым телом и жидкостью, появляются дополнительные параметры (см. примеры 7—9).

1. Область $0<x<l$ с нулевой начальной температурой. Граница $x=l$ твердого тела соприкасается с массой M' (на единицу площади) хорошо перемешиваемой жидкости с удельной теплоемкостью c' и нулевой начальной температурой. На границе $x=0$ тепловой поток отсутствует. Постоянный подвод тепла Q к жидкости. В этом случае решение имеет вид

$$v=\frac{Q}{M'c'(1+lh)}\left[t+\frac{x^2}{2\varkappa}-\frac{l^2(3+lh)}{6\varkappa(1+lh)}\right]-\frac{2Qh}{M'c'\varkappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\varkappa\beta_n^2 t}\cos\beta_n x}{\beta_n^2\cos\beta_n l\left[l\left(\beta_n^2+h^2\right)+h\right]},\quad(13.5)$$

где β_n — корни уравнения (13.4).

2. Задача, аналогичная 1, но $Q=0$ и начальная температура жидкости равна V. В данном случае

$$v=\frac{V}{1+lh}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2hVe^{-\varkappa\beta_n^2 t}\cos\beta_n x}{\cos\beta_n l\left[l\left(\beta_n^2+h^2\right)+h\right]}.\quad(13.6)$$

3. Задача, аналогичная 1, но на границе $x=0$ поддерживается нулевая температура, а Q — постоянная величина. В данном случае

$$v=\frac{Ql}{K}\left\{\frac{x}{l}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2he^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\sin\alpha_n x}{l\alpha_n\cos\alpha_n l\left\{l\left(\alpha_n^2+h^2\right)+h\right\}}\right\},\quad(13.7)$$

где α — корни уравнения (13.3).

4. Задача, аналогичная 1, *но $Q=0$, начальная температура жидкости равна V, а граница $x=0$ поддерживается при нулевой температуре.* В этом случае

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2hVe^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\sin\alpha_n x}{\sin\alpha_n l\left[l\left(\alpha_n^2+h^2\right)+h\right]},\quad(13.8)$$

где α_n — корни уравнения (13.3).

5. Задача, аналогичная 1, *но $Q=0$, начальная температура жидкости равна нулю, а граница $x=0$ при $t>0$ поддерживается при температуре V.* В данном случае

$$\frac{v}{V}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\alpha_n^2+h^2\right)e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\sin\alpha_n x}{\alpha_n\left[l\left(\alpha_n^2+h^2\right)+h\right]},\quad(13.9)$$

где h определяется из выражения (13.2) и α_n — корни уравнения (13.3).

6. Задача, аналогичная 1, *но $Q=0$, начальная температура жидкости равна нулю, а к границе $x=0$ в единицу времени на единицу площади подводится постоянное количество тепла Q'.*

$$v=\frac{Q'l}{K(1+lh)}\left\{\frac{h\varkappa t}{l}+\frac{l-x}{l}+\frac{h(l-x)^2}{2l}-\frac{lh(3+lh)}{6(1+lh)}-\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1+lh)\left(h^2+\beta_n^2\right)e^{-\varkappa\beta_n^2 t}\cos\beta_n x}{l\beta_n^2\left\{l\left(\beta_n^2+h^2\right)+h\right\}}\right\},\quad(13.10)$$

где h определяется из выражения (13.2) и β_n — корни уравнения (13.4).

7. Область $0<x<l$ с начальной температурой V. На границе $x=0$ потери тепла отсутствуют, граница $x=l$ соприкасается с массой M' (на единицу площади) хорошо перемешиваемой жидкости с удельной теплоемкостью c'. Количество тепла, отдаваемого этой жидкостью (в единицу времени) в результате теплообмена, равно произведению величины H на температуру V. Начальная

температура жидкости равна нулю. В данном случае

$$v = 2V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\left(h - k\alpha_n^2\right)\cos\alpha_n x}{\left[l\left(h - k\alpha_n^2\right)^2 + \alpha_n^2(l+k) + h\right]\cos\alpha_n l}, \tag{13.11}$$

где $h = H/K$, $k = M'c'/\rho c$, а α_n — корни уравнения

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha l = h - k\alpha^2. \tag{13.12}$$

8. *Задача, аналогичная 7, но начальные температуры как твердого тела, так и жидкости равны нулю. Количество тепла, подводимого на единицу массы жидкости в единицу времени, равно* $f(t)/M'$. В данном случае

$$v = \frac{2\varkappa}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \cos\alpha_n x e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}}{\cos\alpha_n l\left\{l\left(h - k\alpha_n^2\right)^2 + (l+k)\alpha_n^2 + h\right\}} \int_0^t e^{\varkappa\alpha_n^2\tau} f(\tau)\,d\tau, \tag{13.13}$$

где α_n — корни уравнения (13.12).

9. *Область* $0 < x < l$; *на границе* $x = l$ *тепловой поток отсутствует, а граница* $x = 0$ *соприкасается с массой* M' *(на единицу площади) хорошо перемешиваемой жидкости с удельной теплоемкостью* c'; *к жидкости в единицу времени на единицу массы подводится постоянное количество тепла* Q/M'. *Предполагается, что температура поверхности твердого тела не равна температуре жидкости, а между ними происходит теплообмен, величина которого равна произведению* H *на разность температур твердого тела и жидкости* *) (см. (9.16) гл. I). В этом случае

$$\frac{Kv}{Ql} = \frac{k}{1+k}\left\{T + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 - \frac{3L + 6 + kL}{6L(1+k)} + \right.$$
$$\left. + 2L(1+k)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 - kL}{P_n \cos\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 T} \cos\alpha_n\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right\}, \tag{13.14}$$

где

$$h = H/K, \qquad L = lh, \qquad k = l\rho c/M'c', \qquad T = \varkappa t/l^2,$$
$$P_n = \alpha_n^6 + \alpha_n^4\left(L^2 + L - 2kL\right) + kL^2(1+k)\alpha_n^2,$$

а α_n — корни уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{L\alpha}{\alpha^2 - kL}.$$

§ 14. Пластина с внутренним источником тепла

Если в единицу времени на единицу объема выделяется количество тепла, равное A, то дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{A}{K}. \tag{14.1}$$

Наиболее важен случай $A = A_0 = \text{const}$ при $t > 0$, который наблюдается при диэлектрическом нагреве. Распространение на случай зависимости A от места или времени легко выполнить тем же методом, как и в § 14 гл. I и § 6 гл. XII. Как отмечалось в § 6 гл. I, в общем случае, когда A является функцией от v, аналитическое решение найти нельзя. В § 7 гл. XV рассматривается случай линейной зависимости между A и v. Здесь мы воспользуемся методом, изложенным в § 14 гл. I; можно также применить преобразование Лапласа.

---

*) Другие задачи подобного типа и некоторые численные результаты приведены в работе Егера [44].

1. Область $-l < x < l$ *с нулевой температурой поверхности* *) *и нулевой начальной температурой. При* $t > 0$ *количество тепла, выделяемое в единицу времени, постоянно и равно* A_0. Поступая так же, как в задаче I § 14 гл. I, отметим, что

$$\frac{A_0(l^2 - x^2)}{2K} \tag{14.2}$$

удовлетворяет всем условиям задачи; тогда выражение (14.2) служит решением для случая установившейся температуры. Подставим теперь

$$v = \frac{A_0(l^2 - x^2)}{2K} + w \tag{14.3}$$

в уравнение (14.1), причем w должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad -l < x < l, \tag{14.4}$$

с граничными условиями

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l, \quad t > 0 \tag{14.5}$$

и

$$w = -\frac{A_0(l^2 - x^2)}{2K} \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{14.6}$$

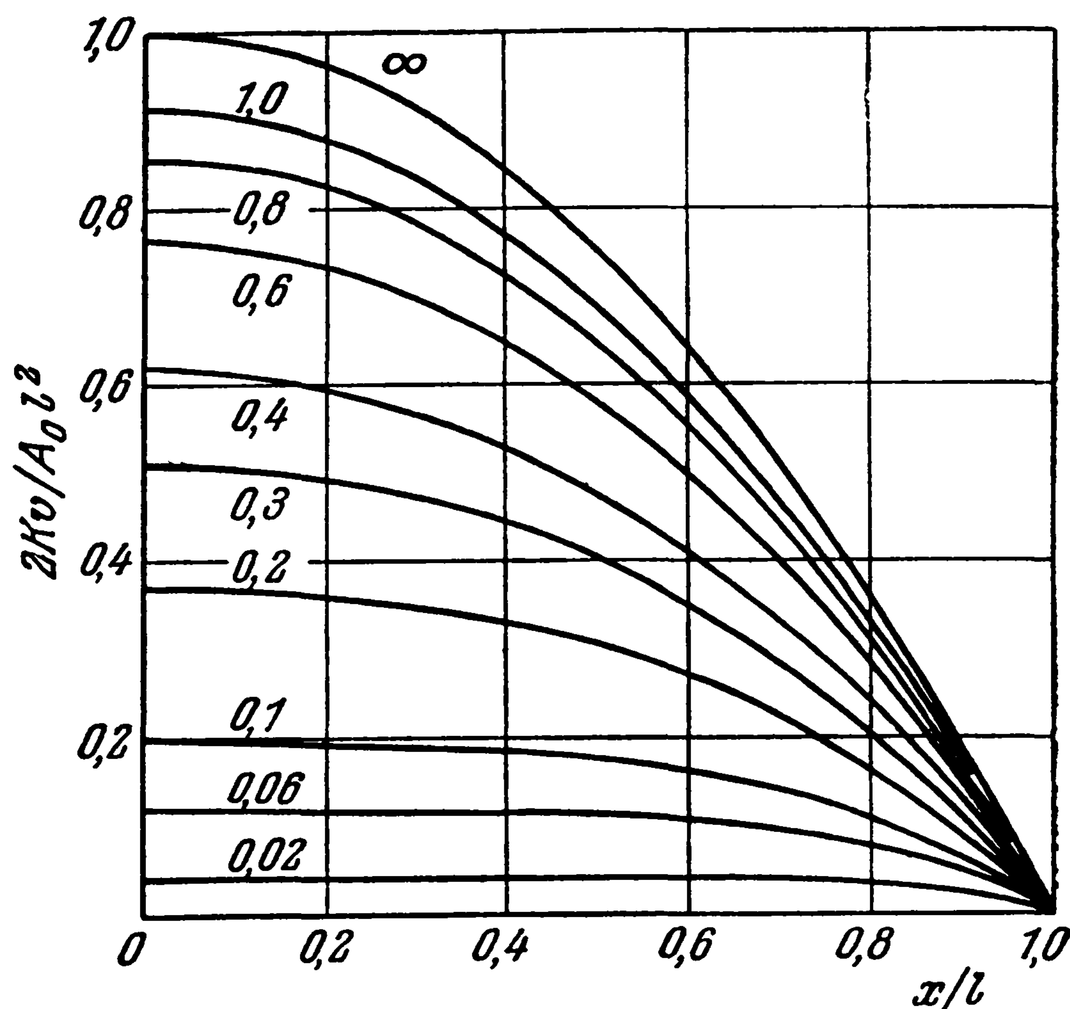


Рис. 20. Температура в пластине $-l < x < l$ при данном распределении источников постоянной мощности A_0 и нулевой температуре поверхности.

Числа на кривых указывают значения $\varkappa t/l^2$.

Решение уравнения (14.4) при выполнении условий (14.5) и (14.6) было дано в § 3 данной главы. Если использовать все эти соотношения, то выражение (14.3) примет вид

$$v = \frac{A_0 l^2}{2K}\left\{1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]\right\} \tag{14.7}$$

и, развивая вывод (3.17), мы получим решение для малых значений времени (см. пункт V § 5 гл. XII, где приведен соответствующий результат для выделения количества тепла в единицу времени, равного $A_0 t^{\frac{1}{2}n}$, причем n может равняться -1, 0 или любому целому положительному числу) в виде

$$v = \frac{A_0 t}{\rho c}\left\{1 - 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{(2n+1)l - x}{2(\varkappa t)^{\frac{1}{2}}}\right) + \mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{(2n+1)l + x}{2(\varkappa t)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\right\}. \tag{14.8}$$

На рис. 20 приведены некоторые значения v для различных значений $\varkappa t/l^2$. Следует отметить, что приближенные результаты для случая, когда на поверхностях происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, легко получить из рис. 20 путем простой замены l на $l + (K/H)$.

2. Если количество выделяемого в единицу времени тепла не остается постоянным, а равно $A(t)$, то из выражения (14.7) и теоремы Дюамеля (см. стр. 38),

*) Случай постоянной температуры поверхности, например при сочетании поверхностного и диэлектрического нагрева, рассматривается в работе [45].

следует, что

$$v = \frac{4}{\pi\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \int_0^t A(\tau) \exp\left[-\frac{\varkappa (2n+1)^2 \pi^2 (t-\tau)}{l^2} d\tau\right]. \quad (14.9)$$

3. Если количество выделяемого в единицу времени тепла является функцией положения $A(x)$, то

$$v = \frac{4l}{\pi^2 K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{1 - \exp\left[-\frac{\varkappa n^2 \pi^2 t}{4l^2}\right]\right\} \cos \frac{n\pi x}{2l} \int_{-l}^{l} A(x') \cos \frac{n\pi x'}{2l} dx'. \quad (14.10)$$

Другая форма для случая установившейся температуры имеет вид

$$v = \frac{1}{2Kl} \left\{ (x+l) \int_x^l d\eta \int_{-l}^{\eta} A(\xi) d\xi + (x-l) \int_{-l}^{x} d\eta \int_{-l}^{\eta} A(\xi) d\xi \right\}.$$

Задачу о нагревании при помощи вихревых токов можно рассматривать аналогичным образом. В этом случае количество выделяемого в единицу времени тепла пропорционально $(\operatorname{ch} 2px - \cos 2px)$; здесь $p = 2\pi (\mu f \sigma)^{1/2}$, μ и σ — проницаемость и электропроводность вещества соответственно, а f — частота [46]. При очень высоких частотах тепло почти все сосредоточивается близ поверхности и в этом случае можно использовать результаты § 8 данной главы.

4. Область $-l < x < l$ *с нулевой начальной температурой. На границах* $x = \pm l$ *происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру. При* $t > 0$ *количество выделяемого тепла постоянно и равно* A_0. Здесь вместо подстановки (14.3) используем подстановку

$$v = \frac{A_0}{2Kh} (2l + hl^2 - hx^2) + w, \quad (14.11)$$

где первый член в правой части уравнения представляет собой решение для случая установившейся температуры. Поступая, как и в пункте 1, и используя соотношение (10.8) данной главы, получим

$$v = \frac{A_0}{2Kh} \left\{ 2l + hl^2 - hx^2 - 4h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x e^{-\varkappa \alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2 \left[l\left(\alpha_n^2 + h^2\right) + h\right] \cos l\alpha_n} \right\}, \quad (14.12)$$

где α_n — положительные корни уравнения $\alpha \operatorname{tg} \alpha l = h$. В обозначениях, принятых в § 11 (см. (11.4) и (11.5)), температуры при $x = 0$ и $x = l$ равны соответственно

$$\frac{A_0 l^2 (L+2) f_4 [L, T]}{2KL} \quad \text{и} \quad \frac{A_0 l^2 f_3 [L, T]}{KL}.$$

5. Область $0 < x < l$ *с нулевой начальной температурой. На границе* $x = 0$ *при* $t > 0$ *поддерживается нулевая температура. На границе* $x = l$ *происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру. При* $t > 0$ *количество выделяемого тепла постоянно и равно* A_0. В данном случае

$$v = \frac{A_0}{2K} \left\{ \frac{(2+lh) lx}{1+lh} - x^2 \right\} + \frac{4A_0 h}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x (1 - \cos \alpha_n l)}{\alpha_n^2 \sin 2\alpha_n l \left[h(1+lh) + l\alpha_n^2\right]} e^{-\varkappa \alpha_n^2 t}, \quad (14.13)$$

где α_n — положительные корни уравнения $\alpha \operatorname{ctg} l\alpha + h = 0$. Температуру на границе $x = l$ можно выразить через φ_3 и φ_4, определенные в § 11 настоящей главы.

6. Пластина $-l < x < l$ *с начальной и поверхностной температурами, равными нулю. При* $t > 0$ *количество тепла* *), *выделяемое в единицу времени,*

---

*) Этот результат и соответствующие результаты для радиального потока (см. соотношения (9.2) гл. VII и (8.14) гл. IX) представляют значительный интерес при рассмотрении диффузии радиоактивных газов в геологических материалах [47].

равно $Ae^{-\lambda t}$. В данном случае

$$v = \frac{\varkappa A_0}{\lambda K}\left\{\frac{\cos x\,(\lambda/\varkappa)^{1/2}}{\cos l\,(\lambda/\varkappa)^{1/2}} - 1\right\} e^{-\lambda t} + \frac{4\varkappa A_0}{\pi\lambda K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]\cos(2n+1)\,\pi x/2l}{(2n+1)\left\{1-\frac{(2n+1)^2\pi^2\varkappa}{4\lambda l^2}\right\}}. \quad (14.14)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Carslaw, Fourier's Series and Integrals, Macmillan, ed. 3, 1930.
2. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, Macmillan, ed. 2, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1947.)
3. Whittaker, Watson, Modern Analysis, Cambridge, ed. 3, 1920. (Э. Уиттекер, Г. Ватсон, Курс современного анализа, ГТТИ, 1933.)
4. Anderson, Saddington, J. Chem. Soc., 381—386 (1949).
5. Ingersoll, Koepp, Phys. Rev. **24**, 92 (1924).
6. Frazier, Phys. Rev. **39**, 515 (1932).
7. Olson, Schultz, Ind. Eng. Chem. **34**, 874 (1942).
8. Mollison, Messeng. Math. **10**, 170—174 (1881).
9. Williamson, Adams, Phys. Rev. **14**, 99 (1919).
10. Gurney, Lurie, Ind. Eng. Chem. **15**, 1170 (1923).
11. Austin, J. Appl. Phys. **3**, 179 (1932).
12. Weber, Ann. Phys. **146**, 257 (1872).
13. Electric Circuits, M. I. T. Staff, Wiley, 1943, p. 452.
14. Van Gorcum, Appl. Sci. Res. **A2**, 272—280 (1951).
15. Vodicka, Appl. Sci. Res. **A5**, 108—114 (1955).
16. Caquot, C. R. Acad. Sci. **222**, 486—487 (1946).
17. Шкловер, ДАН СССР **45**, 106—110 (1944).
18. Dufton, Phil. Mag. **34**, 376 (1943).
19. Smith, J. Appl. Phys. **12**, 638 (1941).
20. Macey, Proc. Phys. Soc. **54**, 128 (1942).
21. Brown, Phil. Mag. **37**, 318—322 (1946).
22. Clarke, Kingston, Aust. J. Appl. Sci. **1**, 172—188 (1950).
23. Vernotte, C. R. Acad. Sci. **204**, 563 (1937).
24. Newman, Trans. Am. Inst. Chem. Engrs **30**, 598 (1934).
25. Jaeger, Clarke, Phil. Mag. **38**, 504—515 (1947).
26. Gurney, Lurie, Ind. Eng. Chem. **15**, 1170 (1923).
27. McAdams, Heat Transmission, McGraw-Hill, ed. 2, 1942. (В. Мак-Адамс, Теплопередача, ОНТИ, 1936; перев. с 1-го изд.)
28. Gröber, Z. Ver. dtsch. Ing. **69**, 705 (1925).
29. Gröber, Erk, Grigull, Wärmeübertragung, Springer, 1955.
30. Schack, Stahl u. Eisen **50**, 1290 (1930).
31. Fishenden, Saunders, Heat Transfer, Oxford, 1950.
32. Schack, Goldschmidt, Partridge, Industrial Heat Transfer, Wiley, 1933.
33. Newman, Ind. Eng. Chem. **28**, 545 (1936).
34. Ede, Phil. Mag. **36**, 845—891 (1945).
35. Heisler, Trans. ASME **69**, 227—236 (1947).
36. Jakob, Heat Transfer, Wiley, 1949, §§ 13—19. (М. Якоб, Вопросы теплопередачи, ИЛ, 1960, перев. с изд. 1957 г.)
37. Newman, Trans. Am. Inst. Chem. Engrs **27**, 202 (1931).
38. Goldstein, Z. angew. Math. Mech. **12**, 234 (1932); **14**, 158 (1934).
39. Pöschl, Z. angew. Math. Mech. **12**, 280 (1932).
40. Nistler, Z. angew. Math. Mech. **17**, 245 (1937).
41. McKay, Proc. Phys. Soc. 42, 547 (1930).
42. Bachmann, Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper, Springer, 1938.
43. Newman, Green, Trans. Electrochem. Soc. **66**, 345 (1934).
44. Jaeger, Proc. Camb. Phil. Soc. **41**, 43 (1945).
45. Nelson, Brit. J. Appl. Phys. **3**, 79—86 (1952).
46. Russell, Alternating Currents, Cambridge, vol. I, p. 197, 1914.
47. Wasserburg in Nuclear Geology, ed. Faul, Wiley, 1954, § 9.5.

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЙ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В СТЕРЖНЕ

§ 1. Введение

В настоящей главе мы рассмотрим задачи теплопроводности для стержней с малым поперечным сечением. Стержень предполагается настолько тонким, что температуру во всех точках его поперечного сечения можно считать одинаковой*). Эта задача сводится, таким образом, к задаче линейного теплового потока, в которой температура определяется временем и расстоянием x, измеряемым вдоль стержня. Если теплообмен на поверхности стержня отсутствует, то рассматриваемые здесь задачи становятся идентичными задачам, рассмотренным в гл. III. Существенно новая особенность задач данной главы заключается в следующем: мы предполагаем, что каждый элемент поверхности стержня отдает в результате теплообмена тепло в окружающую среду. Во многих старых и в некоторых новых методах определения теплопроводности используются экспериментальные устройства такого типа.

§ 2. Дифференциальное уравнение распределения температуры в тонком стержне

Предположим, что стержень имеет постоянную площадь поперечного сечения ω, периметр сечения p, коэффициент теплопроводности K, плотность вещества ρ, удельную теплоемкость c, коэффициент температуропроводности $\varkappa$ и коэффициент теплообмена H.

Предположим далее, что стержень расположен вдоль оси x, и рассмотрим элемент объема, ограниченный сечениями, проходящими через x и $x+dx$ перпендикулярно оси стержня.

Количество тепла, поступающее в этот элемент в единицу времени через сечение, проходящее через точку x, равно

$$-K\frac{\partial v}{\partial x}\omega.$$

Аналогичным образом количество тепла, уходящее в единицу времени через сечение, проходящее через точку $x+dx$, равно

$$\left(-K\frac{\partial v}{\partial x}-K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx-\ \dots\right)\omega.$$

---

*) Общий случай преимущественного распространения теплового потока в теле в одном направлении, т. е. при небольших потерях в плоскостях, перпендикулярных данному направлению, рассматривается в работе [1]. Оказывается, что среднее значение температуры вдоль плоскостей, перпендикулярных направлению потока, с хорошим приближением удовлетворяет уравнению вида (2.4) следующего параграфа.

Следовательно, приращение количества тепла в элементе объема в единицу времени, обусловленное потоком тепла через оба сечения стержня, равно *)

$$\omega K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx.$$

Количество тепла, теряемое в единицу времени вследствие теплообмена боковой поверхности элемента объема со средой, равно

$$H(v - v_0)\, p\, dx,$$

где v_0 — температура среды.

Полный прирост количества тепла в единицу времени в элементе объема равен

$$\omega c\rho \frac{\partial v}{\partial t} dx.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{c\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{Hp}{\rho c\omega}(v - v_0), \tag{2.1}$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \nu (v - v_0), \tag{2.2}$$

где

$$\frac{Hp}{c\rho\omega} = \nu \quad \text{и} \quad \frac{K}{\rho c} = \varkappa. \tag{2.3}$$

Если на боковой поверхности стержня теплообмен отсутствует, уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

и задачи распределения температур в стержне сводятся к задачам линейного теплового потока, рассмотренным в гл. II и III.

При наличии теплообмена со средой, имеющей постоянную температуру, последнюю можно принять за нуль, и тогда наше уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \nu v. \tag{2.4}$$

Используя подстановку **) (см. стр. 38)

$$v = u e^{-\nu t}, \tag{2.5}$$

(2.4) можно свести к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.6}$$

Таким образом, наша задача сводится к рассмотренной ранее задаче линейного теплового потока.

I. Полуограниченный стержень $x > 0$ с нулевой начальной температурой. При $t > 0$ граница $x = 0$ поддерживается при постоянной температуре V_0. Здесь функция u должна удовлетворять уравнению (2.6), обращаться в нуль при $t = 0$ и иметь значение $V_0 e^{\nu t}$ при $x = 0$ и $t > 0$.

---

*) Здесь отбрасываются члены более высокого порядка относительно dx. (*Прим. ред.*)

**) Здесь можно также использовать метод преобразования Лапласа, изложенный в гл. XII.

Решение этой задачи приведено в § 5 гл. II (см. (5.9)); оно имеет вид

$$u=\frac{1}{2}V_0e^{\nu t}\left\{e^{-x\sqrt{\nu/\varkappa}}\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\sqrt{\nu t}\right]+e^{x\sqrt{\nu/\varkappa}}\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\sqrt{\nu t}\right]\right\}.$$

Отсюда получаем окончательно

$$v=\frac{1}{2}V_0e^{-x\sqrt{\nu/\varkappa}}\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\sqrt{\nu t}\right]+\frac{1}{2}V_0e^{x\sqrt{\nu/\varkappa}}\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\sqrt{\nu t}\right]. \quad (2.7)$$

2. *Ограниченный стержень* $-l<x<l$ *с нулевой начальной температурой. При* $t>0$ *плоскости* $x=0$ *и* $x=l$ *поддерживаются при постоянной температуре* V_0. В данном случае функция u должна удовлетворять уравнению (2.6), обращаться в нуль при $t=0$ и иметь значения $V_0e^{\nu t}$ при $x=\pm l$. Используя решение этой задачи, приведенное в § 5 гл. III (см. (5.6)), получим окончательно

$$v=V_0\frac{\operatorname{ch}x(\nu/\varkappa)^{1/2}}{\operatorname{ch}l(\nu/\varkappa)^{1/2}}-\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\exp\left\{-\nu t-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{4l^2}\right\}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)\left\{1+[4\nu l^2/(2n+1)^2\pi^2\varkappa]\right\}}. \quad (2.8)$$

Первый член представляет собой решение, соответствующее установившемуся состоянию, которое будет получено непосредственно в § 5 настоящей главы.

Если материал стержня неоднороден или его теплопроводность является функцией температуры, то ясно, что уравнение (2.1) следует заменить уравнением

$$\frac{1}{\rho c}\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{Hp}{\rho c\omega}(v-v_0)=\frac{\partial v}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Если сечение стержня непостоянно, то ω и p зависят от x, и аналогичным образом мы получим для стержня с постоянным коэффициентом теплопроводности K соотношение

$$\frac{\varkappa}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{H}{\rho c}\frac{p}{\omega}(v-v_0)=\frac{\partial v}{\partial t}. \quad (2.10)$$

§ 3. Полуограниченный стержень. Случай установившейся температуры. Метод Форбса

Если в плоскости $x=0$ полуограниченного стержня поддерживается постоянная температура V_0, то решение уравнения для установившегося теплового потока

$$\varkappa\frac{d^2v}{dx^2}-\nu v=0$$

принимает вид

$$v=V_0e^{-x(\nu/\varkappa)^{1/2}}. \quad (3.1)$$

Это решение можно использовать для стержня конечной длины l при условии, что величина $l(\nu/\varkappa)^{1/2}$ велика. Если рассматриваются стержни из различных металлов с поверхностями, обработанными таким образом, что все они будут иметь одинаковые значения ν, то сравнение температур *) различных стержней позволит получить отношения их коэффициентов теплопроводности **). Подобные методы имеют тот недостаток, что они дают только относительные значения коэффициентов теплопроводности; кроме того, трудно обеспечить равенство значений ν для различных стержней.

*) Если α — коэффициент линейного расширения, то при полном расширении стержня $\alpha V_0(\varkappa/\nu)^{1/2}$ мы получим другое уравнение для сравнения температур (см. [2]).

**) На этой идее основаны методы ряда авторов, описанные в книгах [3—5].

Классические опыты Форбса (см. [3], стр. 98, [4], стр. 454, [5], § 301, [11, 48]) позволили создать интересный метод определения коэффициента теплопроводности одиночного стержня. Пусть один конец полуограниченного стержня поддерживается при постоянной температуре до тех пор, пока тепловой поток в нем не установится. В этом случае количество тепла, протекающее вдоль стержня в единицу времени через сечение, находящееся на расстоянии x от нагреваемого конца, равно

$$-K\omega\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.2}$$

где ω — площадь поперечного сечения стержня. Эта величина должна равняться всему количеству тепла, теряемому в единицу времени находящейся справа за этим сечением частью стержня, т. е.

$$p\int_x^\infty f(v)\,dx, \tag{3.3}$$

где p — периметр сечения стержня и $f(v)$ — количество тепла, теряемое в единицу времени с поверхности стержня, имеющего температуру v. Форбс провел две независимые серии экспериментов: в первой серии он численно определял величину $\partial v/\partial x$ в выражении (3.2) из данных о температуре в ряде точек вдоль стержня; во второй серии экспериментов он определял величину $pf(v)$ в выражении (3.3), нагревая другой стержень, подобный первому, до постоянной температуры и затем охлаждая его при тех же условиях; при этом температура стержня измерялась в функции времени; тогда можно найти численное значение

$$pf(v) = -\omega\rho c\frac{\partial v}{\partial t}$$

как функцию от v. Это позволило оценить численную величину интеграла в выражении (3.3). Приравнивая выражения (3.2) и (3.3), можно получить значение K. Следует отметить, что данный метод носит весьма общий характер и в нем не предполагается, что K или ν не зависят от v; кроме того, в этом методе не используется никакое частное решение уравнения теплопроводности. Таким способом Форбс определил коэффициент теплопроводности железа в зависимости от температуры.

§ 4. Полуограниченный стержень. Периодически изменяющаяся температура. Метод Ангстрема [5—10]

В предыдущем параграфе мы показали, как установившееся распределение температур в длинном металлическом стержне малого поперечного сечения можно использовать для определения коэффициента теплопроводности вещества. Неустановившееся распределение также можно использовать для этой цели, если температура одного из концов стержня периодически меняется, что приводит к распространению по нему тепловых волн. Из наблюдений над прохождением этих волн вычисляется коэффициент теплопроводности. Ангстрем впервые применил данный метод, и его работа исключительно интересна как строгостью математических рассуждений, так и новизной экспериментального метода. Позднее Хагстрем [12] рассмотрел ту же задачу, предположив, что коэффициенты теплопроводности и теплообмена зависят от температуры. Нейман и Вебер распространили этот метод на случай короткого стержня, температура обоих концов которого периодически меняется (см. § 8 данной главы).

Ангстрем проводил эксперименты на длинных стержнях малого поперечного сечения. Температура конца стержня $x=0$ периодически менялась, так как через равные промежутки времени его попеременно то нагревали потоком пара, то охлаждали потоком холодной воды. По истечении достаточного времени температура в стержне становилась некоторой периодической функцией от x и t, не зависящей от начального распределения температур. Это периодическое распределение температур и исследовал Ангстрем. В экспериментах Ангстрема учитывается, что стержень отдает тепло в среду с постоянной, принимаемой за нуль температурой *).

Как и раньше, поперечное сечение стержня считается настолько малым, что температуру по всему сечению можно принять равной температуре в центре. Длина стержня должна быть достаточной для того, чтобы температурные изменения, происходящие на конце $x=0$, полностью затухали, не достигнув противоположного конца. Таким образом, при математической трактовке задачи можно считать стержень полуограниченным.

Ищем периодическое решение уравнения (2.4) данной главы в виде

$$v = V(x)\, e^{in\omega t}.$$

После его подстановки в (2.4) получим для V следующее уравнение:

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{\nu + in\omega}{\varkappa} V = 0.$$

Решение этого уравнения, стремящееся к нулю, когда $x \to \infty$, имеет вид

$$V = V_0 \exp\left(-q_n x - iq'_n x\right), \tag{4.1}$$

где

$$q_n + iq'_n = \left(\frac{\nu + in\omega}{\varkappa}\right)^{1/2}; \tag{4.2}$$

следовательно,

$$q_n = \left\{\left[\nu + (\nu^2 + n^2\omega^2)^{1/2}\right]/2\varkappa\right\}^{1/2}, \qquad q'_n = \left\{\left[-\nu + (\nu^2 + n^2\omega^2)^{1/2}\right]/2\varkappa\right\}^{1/2},$$

$$q_n q'_n = n\omega/2\varkappa. \tag{4.3}$$

Таким образом,

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-q_n x} \cos\left(n\omega t - q'_n x + \varepsilon_n\right) \tag{4.4}$$

представляет собой общее периодическое решение уравнения (1.1) с периодом $2\pi/\omega$.

В опытах Ангстрема период колебания температуры в стержне $2\pi/\omega$ составлял 24 *мин*. По истечении достаточно большого промежутка времени после начала эксперимента измеряли температуры в двух точках x_1 и x_2 и полученные данные представляли гармоническими рядами

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(n\omega t + \beta_n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \gamma_n).$$

Их почленное сравнение с (4.4) дает

$$\frac{B_1}{C_1} = e^{q_1 l}, \qquad \beta_1 - \gamma_1 = lq'_1, \tag{4.5}$$

*) Если используется изолирующее кольцо, то эту поправку можно исключить.

где $l = x_2 - x_1$. Используя эти результаты в последнем из выражений (4.3), получаем

$$\varkappa = \frac{\omega l^2}{2(\beta_1 - \gamma_1)(\ln B_1 - \ln C_1)}. \tag{4.6}$$

Таким образом, коэффициент теплопроводности определяется независимо от коэффициента теплообмена. Изменяя характер поверхности стержня, т. е. изменяя ν, мы будем получать одинаковые значения для $\varkappa$. Ангстрем производил такие изменения, и полученные им результаты совпали с результатами его более ранних экспериментов.

Если $\varkappa$ известно, то нетрудно найти ν.

Пусть при $x = 0$ температура равна 1 при $rT < t < \left(r + \frac{1}{2}\right)T$ и нулю при $\left(r + \frac{1}{2}\right)T < t < (r+1)T$, где $r = 0, 1, 2, \ldots$; тогда установившаяся температура в точке x в момент времени t определяется выражением

$$\frac{1}{2} e^{-q_0 x} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-xq_{2n+1}} \sin\left\{(2n+1)\omega t - xq'_{2n+1}\right\},$$

где q_n и q'_n — величины, определенные выше, а $\omega = 2\pi/T$.

Если при $x = 0$ температура определяется выражением

$$A_0 + A_1 \cos(\omega t + \varepsilon_1),$$

то в (4.4) остаются лишь первые два члена, и температурные колебания распространяются со скоростью

$$u = \frac{2\pi}{Tq'_1}.$$

Используя величину q'_1, определяемую (4.3), получим

$$\nu = \frac{u^2}{4\varkappa} - \frac{4\pi^2\varkappa}{T^2u^2}.$$

Если u_1 и u_2 — скорости для периодов T_1 и T_2, то можно исключить ν, и мы получим

$$\varkappa^2 = \frac{T_1^2 T_2^2 u_1^2 u_2^2 \left(u_1^2 - u_2^2\right)}{16\pi^2 \left(T_2^2 u_2^2 - T_1^2 u_1^2\right)}.$$

Кинг [13] использовал опыты Ангстрема, причем конец $x = 0$ проволоки он нагревал проволочной спиралью, по которой протекал ток, пропорциональный $\sin \frac{1}{2} \omega t$.

§ 5. Ограниченный стержень, концы которого находятся при фиксированных температурах. Случай установившейся температуры

Если поверхность тела не изолирована от среды, температура которой равна нулю, то уравнение теплопроводности, выраженное через величины, определенные (2.3), имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{Hp}{c\rho\omega} v.$$

Наблюдение за установившимся распределением температур в стержне, концы которого поддерживаются при постоянных температурах V_1 и V_2,

представляет собой один из наиболее ранних методов получения значений коэффициентов теплопроводности различных твердых тел.

Положив $\mu^2 = Hp/K\omega$, получим уравнения

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \mu^2 v = 0 \qquad (0 < x < l),$$
$$v = V_1 \quad \text{при} \quad x = 0,$$
$$v = V_2 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Тогда искомое решение запишется в виде

$$v = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},$$

где

$$V_1 = A + B$$

и

$$V_2 = Ae^{\mu l} + Be^{-\mu l}.$$

Таким образом,

$$v = \frac{V_1 \operatorname{sh} \mu (l - x) + V_2 \operatorname{sh} \mu x}{\operatorname{sh} \mu l}. \tag{5.1}$$

Пусть в точках x_1, x_2 и x_3 температуры равны v_1, v_2 и v_3 соответственно, причем

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = a.$$

Тогда

$$\frac{v_1 + v_3}{v_2} = 2 \operatorname{ch} \mu a = 2n.$$

Отсюда

$$e^{\mu a} = n + \sqrt{n^2 - 1},$$

т. е. полученный результат не зависит от V_1 и V_2. Для двух стержней с одинаковыми периметрами, поперечными сечениями и теплообменом на боковых поверхностях имеем

$$\sqrt{\frac{K_1}{K_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\log\{n_2 + \sqrt{n_2^2 - 1}\}}{\log\{n_1 + \sqrt{n_1^2 - 1}\}}. \tag{5.2}$$

Это дает метод для сравнения коэффициентов теплопроводности двух веществ [5, 14].

В абсолютных измерениях коэффициента теплопроводности к одному из концов стержня обычно подводят известное количество тепла с помощью нагревательной спирали [15—18].

Из соотношения (5.1) следует, что величина теплового потока F_0, поступающего в стержень через плоскость $x = 0$, равна

$$F_0 = -K\omega \left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=0} = \frac{K\omega (\mu V_1 \operatorname{ch} \mu l - \mu V_2)}{\operatorname{sh} \mu l}. \tag{5.3}$$

Величина теплового потока F_l, отдаваемого стержням через плоскость $x = l$, равна

$$F_l = -K\omega \left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=l} = \frac{K\omega (\mu V_1 - \mu V_2 \operatorname{ch} \mu l)}{\operatorname{sh} \mu l}. \tag{5.4}$$

Потеря тепла через боковую поверхность стержня между плоскостями $x = 0$ и $x = l$ равна

$$F_0 - F_l = K\omega\mu (V_1 + V_2) \operatorname{th} \frac{1}{2} \mu l. \tag{5.5}$$

На практике μ обычно мало, и поэтому гиперболические функции в (5.3), (5.4), (5.5) можно представить в виде ряда и ограничиться первыми членами этих рядов. В таком случае приближенно можно написать

$$F_0 = \frac{K\omega}{l}(V_1 - V_2) + \frac{1}{6}K\omega\mu^2 l(2V_1 + V_2) \tag{5.6}$$

и

$$F_0 - F_l = \frac{1}{2}K\omega\mu^2 l(V_1 + V_2). \tag{5.7}$$

Подставляя в соотношение (5.6) найденные в эксперименте F_0 или V_2, получим K и H. Обобщение уравнения (5.6), в котором учитывается линейное изменение коэффициента теплопроводности с температурой, приводится в работе [16]. Уравнением (5.7) удобно пользоваться для введения поправок на потерю тепла стержнем, например между нагревательной спиралью и термопарой. Лис [15] рассчитал ряд таких поправок, необходимых в подобных устройствах.

В отсутствие потока тепла через плоскость $x = l$ мы получим вместо (5.1) выражение

$$v = V_1 \frac{\operatorname{ch}\mu(l - x)}{\operatorname{ch}\mu l}.$$

Тепловой поток, поступающий в стержень через плоскость $x = 0$, равен следующей величине:

$$F_0 = -K\omega\left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=0} = \mu K\omega V_1 \operatorname{th}\mu l.$$

Таким образом,

$$K = \frac{F_0^2}{Hp\omega V_1^2 \operatorname{th}^2 \mu l}.$$

Это соотношение было использовано при определении K [19].

§ 6. Стержень переменного сечения с охлаждающимися ребрами. Случай установившейся температуры

Дифференциальные уравнения, приведенные в § 2 настоящей главы, имеют практическое применение в теории тонких ребер, прикрепленных к поверхностям с целью повышения эффективности охлаждения последних посредством теплообмена или вынужденной конвекции [20—28]. Во всех случаях, рассматриваемых в данном параграфе, ребра считают настолько тонкими, что температуру по всей толщине ребра можно принять постоянной; соответствующие задачи для толстых ребер изложены в § 3 гл. V и в § 3 гл. VIII. Здесь мы рассмотрим только случай установившейся температуры. Задачи с неустановившейся температурой можно решить либо непосредственно, применяя преобразование Лапласа (см. гл. XII), либо используя описанную выше подстановку (см. (2.5) данной главы).

Вначале мы рассмотрим задачу, уже разобранную в предыдущем параграфе, а затем перейдем к другим случаям.

I. *Прямоугольное ребро на плоской поверхности.*

Возьмем плоскую поверхность, совпадающую с плоскостью $x = 0$. Рассмотрим ребро, ограниченное областью

$$-\frac{1}{2}D < z < \frac{1}{2}D, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < x < l,$$

где D — толщина ребра (малая величина). Предположим, что плоскость $x=0$ поддерживается при температуре V и имеет место теплообмен между поверхностью ребра и средой с нулевой температурой. Тогда, воспользовавшись обозначениями, принятыми в § 2 данной главы, мы получим, что участок ребра единичной длины в направлении y имеет периметр *) $p=2$ и площадь $\omega=D$. Таким образом, уравнение (2.2) данной главы принимает вид

$$\frac{d^2v}{dx^2}-\mu^2v=0, \qquad 0<x<l, \tag{6.1}$$

где

$$\mu^2=\frac{2H}{KD}. \tag{6.2}$$

Это уравнение нужно решать при следующих граничных условиях:

$$v=V, \qquad x=0 \tag{6.3}$$

и

$$\frac{dv}{dx}=0, \qquad x=l. \tag{6.4}$$

Простое граничное условие (6.4) означает, что теплообмен на конце ребра пренебрежимо мал, что обычно выполняется достаточно строго; если же это не так [29], то граничное условие (6.4) следует заменить выражением

$$K\frac{dv}{dx}+Hv=0, \qquad x=l, \tag{6.5}$$

которое выглядит более громоздким, но не вводит новых особенностей.

Решение уравнения (6.1) с граничными условиями (6.3) и (6.4) имеет вид

$$v=V\frac{\operatorname{ch}\mu(l-x)}{\operatorname{ch}\mu l}. \tag{6.6}$$

С инженерной точки зрения наиболее интересной величиной является «эффективность» ребра. Эта величина определяется как отношение количества тепла, теряемого поверхностью ребра в единицу времени, к количеству тепла, которое должно было бы теряться в единицу времени, если бы ребро было удалено и площадь под его основанием отдавала тепло тем же путем. Последняя величина равна HDV на единицу длины и, следовательно, эффективность ребра можно записать в виде

$$\frac{2}{HDV}\int_0^l\frac{HV\operatorname{ch}\mu(l-x)\,dx}{\operatorname{ch}\mu l}=\frac{2}{\mu D}\operatorname{th}\mu l. \tag{6.7}$$

II. *Сужающееся ребро на плоской поверхности.*

Пусть стороны ребра сближаются на небольшой угол α, так что площадь участка ребра единичной длины в направлении оси y при $x=0$ равна D, а в точке x равна $D-2\alpha x$. Тогда, пренебрегая членами, содержащими α^2, мы получим для периметра нашего участка p, равное 2. В этом случае уравнение (2.10) настоящей главы принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left[(D-2\alpha x)\frac{dv}{dx}\right]-\frac{2H}{K}v=0, \qquad 0<x<l \tag{6.8}$$

и его надо решать с граничными условиями (6.3) и (6.4). Положив

$$\xi=(D-2\alpha x)^{1/2}, \tag{6.9}$$

*) На самом деле $p=2+2D$, но, поскольку $D\ll 1$, мы можем считать, что $p\approx 2$. (*Прим. ред.*)

мы получим уравнение (6.8) в виде

$$\frac{d^2v}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dv}{d\xi}-\frac{2H}{K\alpha^2}v=0, \quad D^{1/2}<\xi<(D-2\alpha l)^{1/2}. \tag{6.10}$$

Общее решение уравнения (6.10) представляет собой линейную комбинацию модифицированных функций Бесселя *)

$$AI_0[\xi(2H/K\alpha^2)^{1/2}]+BK_0[\xi(2H/K\alpha^2)^{1/2}]. \tag{6.11}$$

Постоянные A и B находят из граничных условий (6.3) и (6.4):

$$\left.\begin{aligned} AI_0(\xi_0)+BK_0(\xi_0)&=V,\\ AI_1(\xi_1)-BK_1(\xi_1)&=0, \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

где

$$\xi_0=(2HD/K\alpha^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad \xi_1=[2H(D-2\alpha l)/K\alpha^2]^{1/2}. \tag{6.13}$$

Решая уравнение (6.12), получим окончательное решение (6.11) в виде

$$v=V\frac{I_0[2H(D-2\alpha x)/K\alpha^2]^{1/2}K_1(\xi_1)+K_0[2H(D-2\alpha x)/K\alpha^2]^{1/2}I_1(\xi_1)}{I_0(\xi_0)K_1(\xi_1)+K_0(\xi_0)I_1(\xi_1)}. \tag{6.14}$$

III. *Тонкое кольцевое ребро постоянной толщины на цилиндре радиуса a.* Здесь плоскость ребра перпендикулярна оси цилиндра. Толщина ребра D в направлении, параллельном оси цилиндра, мала. Пусть его внешний радиус равен b, а тепловой поток с внешней поверхности пренебрежимо мал. Поскольку распространение тепла происходит исключительно в радиальном направлении, мы можем использовать дифференциальное уравнение (2.10) данной главы, считая, что площадь участка радиусом r равна $w=2\pi rD$ и его периметр равен $p=4\pi r$. Тогда из (2.10) следует

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)-\frac{2H}{KD}v=0, \quad a<r<b, \tag{6.15}$$

это уравнение нужно решать при граничных условиях

$$v=V, \quad r=a, \tag{6.16}$$

$$\frac{dv}{dr}=0, \quad r=b. \tag{6.17}$$

Общее решение уравнения (6.15) имеет вид

$$v=AI_0(\mu r)+BK_0(\mu r), \tag{6.18}$$

где

$$\mu=\left(\frac{2H}{KD}\right)^{1/2}. \tag{6.19}$$

Используя условия (6.16) и (6.17), определим A и B и в результате получим

$$v=V\frac{I_0(\mu r)K_1(\mu b)+K_0(\mu r)I_1(\mu b)}{I_0(\mu a)K_1(\mu b)+K_0(\mu a)I_1(\mu b)}. \tag{6.20}$$

В этом случае эффективность ребра равна

$$\frac{2}{\mu D}\frac{I_1(\mu b)K_1(\mu a)-K_1(\mu b)I_1(\mu a)}{I_0(\mu a)K_1(\mu b)+K_0(\mu a)I_1(\mu b)}. \tag{6.21}$$

IV. *Тонкое кольцевое ребро переменной толщины на цилиндре радиуса a.* В случае линейно сужающегося ребра, рассмотренном в примере II, не существует решения, которое можно было бы выразить при помощи табулированных функций. Простые решения можно найти при двух других законах изменения толщины по радиусу.

Если толщина z ребра изменяется обратно пропорционально радиусу, т. е.

$$z=\frac{D}{r}, \tag{6.22}$$

---

*) См. приложение 3. Выражения $I_0'(z)=I_1(z)$, $K_0'(z)=-K_1(z)$ используются ниже.

то $\omega = 2\pi r z = 2\pi D$ и $p = 4\pi r$; тогда уравнение (2.10), приведенное в настоящей главе, принимает вид

$$\frac{d^2v}{dr^2} - \mu^2 r v = 0, \qquad a < r < b, \tag{6.23}$$

где μ определяется (6.19). Общее решение уравнения (6.23) записывается следующим образом:

$$v = Ar^{1/2} I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\mu r^{3/2}\right) + Br^{1/2} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\mu r^{3/2}\right), \tag{6.24}$$

где A и B можно найти, как и прежде, из граничных условий (6.16) и (6.17).

Если толщина z ребра изменяется обратно пропорционально квадрату радиуса, т. е

$$z = \frac{D}{r^2}, \tag{6.25}$$

то $\omega = 2\pi D/r$ и $p = 4\pi r$; тогда уравнение (2.10) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right] - \mu^2 v = 0, \qquad a < r < b, \tag{6.26}$$

где μ определяется (6.19). Решение уравнения (6.26), которое удовлетворяет условиям (6.16) и (6.17), записывается следующим образом:

$$v = V\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\mu(b^2 - r^2)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\mu(b^2 - a^2)}. \tag{6.27}$$

§ 7. Ограниченный*) стержень при наличии теплообмена на его поверхности. Случай неустановившейся температуры

Для стержня постоянного поперечного сечения дифференциальное уравнение (2.2), приведенное в данной главе, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \nu v, \tag{7.1}$$

где $\varkappa = K/\rho c$, $\nu = Hp/\rho c\omega$, а температура среды v_0, с которой происходит теплообмен, равна нулю. Как и в § 2 этой главы, уравнение (7.1) можно решить, заменив v на $ue^{-\nu t}$, где u должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7.2}$$

Используя результаты, полученные в гл. III, приведем решения ряда интересных задач.

I. *Ограниченный стержень* $0 < x < l$ *с начальной температурой* $f(x)$ *и температурами концов* $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$.

В этом случае уравнение (7.2) следует решать при следующих условиях:

$$u = f(x), \quad t = 0; \qquad u = e^{\nu t}\varphi_1(t), \quad x = 0; \qquad u = e^{\nu t}\varphi_2(t); \quad x = l. \tag{7.3}$$

Используя соотношение (5.2) гл. III, получим

$$v = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\nu t - \frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\left\{\int_0^l f(x')\sin\frac{n\pi x'}{l}dx' + \right.$$
$$\left. + \frac{n\pi\varkappa}{l}\int_0^t \exp\left[\frac{\varkappa n^2\pi^2\lambda}{l^2} + \nu\lambda\right][\varphi_1(\lambda) - (-1)^n\varphi_2(\lambda)]\,d\lambda\right\}. \tag{7.4}$$

*) Полуограниченный стержень рассматривается в [30].

II. *Ограниченный стержень* $0 < x < l$ *с начальной температурой* $f(x)$. *На плоскости* $x = 0$ *теплообмен отсутствует Температура в плоскости* $x = l$ *равна* $\varphi_2(t)$.

Используя соотношение (5.3) гл. III и обозначая $\beta_n = (2n+1)\pi/2l$, получим

$$v = \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\nu t - \varkappa\beta_n^2 t\right]\cos\beta_n x\left\{\varkappa\beta_n(-1)_n\int_0^t \exp\left[\left(\varkappa\beta_n^2+\nu\right)\lambda\right]\varphi_2(\lambda)\,d\lambda + \right.$$
$$\left. + \int_0^l f(x')\cos\beta_n x'\,dx'\right\}. \quad (7.5)$$

III. *Ограниченный стержень* $0 < x < l$ *с начальной температурой* $f(x)$ *Теплообмен на концах отсутствует.*

Из соотношения (4.6) гл. III следует, что

$$v = \frac{1}{l}\exp(-\nu t)\int_0^l f(x')\,dx' +$$
$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\nu t - \frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(x')\cos\frac{n\pi x'}{l}\,dx'. \quad (7.6)$$

IV. *Ограниченный стержень* $-l < x < l$ *с постоянной начальной температурой, равной* V. *На боковой поверхности стержня и на его концах происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

Из соотношения (11.12) гл. III следует, что

$$\frac{v}{V} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2h\cos\alpha_n x}{\left[\left(h^2+\alpha_n^2\right)l + h\right]\cos\alpha_n l}\exp\left[-\left(\varkappa\alpha_n^2+\nu\right)t\right], \quad (7.7)$$

где $\pm\alpha_n$ (при $n = 1, 2, \ldots$) служат корнями уравнения

$$\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha l = h.$$

V. *Ограниченный стержень* $0 < x < l$ *с начальной температурой, равной* $f(x)$. *На боковой поверхности стержня и на его концах происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

Используя соотношение (9.12) гл. III, получим

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\nu+\varkappa\alpha_n^2\right)t} A_n X_n, \quad (7.8)$$

где

$$X_n = \cos\alpha_n x + \frac{h}{\alpha_n}\sin\alpha_n x, \quad (7.9)$$

$$A_n = \frac{2\alpha_n^2}{\left(\alpha_n^2+h^2\right)l + 2h}\int_0^l f(x)X_n\,dx \quad (7.10)$$

и $\pm\alpha_n$ (при $n = 1, 2, \ldots$) служат корнями уравнения

$$\mathrm{tg}\,\alpha l = \frac{2h\alpha}{\alpha^2 - h^2}. \quad (7.11)$$

Нейман [31] *) показал, что это решение можно использовать при определении значений термических коэффициентов. В его методе необходимо знать температуры v_0 и v_l при $x = 0$ и $x = l$.

*) См. также работу [32], в которой рассматривается соотношение между методом Ангстрема и двумя методами Неймана. Следует отметить, что методы, изложенные в этом параграфе, позволяют совершенно не учитывать начальное распределение температуры в стержне.

Из соотношения (7.9) следует, что $X_n = 1$ при $x = 0$. Кроме того, в § 9 гл. III мы показали, что $X_n^2 = 1$ при $x = l$; определим теперь знак X_n.

Используя (7.9) и (7.11), находим, что при $x = l$

$$X_n = \frac{\alpha_n^2 + h^2}{2\alpha_n h} \sin \alpha_n l;$$

но

$$0 < \alpha_1 l < \pi < \alpha_2 l < 2\pi < \ldots$$

Следовательно,

$$X_n = (-1)^{n-1} \quad \text{при} \quad x = l.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}(v_0 + v_l) = A_1 e^{-\beta_1 t} + A_3 e^{-\beta_3 t} + \ldots, \tag{7.12}$$

$$\frac{1}{2}(v_0 - v_l) = A_2 e^{-\beta_2 t} + A_4 e^{-\beta_4 t} + \ldots, \tag{7.13}$$

где

$$\beta_n = \varkappa \alpha_n^2 + \nu.$$

Поскольку β_n увеличивается с увеличением n, для достаточно больших значений t мы получим хорошее приближение, ограничиваясь только первым членом в каждом из этих рядов. Тогда мы получим

$$\frac{1}{2}(v_0 + v_l) = A_1 e^{-\beta_1 t} \tag{7.14}$$

и

$$\frac{1}{2}(v_0 - v_l) = A_2 e^{-\beta_2 t}. \tag{7.15}$$

В своих экспериментах Нейман сначала нагревал один конец стержня пламенем, а затем давал ему охлаждаться за счет теплообмена. Спустя некоторое время он начинал определять $v_0 \pm v_l$ через равные промежутки времени. Эти наблюдения показали, когда температуры начинают следовать приведенному выше закону. Таким способом находят постоянные β_1 и β_2 и получают два уравнения, из которых можно определить коэффициенты теплопроводности и теплообмена. Однако так как в величины α_1 и α_2 входит h, эти расчеты следует производить путем последовательных приближений и они оказываются довольно сложными.

В более простом методе измеряют температуры в средней точке стержня. Как отмечалось в § 10 гл. III, $\alpha_1, \alpha_3, \ldots$ являются корнями уравнения

$$\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha l = h, \tag{7.16}$$

а $\alpha_2, \alpha_4, \ldots$ — корнями уравнения

$$\alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha l + h = 0. \tag{7.17}$$

Кроме того, при $x = \frac{1}{2} l$

$$X_n = \sec \frac{1}{2} l\alpha_n \quad \text{для нечетного } n$$

и

$$X = 0 \quad \text{для четного } n.$$

Таким образом,

$$v_{\frac{1}{2}l} = A_1 e^{-\beta_1 t} \sec \frac{1}{2} \alpha_1 l + A_3 e^{-\beta_3 t} \sec \frac{1}{2} \alpha_3 l + \ldots \tag{7.18}$$

Итак, из соотношений (7.14) и (7.18) следует, что для больших значений времени

$$\frac{v_0 + v_l}{v_{\frac{1}{2}l}} = 2 \cos \frac{1}{2} \alpha_1 l.$$

Отсюда мы найдем α_1; затем определим из (7.16) и (7.17) соответственно h и α_2. Кроме того, из выражений

$$\beta_1 = \varkappa\alpha_1^2 + \nu \quad \text{и} \quad \beta_2 = \varkappa\alpha_2^2 + \nu$$

определим $\varkappa$ и ν, после чего можно найти значения K и H.

§ 8. Ограниченный стержень с периодически изменяющейся температурой концов. Метод Неймана

В своей работе «О теплопроводности железа и нейзильбера» Вебер [33] описал ряд экспериментов, проведенных им по методу, предложенному Нейманом в его лекциях. Идея этого метода та же, что и идея метода Ангстрема (см. § 4 настоящей главы), но в данном случае периодически изменяют температуру обоих концов стержня. Конец A стержня AB поддерживается при температуре v_1, а конец B — при температуре v_2 в течение интервала времени $0 < t < T$. Затем, от момента $t = T$ до $t = 2T$, конец A поддерживается при температуре v_2, а конец B — при температуре v_1. Этот процесс повторяется неограниченное число раз. Если такое периодическое изменение температур продолжается достаточно долго, то влияние начального распределения температур исчезнет и возникающее установившееся периодическое колебание температуры можно исследовать методом, изложенным в § 6 гл. III.

Температура определяется из приведенного в предыдущем параграфе соотношения (7.4) при $f(x) = 0$ и условий

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= v_1 \quad \text{при} \quad 2rT < t < (2r+1)T,\\
\varphi_1(t) &= v_2 \quad \text{при} \quad (2r+1)T < t < (2r+2)T,\\
\varphi_2(t) &= v_2 \quad \text{при} \quad 2rT < t < (2r+1)T,\\
\varphi_2(t) &= v_1 \quad \text{при} \quad (2r+1)T < t < (2r+2)T,
\end{aligned}$$

где r равно нулю или любому положительному числу.

Назовем интервалы $2rT < t < (2r+1)T$ *четными периодами*, а интервалы $(2r+1)T < t < (2r+2)T$ — *нечетными периодами*. Затем, как и в § 6 гл. III, мы покажем, что после достаточно длительных колебаний температуры поверхности температура в момент t, отсчитываемый от конца одного из четных периодов, равна

$$v = \frac{4\varkappa\pi}{l^2}(v_1 - v_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_{2n}}\sin\frac{2n\pi x}{l} + \frac{2\varkappa\pi}{l^2}(v_1 + v_2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{p_{2n+1}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} - \frac{8\varkappa\pi}{l^2}(v_1 - v_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_{2n}}\sin\frac{2n\pi x}{l}\,\frac{e^{-p_{2n}t}}{1 - e^{-p_{2n}T}}, \quad (8.1)$$

а в момент t, отсчитываемый от конца одного из нечетных периодов, равна

$$v = -\frac{4\varkappa\pi}{l^2}(v_1 - v_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_{2n}}\sin\frac{2n\pi x}{l} + \frac{2\varkappa\pi}{l^2}(v_1 + v_2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{p_{2n+1}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} + \frac{8\varkappa\pi}{l^2}(v_1 - v_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_{2n}}\sin\frac{2n\pi x}{l}\,\frac{e^{-p_{2n}t}}{1 + e^{-p_{2n}T}}, \quad (8.2)$$

где

$$p_n = \frac{\varkappa n^2\pi^2}{l^2} + \nu. \quad (8.3)$$

Эти выражения можно упростить при помощи рядов Фурье

$$U = \frac{\operatorname{sh}\mu(l - x) - \operatorname{sh}\mu x}{2\operatorname{sh}\mu l} = \frac{4\varkappa\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_{2n}}\sin\frac{2n\pi x}{l} \quad (8.4)$$

и

$$V=\frac{\operatorname{sh}\mu(l-x)+\operatorname{sh}\mu x}{2\operatorname{sh}\mu l}=\frac{2\varkappa\pi}{l^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{p_{2n+1}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l},\tag{8.5}$$

где p_n — величина, определяемая (8.3), а $\mu^2=\nu/\varkappa$.

Таким образом, для четных периодов мы имеем

$$v=(v_1-v_2)U+(v_1+v_2)V-\frac{8\pi\varkappa}{l^2}(v_1-v_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_{2n}}\sin\frac{2n\pi x}{l}\,\frac{e^{-p_{2n}t}}{1+e^{-p_{2n}T}},\tag{8.6}$$

и для нечетных периодов

$$v=-(v_1-v_2)U+(v_1+v_2)V+\frac{8\pi\varkappa}{l^2}(v_1-v_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_{2n}}\sin\frac{2n\pi x}{l}\,\frac{e^{-p_{2n}t}}{1+e^{-p_{2n}T}}.\tag{8.7}$$

Из соотношений (8.6) и (8.7) следует, что температура $v_{1/2 l}$ в средней точке стержня имеет следующее постоянное значение:

$$v_{1/2 l}=\frac{v_1+v_2}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\mu l}.\tag{8.8}$$

Отсюда можно получить отношение $\nu/\varkappa$. Чтобы получить второе соотношение между этими двумя неизвестными, нужно взять разность значений температур в точках $x=\frac{1}{6}l$ и $x=\frac{2}{3}l$ в любой момент времени. В этих точках члены ряда (выражающего разность температур), в которых n кратно 2 или 3, пропадут, а оставшийся ряд настолько быстро сходится, что можно пренебречь членами, начиная с $n=5$. Таким образом, в принятом приближении разность температур в момент времени t от начала одного из периодов равна

$$d=M-Ne^{-pt},\tag{8.9}$$

где $p=\nu+(4\varkappa\pi^2/l^2)$, а M и N не зависят от t.

Пусть разности температур между этими точками в моменты t_1, t_2, $(t_1+\beta)$, $(t_2+\beta)$ равны d_1, d_2, d_1', d_2' соответственно. Тогда

$$\frac{d_1-d_2}{d_1'-d_2'}=e^{p\beta}$$

и, следовательно, можно найти p. Используя эту величину, а также значение $\nu/\varkappa$, найденное из выражения (8.8), получим неизвестные ν и $\varkappa$.

§ 9. Задачи по теплопроводности в движущемся стержне*)

Пусть стержень, имеющий постоянные площадь поперечного сечения ω и периметр p, движется в направлении оси x со скоростью U. Предполагается также, что происходит теплообмен стержня со средой, имеющей температуру v_0, причем коэффициент теплообмена равен H.

Искомое дифференциальное уравнение можно получить, как и в § 2 настоящей главы; однако в данном случае, как и в § 7 гл. I, следует добавить член, учитывающий теплообмен конвекцией, в виде $-\frac{U}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial x}$; тогда уравнение (2.2) настоящей главы примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{U}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\nu(v-v_0)}{\varkappa}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0,\tag{9.1}$$

*) Теплопроводность движущегося цилиндра конечного диаметра рассматривается в § 11 гл. VII.

где

$$\varkappa = \frac{K}{\rho c} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{Hp}{\rho c \omega}. \tag{9.2}$$

Ряд задач для движущихся тел, в которых встречается уравнение (9.1), будет рассмотрен в § 2 гл. XV. Здесь мы рассмотрим случай установившейся температуры и теплообмена со средой, имеющей нулевую температуру. В этом случае уравнение (9.1) принимает вид

$$\varkappa \frac{d^2 v}{dx^2} - U \frac{dv}{dx} - \nu v = 0. \tag{9.3}$$

1. Полуограниченный стержень, движущийся в направлении его продольной оси со скоростью U. Конец $x = 0$ поддерживается при постоянной температуре v_1. Решение, справедливое как для положительных, так и для отрицательных значений U, имеет вид

$$v = v_1 \exp\left\{ \frac{U - (U^2 + 4\varkappa\nu)^{1/2}}{2\varkappa} x \right\}. \tag{9.4}$$

2. Полуограниченный стержень, движущийся в направлении его продольной оси со скоростью U. Плоскости $x = 0$ и $x = 2l$ поддерживаются при постоянных температурах, равных соответственно v_1 и v_2. Искомое решение имеет вид

$$v = \frac{v_2 \exp\left[-\frac{U(2l - x)}{2\varkappa}\right] \operatorname{sh} \xi x + v_1 \exp \frac{Ux}{2\varkappa} \operatorname{sh} \xi (2l - x)}{\operatorname{sh} 2\xi l}, \tag{9.5}$$

где

$$\xi = [(U^2/4\varkappa^2) + (Hp/\omega K)]^{1/2}. \tag{9.6}$$

Был проведен ряд экспериментов [34, 35] с ртутью, в которых она двигалась с постоянной скоростью вдоль трубы, соединяющей два резервуара, поддерживаемые при различных температурах *). Если v_l — температура в средней точке $x = l$ трубы, то из (9.5) следует, что

$$2v_l \operatorname{ch} \xi l = v_2 \exp\left[-\frac{lU}{2\varkappa}\right] + v_1 \exp \frac{lU}{2\varkappa}. \tag{9.7}$$

Если v_1 и v_2 подобраны таким образом, что $v_l = 0$, то соотношение (9.7) принимает вид

$$\frac{v_2}{v_1} = -e^{-lU/\varkappa}. \tag{9.8}$$

Это уравнение не содержит ξ, и из него можно прямо найти коэффициент температуропроводности $\varkappa$.

§ 10. Уравнение теплопроводности для тонкой проволоки, нагреваемой постоянным электрическим током

Распределение температур в тонкой проволоке, по которой течет постоянный электрический ток, выведено Верде в 1872 г. [38] **). В течение некоторого времени подобный способ нагревания металла применялся мало, несмотря на его очевидные преимущества. Во-первых, электрические измерения можно производить с такой точностью, что в эксперименте становится возможным применять малые разности температур и устранять ошибки, вызываемые зависимостью электропроводности и теплопроводности от температуры.

---

*) В работе [35] с помощью этого метода рассматривается эффект Томсона; в нее также входит рассмотрение полного уравнения (10.4) данной главы. Неустановившееся состояние разобрано в работе Сомерса [36] и — более подробно — в работе Оуэна [37]; см. также § 2 гл. XV.

**) Для той же цели использовался и переменный ток. Можно назвать несколько важных статей по этому вопросу [39—41]. Последняя из названных работ содержит ценный список литературы; кроме того, в ней учитывается также изменение температуры по сечению и по длине проволоки (см. также [42]).

Во-вторых, при рассмотрении отношения коэффициентов электро- и теплопроводности (отношение Видемана — Франца [43]) очень желательно, чтобы обе эти величины определялись в одном и том же эксперименте.

Выведем сначала уравнение теплопроводности и покажем, как можно использовать установившееся и неустановившееся распределение температур в такой проволоке для определения коэффициентов электропроводности и теплопроводности металлов.

Предположим, как и в § 2 данной главы, что ω — площадь поперечного сечения проволоки, p — периметр сечения и H — коэффициент теплообмена. Пусть I — ток, измеряемый в амперах *), а σ — электропроводность проволоки. Тогда количество тепла, выделяемое на длине dx током I, будет равно

$$\frac{jI^2}{\omega\sigma}\,dx,$$

где $j = 0{,}239\ldots$ — число калорий в джоуле. Этот член следует добавить к правой части уравнения (2.2) данной главы, и тогда уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \nu(v - v_0) + \frac{jI^2}{\rho c\omega^2\sigma}, \tag{10.1}$$

где

$$\varkappa = \frac{K}{\rho c}, \qquad \nu = \frac{Hp}{\rho c\omega}. \tag{10.2}$$

Некоторые другие факторы, важные для экспериментальной работы, можно принять в расчет без значительного усложнения математической теории.

1. Электрическое сопротивление проводника можно считать линейной функцией температуры — это приближение справедливо для узких температурных интервалов. Если α — температурный коэффициент изменения сопротивления, то мы должны только заменить $(jI^2/\rho c\omega^2\sigma)$ в уравнении (10.1) на

$$\frac{jI^2}{\rho c\omega^2\sigma_0}(1 + \alpha v), \tag{10.3}$$

где σ_0 — электропроводность при нулевой температуре.

2. Тепло выделяется в результате эффекта Томсона, причем количество тепла пропорционально току и градиенту температур; таким образом, к правой части уравнения (10.1) следует добавить член

$$-\frac{Is}{\rho c\omega}\frac{\partial v}{\partial x},$$

где s — коэффициент Томсона. Этот член учитывает направление тока и обращается в нуль, если для нагревания проволоки пользуются переменным током. Коэффициент Томсона зависит от температуры и может иметь любой знак. Обычно нагрев за счет эффекта Томсона мал, и основное значение этого члена заключается в том, что различные методы измерения s основаны на дифференциальном уравнении (10.4).

3. Если стержень движется в направлении своей продольной оси со скоростью U, как и в предыдущем параграфе, то к правой части уравнения (10.1) нужно добавить член

$$-U\frac{\partial v}{\partial x}.$$

При этих обобщениях уравнение (10.1) принимает вид **)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{\rho c}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(U + \frac{sI}{\rho c\omega}\right)\frac{\partial v}{\partial x} - v\left(\frac{Hp}{\rho c\omega} - \frac{\alpha jI^2}{\rho c\omega^2\sigma_0}\right) + \frac{Hpv_0}{\rho c\omega} + \frac{jI^2}{\rho c\omega^2\sigma_0}. \tag{10.4}$$

---

*) Здесь и далее тепловые величины измеряют в калориях и в единицах СГС, а электрические величины — в практической системе единиц.

**) Применение этого уравнения для установившегося состояния при определении эффекта Томсона изложено в [35, 44—47].

Это уравнение линейно относительно v и его можно представить в виде

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial v}{\partial x}+cv+d=\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (10.5)$$

где a, b, c, d — постоянные. Уравнения подобного вида встречаются во многих областях математической физики (ср. § 13 гл. I). Их всегда можно решить при помощи простого видоизменения классических методов для случая $b=c=d=0$ или при помощи метода преобразования Лапласа, изложенного в гл. XII; преимущество последнего заключается в том, что он позволяет рассматривать все случаи единообразно. Если a, b, c и d — простые функции от x, то иногда можно найти точное решение.

Рассмотрим, наконец, изменение теплопроводности с температурой. Для ограниченной области температур можно считать справедливым линейный закон

$$K=K_0(1+\beta v), \qquad (10.6)$$

где β — температурный коэффициент теплопроводности (обычно он отрицателен). В этом случае уравнение (10.4) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K_0}{\rho c}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\beta v)\frac{\partial v}{\partial x}\right]-\left(U+\frac{sI}{\omega\rho c}\right)\frac{\partial v}{\partial x}-v\left(\frac{Hp}{\omega\rho c}-\frac{\alpha jI^2}{\rho c\omega^2\sigma_0}\right)+\frac{Hpv_0}{\rho c\omega}+\frac{jI^2}{\rho c\omega^2\sigma_0}. \qquad (10.7)$$

Уравнение (10.7) не линейно относительно v и его исследовали только для случая установившегося состояния, т. е. для $\partial v/\partial t=0$. Если, кроме того, $U=0$, то c отсутствует, и поэтому нет надобности рассматривать его изменение с температурой.

В следующем параграфе мы рассмотрим ряд способов определения коэффициента теплопроводности с применением дифференциальных уравнений, приведенных в настоящем параграфе. В § 14 данной главы будет рассмотрен случай неустановившегося состояния.

§ 11. Установившаяся температура. Определение коэффициента теплопроводности

I. *Определение отношения коэффициентов электро- и теплопроводности методом Кольрауша.*

Кольрауш показал, как наблюдения над установившимся температурным состоянием в нагреваемой электрическим током проволоке можно использовать для нахождения отношения коэффициентов электро- и теплопроводности [41, 49—54].

Температуры на концах проволоки поддерживаются возможно более близкими друг к другу. Предполагается, что поверхность непроницаема для тепла и электрический ток I протекает в течение достаточного времени для достижения установившейся температуры.

В этом случае уравнение теплопроводности принимает вид

$$K\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{jI^2}{\sigma\omega^2}=0.$$

Пусть u — электрический потенциал в сечении x.
Тогда

$$I=-\omega\sigma\frac{du}{dx},$$

но

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{I}{\omega\sigma}\frac{dv}{du}$$

и

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{I^2}{\omega^2\sigma^2}\frac{d^2v}{du^2}.$$

Отсюда

$$\frac{K}{j\sigma}\frac{d^2v}{du^2}+1=0. \qquad (11.1)$$

Таким образом,

$$\frac{K}{j\sigma}v=-\frac{1}{2}u^2+Au+B, \qquad (11.2)$$

где A и B — константы, определяемые из значений температур на концах.

Пусть (u_1, v_1), (u_2, v_2) и (u_3, v_3) — значения u и v в некоторых трех сечениях x_1, x_2, x_3 проволоки. Из соотношения (11.2) следует, что

$$\frac{2K}{j\sigma}[v_1(u_2-u_3)+v_2(u_3-u_1)+v_3(u_1-u_2)]=$$
$$=(u_2-u_3)(u_3-u_1)(u_1-u_2). \qquad (11.3)$$

Если на концах проволоки поддерживаются одинаковые температуры, то распределение температур в проволоке окажется симметричным относительно ее средней точки. Пусть точки x_1 и x_3 находятся на равных расстояниях от средней точки x_2 по обе стороны от нее.

Тогда

$$v_1=v_3$$

и

$$u_1-u_2=u_2-u_3.$$

Следовательно, из соотношения (11.3) получим

$$\frac{K}{j\sigma}(v_2-v_1)=\frac{1}{2}(u_1-u_2)^2.$$

Таким образом, мы получили простой метод определения отношения коэффициентов теплопроводности и электропроводности (K/σ). Для нахождения по этому методу значения K/σ необходимо лишь измерить разности температур и потенциалов в двух точках проволоки, причем ток следует регулировать так, чтобы в ней сохранялось установившееся распределение температур.

II. *Метод Каллендера и аналогичные ему методы.*

Рассмотрим участок проволоки $0<x<2l$, концы которого поддерживаются при нулевой температуре, а весь участок окружен оболочкой, имеющей нулевую температуру. Проволока нагревается переменным током, и, следовательно, в соотношении (10.4) данной главы член, содержащий $\partial v/\partial x$ и обусловленный эффектом Томсона, обращается в нуль. Тогда для случая установившегося состояния соотношение (10.4) из предыдущего параграфа принимает вид

$$\frac{d^2v}{dx^2}+a^2v=-k, \qquad (11.4)$$

где

$$k=\frac{jI^2}{\omega^2\sigma_0K} \quad \text{и} \quad a^2=\alpha k-\frac{Hp}{\omega K}. \qquad (11.5)$$

Уравнение (11.4) следует решать с граничными условиями $v=0$ при $x=0$ и $x=2l$. Искомое решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{k}{a^2}\left\{\frac{\cos a(l-x)}{\cos al}-1\right\}, && \text{если } a^2>0, \\ v &= \frac{1}{2}kx(2l-x), && \text{если } a^2=0, \\ v &= \frac{k}{a'^2}\left\{1-\frac{\operatorname{ch} a'(l-x)}{\operatorname{ch} a'l}\right\}, && \text{если } a^2=-a'^2<0. \end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

Этими методами проще всего точно измерить изменение электрического сопротивления проволоки, вызываемое нагревом электрическим током. Если σ_0 — электропроводность при температуре, равной нулю, то сопротивление проволоки при этой температуре запишется в виде

$$R_0=\frac{2l}{\omega\sigma_0}. \tag{11.7}$$

Сопротивление проволоки при протекании тока I в установившихся условиях равно

$$R=\frac{1}{\omega\sigma_0}\int_0^{2l}(1+\alpha v)\,dx. \tag{11.8}$$

Подставляя в это выражение значения v из (11.6), получим ([56, 57]; см. также § 2 гл. VII)

$$\frac{R-R_0}{R_0}=\frac{k\alpha}{a^2}\left(\frac{\operatorname{tg} al}{al}-1\right), \quad \text{если} \quad a^2>0, \tag{11.9}$$

$$\frac{R-R_0}{R_0}=\frac{1}{3}\alpha kl^2=\frac{\alpha jI^2lR_0}{6K\omega}, \quad \text{если} \quad a^2=0, \tag{11.10}$$

$$\frac{R-R_0}{R_0}=\frac{k\alpha}{a'^2}\left(1-\frac{\operatorname{th} a'l}{a'l}\right), \quad \text{если} \quad a^2=-a'^2<0. \tag{11.11}$$

В методе Каллендера [58] сила тока такова, что $a^2=0$, т. е.

$$\frac{\alpha jI^2R_0}{2l}=Hp. \tag{11.12}$$

Отсюда следует, что в соотношении (10.4) предыдущего параграфа коэффициент при v обращается в нуль, т. е. потери тепла с поверхности проволоки в результате теплообмена в точности компенсируются увеличением притока тепла, вызванного увеличением сопротивления проволоки с температурой. При таких условиях K определяется из соотношения (11.10) по данным об известных или измеримых величинах. Один из способов создания условий, соответствующих (11.12), заключается в измерении температуры v_l в средней точке проволоки для случая, когда $a^2<0$. В длинной проволоке температура в разных точках центрального ее участка почти одинакова, т. е. величина d^2v/dx^2 пренебрежимо мала, и уравнение (11.4) можно записать в виде

$$v_l=\frac{k}{a'^2}=\frac{jI^2}{\omega\sigma Hp-\alpha jI^2}. \tag{11.13}$$

Отсюда нетрудно найти величину Hp, и тогда значение I можно выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло (11.12).

Уравнения (11.9) и (11.11) справедливы для любых значений H; однако при использовании этих уравнений следует помнить, что H и K зависят от температуры. Зависимость H от температуры описывается сложной

функцией *), и поэтому приведенными соотношениями практически можно пользоваться лишь тогда, когда температура проволоки мало отличается от температуры окружающей среды **).

Изменение коэффициента теплопроводности с температурой можно исследовать следующим образом [55] ***): если уравнение (10.7) данной главы используется при условии (11.12), то распределение температур в проволоке записывается в виде

$$K_0 \frac{d}{dx}\left[(1+\beta v)\frac{dv}{dx}\right] = -\frac{jI^2}{\omega^2\sigma}. \tag{11.14}$$

Решение этого уравнения, для которого $v=0$ при $x=0$ и $v=2l$, имеет вид

$$K_0 v\left(1+\frac{1}{2}\beta v\right) = jI^2 x(2l-x)/2\omega^2\sigma. \tag{11.15}$$

Если v_l — температура в средней точке проволоки, а

$$K_m = K_0\left(1+\frac{1}{2}\beta v_l\right) \tag{11.16}$$

представляет собой среднее значение коэффициента теплопроводности проволоки для всей области температур от 0 до v_l, то из (11.15) получим

$$K_m = \frac{jI^2 l^2}{2\omega^2\sigma v_l}. \tag{11.17}$$

§ 12. Сильно нагретая проволока, по которой протекает электрический ток

Предположение о том, что обусловленная излучением потеря тепла проволокой в окружающую среду пропорциональна разности температур, справедливо лишь для случая, когда эта разность мала: в противном случае следует считать, что потеря тепла элементом проволоки длиной dx в результате излучения по закону черного тела равна

$$H' p\left(T^4 - T_0^4\right) dx, \tag{12.1}$$

где T — абсолютная температура проволоки, T_0 — абсолютная температура окружающей среды и H' — постоянная ****).

*) Потеря тепла за счет излучения в вакуум пропорциональна разности $\left(v^4 - v_0^4\right)$, и только приближенно ее можно принять пропорциональной $v - v_0$ (подробнее см. следующий параграф). Справедливость выражения вида $H(v - v_0)$ для определения потерь тепла через газовую оболочку, окружающую проволоку, рассмотрена Смолуховским (см. § 2 гл. VII).

**) Кнудсен [59] и Вебер [57] вывели формулу для случая существенного уменьшения H путем помещения проволоки в высокий вакуум. Здесь можно исходить из соотношения (11.9) и получить приближенную формулу путем разложения в ряд $\operatorname{tg} al$.

***) Существует и другой метод подбора коэффициентов в этом уравнении, обеспечивающий простой вид решения.

****) На самом деле, H' представляет собой произведение постоянной Стефана — Больцмана и множителя, содержащего коэффициенты теплообмена проволоки и окружающей ее среды (см. (9.10) гл. I и [20]). Величина (12.1) представляет собой теоретическую величину для излучения черного тела; лучшее приближение в случае нагреваемой проволоки получается при использовании степенного закона того же вида, $\left(T^n - T_0^n\right)$, где n — постоянная, определяемая из эксперимента (см. [61, 62]). В последней из приведенных работ рассматривается изменение по степенному закону электрического сопротивления и коэффициента теплообмена проволоки в зависимости от температуры; в ней обсуждаются также различные случаи, возникающие на практике, например случаи длинных или коротких нитей накала. Первый интеграл уравнения (12.2), соответствующий (12.4), всегда можно найти, если электрическое сопротивление и коэффициент теплопроводности проволоки изменяются с температурой по степенному закону.

Тогда в случае установившегося состояния соотношение (10.1) данной главы следует заменить соотношением

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{H'p}{K\omega}\left(T^4-T_0^4\right)+\frac{jI^2}{K\omega^2\sigma}=0. \tag{12.2}$$

Рассмотрим распределение температур в проволоке длиной $2l$, на концах $x=0$ и $x=2l$ которой поддерживается абсолютная температура T_0. Достаточно рассмотреть область $0<x<l$ при условии, что

$$\left.\begin{aligned} T=T_0,\quad x=0 \\ \frac{dT}{dx}=0,\quad x=l. \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

и

Первый интеграл уравнения (12.2) записывается в виде

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)^2-aT^5+bT+C=0, \tag{12.4}$$

где C — постоянная,

$$a=\frac{2H'p}{5K\omega} \quad \text{и} \quad b=\frac{2H'pT_0^4}{K\omega}+\frac{2jI^2}{K\omega^2\sigma}. \tag{12.5}$$

Пусть T_l — температура в плоскости $x=l$. Тогда из (12.3) и (12.4) следует, что

$$C=aT_l^5-bT_l.$$

Если $T=T_0$ при $x=0$, то из (12.4) получим

$$x=\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{\left\{a\left(T^5-T_l^5\right)-b\left(T-T_l\right)\right\}^{1/2}}. \tag{12.6}$$

Отсюда, положив $x=l$, находим неизвестную величину T_l

$$l=\int_{T_0}^{T_l}\frac{dT}{\left\{a\left(T^5-T_l^5\right)-b\left(T-T_l\right)\right\}^{1/2}}. \tag{12.7}$$

Потеря тепла на концах проволоки равна

$$2K\omega\left[\frac{dT}{dx}\right]_{x=0}=2K\omega\left\{a\left(T_0^5-T_l^5\right)-b\left(T_0-T_l\right)\right\}^{1/2}. \tag{12.8}$$

Оказывается, что решение этой простой задачи нельзя представить элементарными функциями *).

Для полуограниченной проволоки $x>0$, при $x\to\infty$ $d^2T/dx^2\to 0$. При этих условиях из уравнения (12.2) получаем, что $T\to T_m$, если

$$T_m^4=T_0^4+\frac{jI^2}{H'p\omega\sigma}. \tag{12.9}$$

Ясно, что в случае длинной проволоки T_m является хорошим приближением для T_l.

*) Этот вопрос рассмотрен в работах [63, 64]. В работе [65] приведен график интеграла (12.7). В работе [66] даны некоторые численные результаты, полученные при помощи дифференциальных анализаторов; кроме того, в ней рассматривается влияние электронной эмиссии и изменение коэффициента теплопроводности с температурой. Этому же вопросу позднее была посвящена серия работ [67], в которых авторы нашли решения уравнений (12.7) и (12.12) в виде рядов, рассмотрели зависимость тепловых и электрических свойств от температуры и провели сравнение теоретических данных с экспериментальными.

При использовании этого приближения (12.8) принимает вид

$$\left\{\frac{8KjI^2\left(T_0^5+4T_m^5-5T_0T_m^4\right)}{5\sigma\left(T_m^4-T_0^4\right)}\right\}^{1/2}. \tag{12.10}$$

Если T_0 мало по сравнению с T_m, то приближенно получим

$$\left(\frac{32KjI^2T_m}{5\sigma}\right)^{1/2}\left(1-\frac{5T_0}{8T_m}\right). \tag{12.11}$$

Используя выражение (12.9), можно переписать уравнение (12.2) в виде

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{5a}{2}\left(T_m^4-T^4\right)=0. \tag{12.12}$$

Приближенное решение для изменения температуры вблизи центра проволоки может быть получено путем подстановки

$$T'=T_m-T, \tag{12.13}$$

в результате которой уравнение (12.12) принимает вид

$$\frac{d^2T'}{dx^2}-\frac{5a}{2}\left\{4T_m^3T'-6T_m^2T'^2+4T_mT'^3-T'^4\right\}=0. \tag{12.14}$$

Если T' мало, то членами, содержащими T'^2 и т. д., можно пренебречь, и это уравнение примет вид

$$\frac{d^2T'}{dx^2}-10aT_m^3T'=0. \tag{12.15}$$

Его решение, в котором используется величина T'_l при $x=l$, имеет вид *)

$$T'=T'_l\operatorname{ch}\left\{(l-x)\,T_m\,(10aT_m)^{1/2}\right\}. \tag{12.16}$$

§ 13. Установившийся поток тепла в составной проволоке

Задачи по теплопроводности в составных проволоках представляют известный интерес в связи с теорией термопар и приборов для измерения тока. Здесь мы рассмотрим только установившееся состояние; решения для неустановившегося состояния легко получить, воспользовавшись преобразованием Лапласа (см. гл. XII).

Предположим, что участок проволоки $0<x<a$ имеет коэффициент теплопроводности K_1, плотность ρ_1, удельную теплоемкость c_1, коэффициент температуропроводности $\varkappa_1$, температуру v_1, коэффициент теплообмена H_1, площадь поперечного сечения ω_1, периметр сечения p_1, $\mu_1^2=H_1p_1/K_1\omega_1$ и коэффициент электропроводности σ_1. Если в проволоке течет ток I *а*, то $\beta_1=jI^2/\omega_1^2\sigma_1K_1$, где j — число калорий в 1 *дж*. Соответствующие величины для участка проволоки $a<x<b$ будут снабжены индексом 2.

Если проволока имеет различные площади поперечного сечения в двух выбранных нами участках, то в месте их соприкосновения мы не будем учитывать концевые эффекты, и граничные условия запишутся в виде

$$v_1=v_2 \tag{13.1}$$

и

$$\omega_1K_1\frac{dv_1}{dx}=\omega_2K_2\frac{dv_2}{dx}. \tag{13.2}$$

При наличии теплообмена между проволокой и средой, имеющей температуру v_0, искомые дифференциальные уравнения (как и (10.1) данной главы) имеют вид

$$\frac{d^2v_1}{dx^2}-\mu_1^2(v_1-v_0)+\beta_1=0,\qquad 0<x<a, \tag{13.3}$$

$$\frac{d^2v_2}{dx^2}-\mu_2^2(v_2-v_0)+\beta_2=0,\qquad a<x<b. \tag{13.4}$$

Рассмотрим несколько типичных примеров.

---

*) Соотношения такого вида используются в работах [60, 67—70].

1. Температуры в плоскостях $x = 0$ и $x = b$ поддерживаются равными соответственно V_1 и V_2. Теплообмен со средой нулевой температуры. В проволоке отсутствует ток. В этом случае при $\beta_1 = \beta_2 = v_0 = 0$ решения уравнений (13.3) и (13.4), которые принимают значения V_1 и V_2 при $x = 0$ и $x = b$, имеют вид

$$v_1 = V_1 \operatorname{ch} \mu_1 x + A \operatorname{sh} \mu_1 x,$$
$$v_2 = V_2 \operatorname{ch} \mu_2 (b - x) + B \operatorname{sh} \mu_2 (b - x).$$

Граничные условия (13.1) и (13.2) позволяют определить A и B, и мы получим окончательно

$$v_1 = \frac{V_1}{\Delta} \{\mu_2 \omega_2 K_2 \operatorname{ch} \mu_2 (b - a) \operatorname{sh} \mu_1 (a - x) + \mu_1 \omega_1 K_1 \operatorname{sh} \mu_2 (b - a) \operatorname{ch} \mu_1 (a - x)\} + \frac{V_2}{\Delta} \mu_2 \omega_2 K_2 \operatorname{sh} \mu_1 x, \tag{13.5}$$

где

$$\Delta = \mu_2 \omega_2 K_2 \operatorname{sh} \mu_1 a \operatorname{ch} \mu_2 (b - a) + \mu_1 \omega_1 K_1 \operatorname{ch} \mu_1 a \operatorname{sh} \mu_2 (b - a). \tag{13.6}$$

Для v_2 получится аналогичное выражение. Температура в стыке $x = a$ равна следующей величине:

$$\frac{1}{\Delta} \{V_1 \mu_1 \omega_1 K_1 \operatorname{sh} \mu_2 (b - a) + V_2 \mu_2 \omega_2 K_2 \operatorname{sh} \mu_1 a\}. \tag{13.7}$$

2. Температура в плоскостях $x = 0$ и $x = b$ поддерживается равной нулю. Теплообмен со средой нулевой температуры. По проволоке течет ток I. Температура в стыке $x = a$ равна

$$\frac{1}{\Delta \mu_1 \mu_2} \{\beta_2 K_2 \omega_2 \mu_1 \operatorname{sh} \mu_1 a [\operatorname{ch} \mu_2 (b - a) - 1] + \beta_1 K_1 \omega_1 \mu_2 \operatorname{sh} \mu_2 (b - a) [\operatorname{ch} \mu_1 a - 1]\}, \tag{13.8}$$

где Δ — величина, определяемая (13.6).

3. Температура в плоскости $x = 0$ поддерживается равной V_1. Тепловой поток через плоскость $x = b$ отсутствует. Ток в проволоке отсутствует. Теплообмен со средой нулевой температуры. В данном случае

$$v_2 = \frac{K_1 \omega_1 \mu_1 V_1 \operatorname{ch} \mu_2 (b - x)}{\Delta'}, \tag{13.9}$$

где

$$\Delta' = K_1 \omega_1 \mu_1 \operatorname{ch} \mu_1 a \operatorname{ch} \mu_2 (b - a) + K_2 \omega_2 \mu_2 \operatorname{sh} \mu_1 a \operatorname{sh} \mu_2 (b - a). \tag{13.10}$$

4. Температура в плоскости $x = 0$ поддерживается равной нулю. Тепловой поток через плоскость $x = b$ отсутствует. По проволоке течет ток I. Теплообмен со средой нулевой температуры. В данном случае

$$v_2 = \frac{\beta_2}{\mu_2^2} + \left\{ \frac{K_1 \omega_1 (\beta_1 \mu_2^2 - \beta_2 \mu_1^2)}{\mu_1 \mu_2^2 \Delta'} \operatorname{ch} \mu_1 a - \frac{K_1 \omega_1 \beta_1}{\mu_1 \Delta'} \right\} \operatorname{ch} \mu_2 (b - x), \tag{13.11}$$

где Δ' — величина, определяемая (13.10).

§ 14. Неустановившаяся температура в проволоке, по которой течет электрический ток

Наблюдения над неустановившимся температурным полем в проволоке, по которой течет постоянный электрический ток, при наличии теплообмена на ее поверхности также использовались для определения тепловых и электрических констант. Ниже приведено исследование, посвященное этому вопросу [41, 71—73].

Мы нашли уравнение теплопроводности (10.1) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \nu (v - v_0) + a,$$

где

$$\varkappa = \frac{K}{c\rho}, \quad \nu = \frac{Hp}{c\rho\omega} \quad \text{и} \quad a = \frac{jI^2}{c\rho\omega^2\sigma}.$$

Пусть температура среды, в которую происходит теплообмен, равна нулю, а начальные и граничные условия имеют вид

$$v = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (0 < x < l)$$

и

$$v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \text{ и } x = l.$$

Чтобы проинтегрировать уравнение теплопроводности, мы, как обычно, сведем задачу к решению двух задач: задачи для установившейся температуры и задачи для неустановившейся температуры.

Пусть

$$v = u + w,$$

где u — функция, не зависящая от времени и удовлетворяющая уравнениям

$$\varkappa \frac{d^2u}{dx^2} - \nu u + a = 0,$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l,$$

а w — функция x и t, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu w,$$

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l,$$

$$w = -u \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Выражение для u получается сразу в виде

$$u = b\left[1 - \frac{\operatorname{sh} \mu x + \operatorname{sh} \mu (l - x)}{\operatorname{sh} \mu l}\right], \tag{14.1}$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{\nu}{\varkappa}} \quad \text{и} \quad b = \frac{a}{\nu}.$$

Эту функцию можно разложить в ряд по синусам

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4bl^2\mu^2}{\pi(2n-1)[(2n-1)^2\pi^2 + l^2\mu^2]} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

При таком значении u сразу же получается решение уравнения для w в виде

$$w = -\frac{4b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2\mu^2}{(2n-1)\{(2n-1)^2\pi^2 + l^2\mu^2\}} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{l} \times$$

$$\times \exp\left[-\nu t - t\,\frac{\varkappa(2n-1)^2\pi^2}{l^2}\right]. \tag{14.2}$$

Отсюда

$$v = b\left[1 - \frac{\operatorname{sh} \mu x + \operatorname{sh} \mu (l - x)}{\operatorname{sh} \mu l} - \right.$$

$$\left. - \frac{4b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2\mu^2}{(2n-1)\{(2n-1)^2\pi^2 + l^2\mu^2\}} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{l} \exp\left[-\nu t - t\,\frac{\varkappa(2n-1)^2\pi^2}{l^2}\right]\right. \tag{14.3}$$

Исследуя это решение, мы замечаем, что коэффициенты членов ряда для w быстро уменьшаются и при $x = l/3$ или $2l/3$ второй член этого ряда равен нулю. Следовательно, с хорошим приближением значение v в этих

точках определяется соотношением

$$v = [u]_{\frac{1}{3}l} - \frac{2bl^2\mu^2\sqrt{3}}{\pi(\pi^2 + l^2\mu^2)} \exp\left[-\nu t - t\frac{\varkappa\pi^2}{l^2}\right]. \tag{14.4}$$

Пусть v_1, v_2, v_3 — температуры в точке $x = \frac{1}{3}l$ в моменты времени t_1, $t+\tau$, $t+2\tau$. Тогда из (14.4) получим

$$\ln\frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_2} = \left(\frac{\varkappa\pi^2}{l^2} + \nu\right)\tau \tag{14.5}$$

и

$$v_2 - v_1 = \frac{2bl^2\mu^2\sqrt{3}}{\pi(\pi^2 + l^2\mu^2)}\left\{\exp\left[-\frac{(\nu + \varkappa\pi^2)}{l^2}t_1\right] - \exp\left[-\frac{(\nu + \varkappa\pi^2)}{l^2}t_2\right]\right\}. \tag{14.6}$$

Значение установившейся температуры v_4 в средней точке проволоки равно

$$v_4 = b\left(1 - \operatorname{sech}\frac{1}{2}\mu l\right). \tag{14.7}$$

Из соотношения (14.5) определим величину $(\nu + k\pi^2/l^2)$. Подставляя эту величину в (14.6), найдем μ, а затем из (14.7) — величину b. Используя найденные результаты при определении a, b и μ, найдем значения $\varkappa$, ν и σ. В исходных опытах Странео проволоку вначале нагревали током до тех пор, пока в ней не достигалось установившееся распределение температур. Если затем ток выключали в момент $t = 0$, то температура определялась соотношением

$$v = \frac{4b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^2\mu^2}{(2n-1)[(2n-1)^2\pi^2 + l^2\mu^2]}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\exp\left[-\nu t - \frac{\varkappa t(2n-1)^2\pi^2}{l^2}\right].$$

Метод определения $\varkappa$, ν и σ, описанный выше и приводивший нас к соотношениям (14.5), (14.6) и (14.7), остается по-прежнему применимым.

Этими результатами можно пользоваться только в тех случаях, когда температура проволоки незначительно превышает температуру окружающей среды. При высоких температурах проволоки, когда ее тепловые потери определяются излучением по закону четвертых степеней *), уравнение теплопроводности при неустановившемся состоянии, соответствующее уравнению (12.12) данной главы, принимает вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{5a}{2}\left(T_m^4 - T^4\right) = 0,$$

где T — абсолютная температура проволоки, T_m и α определяются (12.5) и (12.9) данной главы. Можно отметить следующий простой результат: в центре длинной проволоки, где $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ пренебрежимо мало, в случае включения тока при $t = 0$ и при начальной температуре, равной T_0, температура T в момент времени t определяется соотношением

$$\exp\left\{-10a\varkappa T_m^3 t + 2\operatorname{arctg}\frac{T}{T_m} - 2\operatorname{arctg}\frac{T_0}{T_m}\right\} = \frac{(T_m - T)(T_m + T_0)}{(T_m + T)(T_m - T_0)}. \tag{14.8}$$

§ 15. Кольцо Фурье

Одной из наиболее простых и показательных задач теплопроводности, в которых температура зависит только от одной координаты и от времени, является задача Фурье для кольца. Эта задача особенно интересна еще и потому, что к ней Фурье

*) Недавно было проведено детальное рассмотрение данного вопроса. Обсуждался также вопрос о запаздывании наступления установившегося состояния [67, 77].

впервые применил свою математическую теорию и для нее результаты математических исследований были сравнены с данными эксперимента [75].

Кольцо представляет собой тело малого поперечного сечения, согнутое по окружности (или по другой замкнутой кривой). Используя обозначения и предположения, принятые в § 2 настоящей главы, мы видим, что дифференциальное уравнение температурного поля в кольце имеет вид уравнения (2.4), а именно:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \nu v. \tag{15.1}$$

Пусть длина окружности кольца равна $2l$; тогда, выбрав начало координат в некоторой подходящей точке, мы можем решать уравнение (15.1) в области $-l \leqslant x \leqslant l$. Поскольку кольцо образует замкнутую кривую, мы не имеем граничных условий при $x = \pm l$, но зато v должно быть периодической функцией x с периодом $2l$, т. е.

$$v(x, t) = v(x + 2nl, t), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{15.2}$$

I. *Начальная температура $f(x)$. Теплообмен отсутствует.*

Предположим, что $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{15.3}$$

Тогда

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right] \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right] \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{15.4}$$

удовлетворяет всем условиям задачи. Это можно доказать так же, как и в § 3 гл. III *).

Решение для случая теплообмена легко получить путем подстановки $v = ue^{-\nu t}$ в уравнение (15.1).

II. *Установившаяся температура; плоскости $x = \pm l$ поддерживаются при температуре V.*

В этом случае распределение температур должно быть четной функцией x, которая при $x = \pm l$ принимает значение V и удовлетворяет уравнению (15.1) при $\frac{dv}{dt} = 0$.

Тогда решение имеет следующий вид:

$$v = V\frac{\operatorname{ch}\mu x}{\operatorname{ch}\mu l}, \tag{15.5}$$

где

$$\mu^2 = \frac{\nu}{\varkappa}. \tag{15.6}$$

Это выражение можно использовать для сравнения коэффициентов теплопроводности [75] двух твердых тел при помощи метода, аналогичного методу, приведенному в § 5 данной главы.

III. *Кольцо с установившейся температурой, определяемой* (15.5), *охлаждающееся в результате теплообмена со средой нулевой температуры.*

Положив в уравнении (15.1) $v = ue^{-\nu t}$, будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -l \leqslant x \leqslant l, \tag{15.7}$$

в виде периодической функции с периодом $2l$ и следующим начальным значением:

$$V\frac{\operatorname{ch}\mu x}{\operatorname{ch}\mu l} = \frac{2\mu V \operatorname{th}\mu l}{l}\left[\frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu^2 + (n^2\pi^2/l^2)} \cos\frac{n\pi x}{l}\right]. \tag{15.8}$$

---

*) Можно также доказать, что в этом случае v и $\partial v/\partial x$ непрерывны при $x = \pm l$ для $t > 0$, поскольку кольцо замкнуто. При $t = 0$ они могут не быть непрерывными.

Используя соотношение (15.4), находим решение в виде

$$v = \frac{2V\mu}{l} \operatorname{th} \mu l \exp[-\nu t] \left\{ \frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu^2 + (n^2\pi^2/l^2)} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right] \cos\frac{n\pi x}{l} \right\}. \quad (15.9)$$

Соотношение (15.9) можно использовать для определения $\varkappa$ и ν из данных о температуре при $x = 0$ и $x = l$ [31, 76].

ЛИТЕРАТУРА

1. Fox, Phil. Mag. **18**, 209—227 (1934).
2. Todd, J. Sci. Instr. **4**, 97 (1927).
3. Poynting, Thomson. Text-book of Physics, Heat, ed. 6.
4. Winkelmann, Handbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. III.
5. Preston, Theory of Heat, ed. 3.
6. Ann. Physik, Lpz., **114**, 513 (1861).
7. Ann. Physik, Lpz., **123**, 628 (1864).
8. Phil. Mag. **25**, 130 (1863).
9. Phil. Mag. **26**, 161 (1863).
10. Bosanquet, Aris, Brit. J. Appl. **5**, 252—255 (1954).
11. Griffiths, Proc. Phys. Soc. **41**, 151 (1928).
12. Hagström, Öfvers. Vetensk. Akad. Förh., Stockh. **48**, 45, 289, 381 (1891).
13. King, Phys. Rev. **6**, 437 (1915).
14. Jakob, Erk, Z. Phys. **35**, 670 (1926).
15. Lees, Phil. Trans. Roy. Soc. **A208**, 381 (1908).
16. Kannuluik, Laby, Proc. Roy. Soc. **A121**, 640 (1928).
17. Bridgman, Proc. Am. Acad. Arts. Sci. **57**, 80 (1922).
18. Barratt, Winter, Phil. Mag. **49**, 313 (1925).
19. Barratt, Proc. Phys. Soc. **26**, 347 (1914).
20. McAdams, Heat Transmission, McGraw-Hill, ed. 2. (В. Мак-Адамс, Теплопередача, ОНТИ, 1936, перев. с 1-го изд.)
21. Jakob, Heat Transfer, Wiley, 1949. (М. Якоб, Вопросы теплопередачи, ИЛ, 1960, перев. с изд. 1957 г.)
22. Harper, Brown, NACA Rep. No. 158 (1922).
23. Binnie, Phil. Mag. **2**, 449 (1926).
24. Schmidt, Z. Ver. dtsch. Ing. **70**, 885, 947 (1926).
25. Bueche, Schau, Arch. Warmew. **17**, 67 (1936).
26. Gardner, Trans. ASME **67**, 621 (1945).
27. Jakob, Trans. ASME **67**, 629 (1945).
28. Miles, J. Appl. Phys. **23**, 372 (1952).
29. Jakob, Phil. Mag. **28**, 571 (1939).
30. Lowan, Quart. Appl. Math. **4**, 84—87 (1946).
31. Neumann, Ann. Chim. Phys. **66**, 183 (1862).
32. Glage, Ann. Physik (4), **18**, 904—940 (1905).
33. Weber, Ann. Physik **146**, 257 (1872).
34. Nettleton, Proc. Phys. Soc. **22**, 278 (1910).
35. Nettleton, Proc. Phys. Soc. **25**, 44 (1912).
36. Somers, Proc. Phys. Soc. **25**, 74 (1912).
37. Owen, Proc. Lond. Math. Soc. **23**, 238 (1925).
38. Verdet, Théorie mécanique de la chaleur, T. II, p. 197, 1872.
39. Cranz, Z. Math. Phys. **34**, 92 (1889).
40. Ebeling, Ann. Physik **27**, 391 (1908).
41. Weinreich, Z. Math. Phys. **63**, 1 (1915).
42. Fischer, Z. tech. Phys. **19**, 25 (1938).
43. Ann. Physik **89**, 497 (1853).
44. Nettleton, Proc. Phys. Soc. **29**, 50 (1916).
45. King, Proc. Am. Acad. Arts Sci. **33**, 353 (1898).
46. Laws, Phil. Mag. **7**, 560 (1904).
47. Berg, Ann. Physik **32**, 477 (1910).
48. Forbes, Trans. Roy. Soc. Edin. **23**, 133 (1864).
49. Kohlrausch, S. B. preuss. Akad. Wiss. 714 (1899).
50. Kohlrausch, Ann. Physik **1**, 132 (1900).
51. Czermak, S. B. Akad. Wiss. Wien **103**, 1107 (1894).

52. Duncan, Pap. Dep. Phys. McGill Univ., No. 11 (1900).
53. Jaeger, Diesselhorst, Wiss. Abh. phys.-tech. Reichsanst. **3**, 269 (1900).
54. Meissner, Ann. Physik **47**, 1001 (1915).
55. O'Day, Phys. Rev. **23**, 245 (1924).
56. Kannuluik, Proc. Roy. Soc. **A131**, 320 (1931).
57. Weber, Ann. Physik **54**, 165 (1917).
58. Encyclopaedia Britannica, 11th ed.
59. Knudsen, Ann. Physik **34**, 593 (1911).
60. Worthing, Phys. Rev. **4**, 523 (1914).
61. Langmuir, Phys. Rev. **7**, 151 (1916).
62. Langmuir, Taylor, Phys. Rev. **50**, 68 (1936).
63. Cox, Phys. Rev. **64**, 241 (1943).
64. Baerwald, Phil. Mag. **21**, 641 (1936).
65. Nagai, J. Phys. Soc. Japan **11**, 329—330 (1956).
66. Bush, Gould, Phys. Rev. **29**, 337 (1927).
67. Jain, Krishnan, Proc. Roy. Soc. **A222**, 167—180 (1954); **A225**, 1—32 (1954); **A227**, 141—154 (1955); **A229**, 439—445 (1955).
68. Worthing, J. Franklin Inst. **194**, 597 (1922).
69. Stead, J. Instn. Elect. Engrs. **58**, 107 (1920).
70. Prescott, Hincke, Phys. Rev. **31**, 130 (1928).
71. Straneo, R. C. Accad. Lincei **7**, Sem. ii (1898).
72. Schaufelberger, Ann. Physik **7**, 589 (1902).
73. Fischer, Z. tech. Phys. **19**, 105 (1938).
74. Wintergerst, Z. angew. Phys. **2**, 167 (1950).
75. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Chaps. II et IV.
76. Neumann, Phil. Mag. **25**, 63 (1863).

ГЛАВА V

ПОТОК ТЕПЛА В ТЕЛЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

§ 1. Введение

В последних трех главах мы изучали различные задачи с линейным тепловым потоком. В этих случаях температура зависела только от времени и от одной геометрической координаты. Подобные задачи можно назвать одномерными. Перейдем теперь к рассмотрению случаев, в которых вектор теплового потока в каждой точке*) параллелен плоскости xy; тогда при установившейся температуре последняя будет зависеть только от x и y, а в случае неустановившейся — от x, y и t. Такие задачи мы будем называть двумерными.

Первой задачей теплопроводности, детально разобранной Фурье, была задача об установившемся распределении температур в бесконечном твердом теле, ограниченном плоскостями $x = \pm \frac{1}{2}\pi$, $y = 0$, и бесконечно простирающемся в положительном направлении оси y. Граничные поверхности $x = \pm\frac{1}{2}\pi$ поддерживаются при температуре, равной нулю, а основание $y = 0$ — при температуре, равной единице. При изучении этой задачи Фурье предложил разложить единицу в интервале $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ в ряд**)

$$\frac{4}{\pi}\left\{\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots\right\},$$

а затем рассмотрел вопрос о разложении производной функции в тригонометрический ряд и получил выражение, известное теперь как ряд Фурье. Таким образом, он смог найти распределение температур в твердом теле, основание которого поддерживается при температуре $v = f(x)$, где $f(x)$ — произвольная функция x, а плоскости $x = \pm\frac{1}{2}\pi$ поддерживаются, как и раньше, при нулевой температуре.

---

*) Здесь автор рассматривает распространение тепла в телах, неограниченных в направлении, перпендикулярном плоскости xy. (*Прим. ред.*)

**) Ряд $\frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots\right)$ для функции $f(x)$ можно получить обычным путем, как ряд по косинусам, если

$$f(x) = 1 \qquad \left(0 < x < \frac{1}{2}\pi\right),$$

$$f(x) = 1 \qquad \left(\frac{1}{2}\pi < x < \pi\right).$$

§ 2. Неограниченное твердое тело прямоугольного сечения. Установившаяся температура

Вместо того чтобы брать задачу Фурье в том виде, в каком он ее решает, рассмотрим твердое тело, ограниченное плоскостями $x=0$ и $x=l$, которые поддерживаются при нулевой температуре, и плоскостью $y=0$, которая поддерживается при температуре $v=f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ ограничена и удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $(0, l)$ [1].

Уравнения теплопроводности в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<l; \quad y>0. \tag{2.1}$$

$$v=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=l, \tag{2.2}$$

$$v=f(x) \quad \text{при} \quad y=0, \quad 0<x<l. \tag{2.3}$$

Кроме того,

$$\lim_{y\to\infty} v=0.$$

Начиная с разложения $f(x)$ в ряд по синусам

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.4}$$

где

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x')\sin\frac{n\pi x'}{l}\,dx', \tag{2.5}$$

рассмотрим функцию v, определяемую уравнением

$$v=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left[-\frac{n\pi y}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{2.6}$$

Так как $f(x)$ — ограниченная функция, интегрируемая в интервале $(0, l)$, то из (2.5) следует, что

$$|a_n|<2M, \quad \text{когда} \quad |f(x)|<M \text{ в интервале } (0, l).$$

Кроме того,

$$\left|a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\exp\left[-\frac{n\pi y}{l}\right]\right|<2M\exp\left[-\frac{n\pi y_0}{l}\right] \quad \text{при} \quad y\geqslant y_0>0,$$

где y_0 — произвольное положительное число.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi y_0/l}$$

сходится, и его члены не зависят от x и y.

Таким образом, ряд (2.6), рассматриваемый как функция x, равномерно сходится в любом интервале x, когда $y>0$. Если же его рассматривать как функцию y, то он равномерно сходится при $y\geqslant y_0>0$.

В этих интервалах сходятся также ряды, получаемые из ряда (2.6) почленным дифференцированием по x и y.

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n e^{-n\pi y/l} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\pi^2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n e^{-n\pi y/l} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

и ряд (2.6) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1). Кроме того, он удовлетворяет граничным условиям на плоскостях $x=0$ и $x=l$. Действительно, ряд (2.6) равномерно сходится в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ и его сумма равна нулю, когда $x=0$ и $x=l$; поэтому при положительном y предел v при x, стремящемся к этим значениям, равен нулю.

Мы предположили, что функция $f(x)$ ограничена и удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $(0, l)$. Отсюда следует, что ряд (2.4) сходится и его сумма равна $f(x)$ в каждой точке между 0 и l, в которой $f(x)$ непрерывна, и $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ во всех других точках. Из рассуждений, изложенных в § 73 книги Карслоу [1], следует, что если v определяется рядом (2.6), то $\lim\limits_{y\to 0} v = f(x)$ в тех точках, где функция $f(x)$ непрерывна, и равен $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ во всех других точках.

Таким образом, ряд (2.6) служит решением нашей задачи; его можно записать в виде

$$v = \frac{2}{l}\int_0^l f(x')\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n\pi y/l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x'}{l}\right)dx', \tag{2.7}$$

поскольку ряд под интегралом равномерно сходится.

Если $f(x)$ равно единице, то решение (2.6) принимает вид

$$v = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}\exp\left[-\frac{n\pi y}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.8}$$

т. е.

$$v = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\exp\left[-\frac{(2n+1)\pi y}{l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} = \tag{2.9}$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\exp\left[-\frac{\pi(y-ix)}{l}\right] + \frac{1}{3}\exp\left[-\frac{3\pi(y-ix)}{l}\right] + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\ln\frac{1+\exp\left[\dfrac{\pi i(x+iy)}{l}\right]}{1-\exp\left[\dfrac{\pi i(x+iy)}{l}\right]}\right\} = \tag{2.10}$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\ln\frac{1-\exp\left[-\dfrac{2\pi y}{l}\right]+2i\exp\left[-\dfrac{\pi y}{l}\right]\sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)}{1-2\exp\left[-\dfrac{\pi y}{l}\right]\cos\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)+\exp\left[-\dfrac{2\pi y}{l}\right]}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sin(\pi x/l)}{\mathrm{sh}(\pi y/l)}. \tag{2.11}$$

Сопряженная гармоническая функция *) с (2.11), т. е. действительная часть логарифма в (2.10), имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{1+2\exp\left[-\frac{\pi y}{l}\right]\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)+\exp\left[-\frac{2\pi y}{l}\right]}{1-2\exp\left[-\frac{\pi y}{l}\right]\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)+\exp\left[-\frac{2\pi y}{l}\right]}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{l}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{l}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)}\right). \qquad (2.12)$$

Отсюда следует, что линии тока определяются уравнением

$$\frac{\operatorname{ch}(\pi y/l)+\cos(\pi x/l)}{\operatorname{ch}(\pi y/l)-\cos(\pi x/l)}=\text{const};$$

они ортогональны изотермам [2]

$$\frac{\sin(\pi x/l)}{\operatorname{sh}(\pi y/l)}=\text{const}.$$

Соответствующая задача, но при наличии теплообмена с одной или с двух поверхностей $x=0$ и $x=l$ рассматривается, как и в § 3 настоящей главы.

Рассмотрим теперь задачу об *установившейся температуре в теле с сечением в виде полосы* $0<x<l$, $y>0$ *и с граничными условиями*

$$v=f(y),\quad x=0,\quad y>0, \qquad (2.13)$$

$$v=0,\quad x=l,\quad y>0, \qquad (2.14)$$

$$v=0,\quad 0<x<l,\quad y=0. \qquad (2.15)$$

Здесь мы используем интеграл Фурье (3.8), приведенный в гл. II, вместо ряда по синусам, который был использован выше. Отметим, что при любом ξ функция

$$\sin\xi y\operatorname{sh}\xi(l-x)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1) и граничным условиям (2.14) и (2.15).

Таким образом, интеграл

$$\int_0^\infty \sin\xi y\operatorname{sh}\xi(l-x)F(\xi)\,d\xi, \qquad (2.16)$$

где $F(\xi)$ — произвольная функция, также удовлетворяет этим условиям. Если, кроме того, (2.16) удовлетворяет (2.13), то мы получим

$$f(y)=\int_0^\infty \sin\xi y\operatorname{sh}\xi lF(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, используя (3.9) гл. II, находим

$$\operatorname{sh}\xi lF(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(y')\sin\xi y'\,dy'.$$

Подставляя это значение $F(\xi)$ в (2.16), получим решение нашей задачи в виде

$$v=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\xi y\frac{\operatorname{sh}\xi(l-x)}{\operatorname{sh}\xi l}\,d\xi\int_0^\infty f(y')\sin\xi y'\,dy'. \qquad (2.17)$$

*) Определение и свойства сопряженных гармонических функций см. §§ 6—9 гл. XVI. Символ Im принят для обозначения мнимой части соответствующего выражения.

Если мы предположим, что можно изменить порядок интегрирования, то

$$v=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(y')\,dy'\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\xi(l-x)}{\operatorname{sh}\xi l}\sin\xi y\sin\xi y'\,d\xi,$$

т. е.

$$v=\frac{1}{2l}\sin\frac{\pi x}{l}\int_0^\infty f(y')\left\{\frac{1}{\cos[\pi(l-x)/l]+\operatorname{ch}[\pi(y-y')/l]}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\cos[\pi(l-x)/l]+\operatorname{ch}[\pi(y+y')/l]}\right\}dy'. \quad (2.18)$$

Ясно, что задачи при наличии теплообмена на поверхностях $y=0$ или $x=l$ можно рассматривать тем же способом (ср. следующий параграф). Однако приведенный выше анализ, из которого следует соотношение (2.18), нужно считать формальным и не вполне безупречным; не только изменение порядка интегрирования в (2.17), но и применение (3.8) гл. II налагает жесткие ограничения на функцию $f(y)$. На самом деле они не необходимы, и более детальное рассмотрение [3] показывает, что (2.18) справедливо при условии, что $f(y)$ является функцией экспоненциального вида, т. е. $|f(y)|<Ke^{c|y|}$, где K и c — положительные постоянные.

Два других важных результата можно формально вывести аналогичным образом, используя интеграл Фурье.

Рассмотрим тело с сечением в виде неограниченной полосы $0<x<l$, $-\infty<y<\infty$; *граничные поверхности* $x=0$ *и* $x=l$ *поддерживаются при температурах* $f(x)$ *и нуль соответственно.* Тогда установившаяся температура равна

$$\frac{1}{2l}\sin\frac{\pi x}{l}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y')\,dy'}{\cos[\pi(l-x)/l]+\operatorname{ch}[\pi(y-y')/l]}. \quad (2.19)$$

Для случая, когда *сечение тела имеет вид полуплоскости*)* $x>0$, $-\infty<y<\infty$, *а граничная поверхность* $x=0$ *поддерживается при температуре* $f(y)$, установившаяся температура равна

$$\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y')\,dy'}{x^2+(y-y')^2}. \quad (2.20)$$

§ 3. Установившаяся температура в неограниченном теле прямоугольного сечения $0<x<a$, $0<y<b$

Здесь требуется найти решение следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b, \quad (3.1)$$

причем граничные условия зависят от рассматриваемой задачи.

I. *Граничная поверхность* $y=0$ *поддерживается при температуре* $f(x)$, *другие поверхности — при нулевой температуре.*

В данном случае граничные условия запишутся следующим образом:

$$v=f(x),\quad y=0,\quad 0<x<a, \quad (3.2)$$
$$v=0,\quad y=b,\quad 0<x<a, \quad (3.3)$$
$$v=0,\quad x=0,\quad 0<y<b, \quad (3.4)$$
$$v=0,\quad x=a,\quad 0<y<b. \quad (3.5)$$

*) Установившаяся температура в полуплоскости $x>0$, $-\infty<y<\infty$ и в четверть плоскости $x>0$, $y>0$ рассматривается в [4].

Как и в предыдущем параграфе, запишем $f(x)$ в виде ряда по синусам

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad (3.6)$$

где

$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi x'}{a}\,dx'. \qquad (3.7)$$

Теперь для любого n член вида

$$\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{(b-y)\,n\pi}{a} \qquad (3.8)$$

удовлетворяет соотношениям (3.1), (3.3), (3.4) и (3.5). Таким образом, нам нужно рассмотреть выражение

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin(n\pi x/a)\,\mathrm{sh}\,[(b-y)\,n\pi/a]}{\mathrm{sh}\,(n\pi b/a)}, \qquad (3.9)$$

где a_n определяется (3.7). Доказательство того, что (3.9) удовлетворяет (3.1)—(3.5), можно провести точно так же, как и в предыдущем параграфе *).

Если $f(x)$ равно постоянной величине V, то (3.9) примет вид

$$v=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\,\pi x/a]\,\mathrm{sh}\,[(b-y)(2n+1)\,\pi/a]}{(2n+1)\,\mathrm{sh}\,[(2n+1)\,\pi b/a]}. \qquad (3.10)$$

Если некоторые другие граничные поверхности тела прямоугольного сечения также поддерживаются при заданной температуре, то решение можно получить путем комбинации решений вида (3.9).

II. *Граничная поверхность $y=0$ поддерживается при температуре $f(x)$. Тепловой поток через поверхности $y=b$ и $x=0$ отсутствует. На поверхности $x=a$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

В данном случае граничные условия имеют вид

$$v=f(x),\quad y=0,\quad 0<x<a, \qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad y=b,\quad 0<x<a, \qquad (3.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad x=0,\quad 0<y<b, \qquad (3.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+hv=0,\quad x=a,\quad 0<y<b. \qquad (3.14)$$

Выражение

$$\cos\alpha x\,\mathrm{ch}\,\alpha(b-y)$$

удовлетворяет (3.1), (3.13) и (3.12) при любом α. Оно также удовлетворяет (3.14), если α служит корнем уравнения

$$\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha a=h. \qquad (3.15)$$

*) Требуется, чтобы $\frac{\mathrm{sh}\,[n\pi(b-y)/a]}{\mathrm{sh}\,[n\pi b/a]}$ было меньше $2e^{-n\pi y/a}$, если n больше некоторого фиксированного n_0. Тогда ход доказательства окажется точно таким же, как и в предыдущем параграфе.

Корни α_n этого уравнения при $n = 1, 2, \ldots$ рассматривались в § 10 гл. III. Если теперь мы предположим, что $f(x)$ можно представить в форме, аналогичной уравнению (10.9) гл. III, то решение нашей задачи примет вид

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(h^2 + \alpha_n^2\right) \cos \alpha_n x \operatorname{ch}\left[\alpha_n (b - y)\right]}{\left[\left(\alpha_n^2 + h^2\right) a + h\right] \operatorname{ch} \alpha_n b} \int_0^a f(x) \cos \alpha_n x \, dx, \tag{3.16}$$

где α_n — положительные корни (3.15).

Если $f(x) = V = \text{const}$, то оно запишется в виде

$$v = 2hV \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x \cdot \operatorname{ch}\left[\alpha_n (b - y)\right]}{\left[\left(\alpha_n^2 + h^2\right) a + h\right] \cos \alpha_n a \cdot \operatorname{ch} \alpha_n b}. \tag{3.17}$$

Из соображений симметрии следует, что это выражение служит также решением для тела с сечением $-a < x < a$, $0 < y < 2b$, когда граничные поверхности $y = 0$ и $y = 2b$ поддерживаются при температуре V, а на поверхностях $x = -a$ и $x = a$ происходит теплообмен.

III. *Граничная поверхность $y = 0$ поддерживается при температуре $f(x)$. Тепловой поток через поверхность $x = 0$ отсутствует. На поверхностях $x = a$ и $y = b$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

В данном случае граничными условиями служат (3.11), (3.13), (3.14) и

$$\frac{\partial v}{\partial y} + hv = 0, \quad y = b, \quad 0 < x < a. \tag{3.18}$$

Выражение $\cos \alpha x \{\alpha \operatorname{ch}[\alpha (b - y)] + h \operatorname{sh}[\alpha (b - y)]\}$ удовлетворяет (3.1), (3.13) и (3.18) для всех значений α. Поступая так же, как и в примере II, находим решение в виде

$$v = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(h^2 + \alpha_n^2\right) \cos\left(\alpha_n x\right) \left\{\alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + h \operatorname{sh} \alpha_n (b - y)\right\}}{\left[\left(\alpha_n^2 + h^2\right) a + h\right] \left\{\alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n b + h \operatorname{sh} \alpha_n b\right\}} \int_0^a f(x) \cos \alpha_n x \, dx, \tag{3.19}$$

где α_n — положительные корни (3.15).

Если $f(x) = V = \text{const}$, то (3.19) принимает вид

$$v = 2hV \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x \left\{\alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + h \operatorname{sh} \alpha_n (b - y)\right\}}{\left[\left(\alpha_n^2 + h^2\right) a + h\right] \left\{\alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n b + h \operatorname{sh} \alpha_n b\right\} \cos \alpha_n a}. \tag{3.20}$$

Это выражение представляет собой решение для тела с сечением $-a < x < a$, $0 < y < b$, когда плоскость $y = 0$ поддерживается при постоянной температуре V и имеет место теплообмен на других поверхностях со средой нулевой температуры. Это решение использовалось при изучении распределения температур в охлаждающих ребрах конечной толщины [5, 6]. Соответствующая задача для тонкого ребра рассмотрена в § 6 гл. IV, а для ребра, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, — в § 2 гл. VI.

IV. *Граничная поверхность $y = 0$ поддерживается при температуре $f(x)$; поверхность $y = b$ — при нулевой температуре. Тепловой поток через $x = 0$ отсутствует. На поверхности $x = a$ имеет место теплообмен со средой нулевой температуры.*

В данном случае решение имеет вид

$$v = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(h^2 + \alpha_n^2\right) \cos \alpha_n x \operatorname{sh} \alpha_n (b - y)}{\left[\left(\alpha^2 + h^2\right) a + h\right] \operatorname{sh} \alpha_n b} \int_0^a f(x) \cos \alpha_n x \, dx, \tag{3.21}$$

где α_n — положительные корни уравнения (3.15).

Если $f(x) = V = \text{const}$, то наше решение примет вид

$$v = 2hV \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y)}{\left[\left(\alpha_n^2 + h^2\right) a + h\right] \cos \alpha_n a \operatorname{sh} \alpha_n b}. \tag{3.22}$$

Это выражение представляет собой решение для тела с сечением $-a < x < a$, $0 < y < b$, когда граничная поверхность $y = 0$ поддерживается при температуре V, $y = b$ — при нулевой температуре и на поверхностях $x = \pm a$ имеет место теплообмен.

Если поверхность $y = 0$ поддерживается при температуре V, $y = b$ — при температуре V_2, а на двух других поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то решение принимает вид

$$v = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[V_1 \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + V_2 \operatorname{sh} \alpha_n y] \cos \alpha_n x}{\left[\left(\alpha_n^2 + h^2\right) a + h\right] \cos \alpha_n a \operatorname{sh} \alpha_n b}. \tag{3.23}$$

V. *Случай различной теплопроводности в направлениях x и y.*

Этот случай, который часто встречается в инженерной практике, можно рассматривать путем простого распространения метода, изложенного выше. Предположим, что теплопроводность в направлении x в k^2 раз больше, чем в направлении y, где k^2 — постоянная. Тогда уравнение (3.1) заменяется уравнением

$$k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{3.24}$$

Как и в разобранном выше примере I, член вида

$$\sin \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{k (b - y) n\pi}{a} \tag{3.25}$$

удовлетворяет (3.24) и заменяет (3.8). Тогда решение этой задачи, соответствующее (3.9), примет вид

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(n\pi x/a) \operatorname{sh} [k (b - y) n\pi/a]}{\operatorname{sh} (kn\pi b/a)}. \tag{3.26}$$

§ 4. Тонкая пластина с прямоугольным сечением при наличии теплообмена на ее поверхности

Предположим, что исследуемая пластина лежит в плоскости xy, причем ее толщина D в направлении оси z настолько мала, что температуру по толщине пластины можно считать постоянной. Пусть H — коэффициент теплообмена материала пластины, K — его коэффициент теплопроводности, ρ — плотность и c — удельная теплоемкость. Тогда, как и в § 2 предыдущей главы, дифференциальное уравнение температурного поля в пластине имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\rho c}{K} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{2H}{KD} (v - v_0) = 0, \tag{4.1}$$

где v_0 — температура окружающей среды.

В случае установившегося состояния это уравнение для пластины прямоугольного сечения можно решить методами, изложенными в двух предыдущих параграфах. Например *), рассмотрим *установившуюся температуру в пластине с сечением $0 < x < a$, $0 < y < b$ при теплообмене на поверхности со средой нулевой температуры в случае, когда кромка $y = 0$ поддерживается при температуре $f(x)$, а другие кромки — при нулевой температуре.*

Пусть

$$k^2 = \frac{2H}{KD}. \tag{4.2}$$

Тогда уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k^2 v = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{4.3}$$

при условиях

$$v = f(x), \quad y = 0, \quad 0 < x < a, \tag{4.4}$$
$$v = 0, \quad y = b, \quad 0 < x < a, \tag{4.5}$$
$$v = 0, \quad x = 0, \quad 0 < y < b, \tag{4.6}$$
$$v = 0, \quad x = a, \quad 0 < y < b. \tag{4.7}$$

*) Другие задачи и методы рассмотрены в статье Малкина [7].

Выражение

$$\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\operatorname{sh}(b-y)\left[k^2+\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right]^{1/2},\qquad n=1,2,\ldots \tag{4.8}$$

удовлетворяет (4.3), (4.5), (4.6) и (4.7). Если предположить, как и в предыдущем параграфе, что $f(x)$ можно разложить в ряд

$$f(x)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx, \tag{4.9}$$

то решение примет вид

$$v=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x/a)\operatorname{sh}(b-y)(k^2+n^2\pi^2/a^2)^{1/2}}{\operatorname{sh}b\,(k^2+n^2\pi^2/a^2)^{1/2}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx. \tag{4.10}$$

§ 5. Установившаяся температура в теле прямоугольного сечения $-a<x<a$, $-b<y<b$ при наличии источника тепла

Задачи данного типа имеют важное практическое значение *), так как многие виды электрических обмоток можно приближенно рассматривать как цилиндры с прямоугольным сечением [8]. Здесь мы проиллюстрируем применение методов, изложенных в § 3 настоящей главы. Можно также использовать функцию Грина, как и в § 2 гл. XVI. Во многих задачах подобного вида коэффициенты теплопроводности в направлениях x и y различны и в данном случае мы будем считать их равными K и (K/k^2), где k — постоянная.

I. *Мощность источников тепла в теле прямоугольного сечения равна постоянной величине A_0; теплоотдача в среду нулевой температуры через граничные поверхности $x=\pm a$ с поверхностным сопротивлением R на единицу площади и через поверхности $y=\pm b$ с поверхностным сопротивлением R' на единицу площади.*

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{A_0}{K}. \tag{5.1}$$

Выражение

$$aRA_0+\frac{A_0(a^2-x^2)}{2K}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\alpha_n x\operatorname{ch}ky\alpha_n \tag{5.2}$$

удовлетворяет (5.1) и граничным условиям при $x=\pm a$, если α_n $(n=1,2,\ldots)$ являются положительными корнями уравнения

$$\alpha\operatorname{tg}a\alpha=\frac{1}{RK}. \tag{5.3}$$

Граничные условия при $y=\pm b$ требуют, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\alpha_n x\,[k^{-1}KR'\alpha_n\operatorname{sh}kb\alpha_n+\operatorname{ch}kb\alpha_n]=-aRA_0-\frac{A_0(a^2-x^2)}{2K}. \tag{5.4}$$

---

*) В работе [9] рассматривается более общая задача о теплопередаче в случае различных поверхностных сопротивлений всех четырех поверхностей и различных температур сред, в которые происходит теплообмен. На практике рост температуры достаточно велик, чтобы изменения теплопроводности и мощности источников с температурой оказались значительными. Данный метод применим в случае линейной зависимости мощности от температуры типа $A_0(1+\alpha v)$. Изменение теплопроводности с температурой можно учесть, вводя вместо v переменную Θ из уравнения (6.10), приведенного в гл. I (см. также [10]). В работе [11] рассматривается более сложное граничное условие. Вопрос о тороидальных катушках с прямоугольным сечением разобран в [12].

Тогда a_n находят из соотношения (10.9) гл. III, и мы получим окончательно

$$v = aRA_0 + \frac{A_0(a^2 - x^2)}{2K} - \\ - \frac{4A_0}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a\alpha_n \cos x\alpha_n \operatorname{ch} ky\alpha_n}{\alpha_n^2 [2a\alpha_n + \sin 2a\alpha_n] \left[k^{-1} KR'\alpha_n \operatorname{sh} kb\alpha_n + \operatorname{ch} kb\alpha_n\right]}. \quad (5.5)$$

II. *Мощность источников тепла в теле прямоугольного сечения равна постоянной величине A_0. На граничных поверхностях $x = \pm a$, $y = \pm b$ поддерживается нулевая температура*

$$v = \frac{A_0(a^2 - x^2)}{2K} - \frac{16\,A_0 a^2}{K\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos[(2n+1)\pi x/2a] \operatorname{ch}[(2n+1)\pi ky/2a]}{(2n+1)^3 \operatorname{ch}[(2n+1)\pi kb/2a]}. \quad (5.6)$$

§ 6. Неустановившееся состояние. Решение в виде произведения решений

В § 15 гл. I отмечалось, что для начальных и граничных условий определенного типа решение задач с несколькими переменными можно записать в виде произведения решений одномерных задач. В двумерном случае начальная температура должна выражаться как произведение $f(x)f(y)$, а граничными условиями должны служить условия нулевой температуры, нулевого потока или теплообмена со средой нулевой температуры.

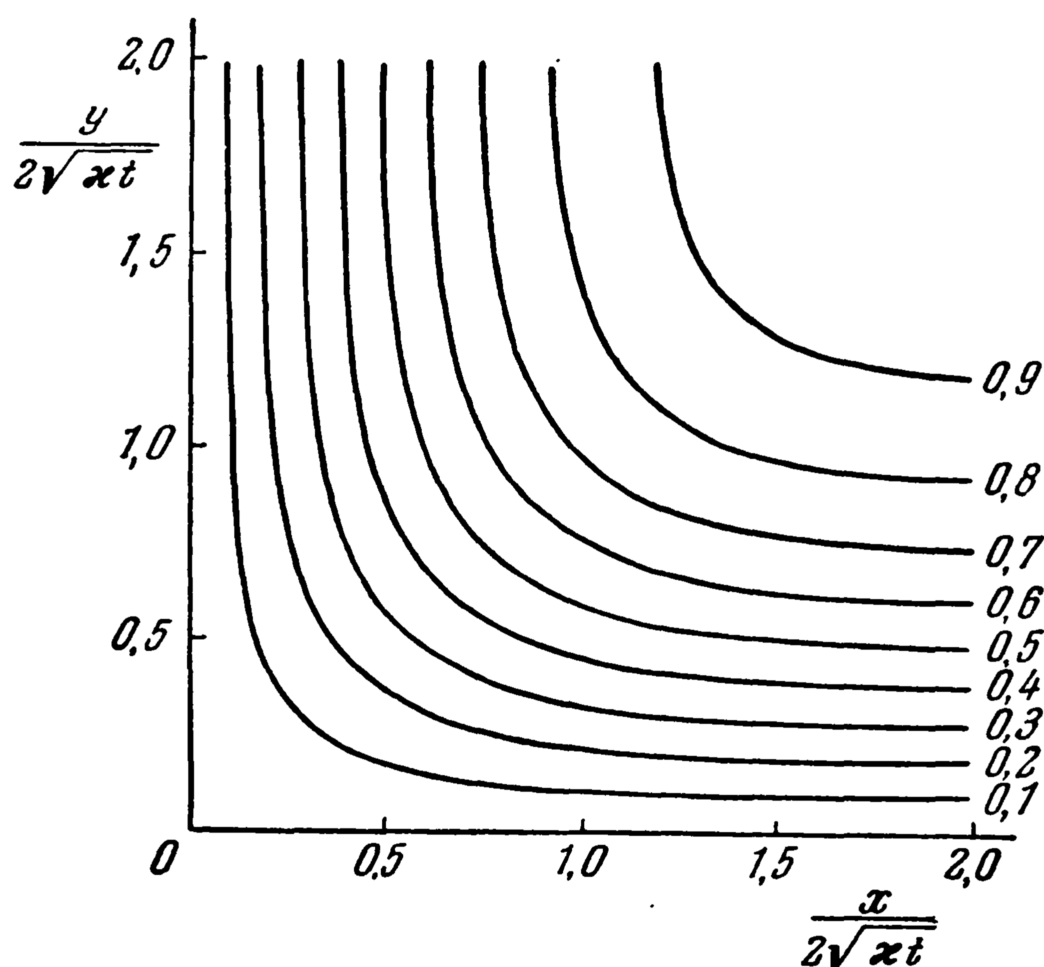


Рис. 21. Изотермы $v = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots, 0{,}9$ для тела с сечением в виде квадранта, с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности.

Здесь мы рассмотрим только случай постоянной начальной температуры, являющийся практически наиболее важным. Решения для случаев нулевой начальной температуры и температуры, равной единице на граничных поверхностях тела (или теплообмена со средой, имеющей на этих поверхностях температуру, равную единице), всегда можно получить путем вычитания решений, приводимых ниже, из единицы.

I. *Прямой угол с сечением в виде квадранта $x > 0$, $y > 0$ и с начальной температурой, равной единице.*

Решение для полуограниченного тела $x > 0$ с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности $x = 0$ (см. (4.3) гл. II) имеет вид

$$\varphi(x) = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \quad (6.1)$$

Следовательно, решение для тела с сечением в виде квадранта $x > 0$, $y > 0$, с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой граничной поверхности записывается следующим образом:

$$v = \varphi(x)\varphi(y) = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \quad (6.2)$$

На рис. 21 показаны изотермы, соответствующие значениям v, равным 0, 0,1, 0,2, ..., 0,9.

Для тела, ограниченного плоскостями, пересекающимися под прямыми углами, решение (6.2) приближенно справедливо вблизи любого внешнего угла.

Тепловой поток в точке $(0, y)$ граничной поверхности равен

$$-\frac{K}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\Phi^*\left(\frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}}\right);$$

он меньше теплового потока для полуограниченного твердого тела $x > 0$ на величину

$$\frac{K}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\Phi^*\left(\frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}}\right).$$

Таким образом, величина потери тепла телом в единицу времени на единицу длины перпендикуляра к ограничивающим плоскостям меньше количества тепла, теряемого полуограниченным твердым телом, на величину

$$\frac{2K}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_0^\infty \Phi^*\left(\frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)dy = \frac{4K}{\pi}; \tag{6.3}$$

при вычислении интеграла использовалась формула (15) приложения 2.

Если тело с сечением $x > 0$, $y > 0$ имеет начальную температуру, равную единице, и на его граничных поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то температура будет равна

$$v = \varphi(h, x)\varphi(h, y), \tag{6.4}$$

где $\varphi(h, x)$ — величина, определяемая (7.1) гл. II, а именно

$$\varphi(h, x) = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + \exp(hx + h^2\varkappa t)\,\Phi^*\left\{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + h\sqrt{\varkappa t}\right\}. \tag{6.5}$$

II. *Полуограниченное тело прямоугольного сечения $-l < x < l$, $y > 0$ с начальной температурой, равной единице.*

Если граничные поверхности $x = \pm l$ поддерживаются при нулевой температуре, то соответствующее одномерное решение имеет такой же вид, как и (3.8) гл. III, т. е.

$$\psi(x, l) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \tag{6.6}$$

Если же на этих поверхностях происходит теплообмен, то соответствующее решение имеет такой же вид, как и (11.12) гл. III, т. е.

$$\psi(x, l, h) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2h\cos\alpha_n x}{\left[\left(h^2+\alpha_n^2\right)l + h\right]\cos\alpha_n l}\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{6.7}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha l = h.$$

Если на всех граничных поверхностях поддерживается нулевая температура, то решение имеет вид

$$v = \varphi(y)\psi(x, l). \tag{6.8}$$

Если на всех поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то

$$v = \varphi(h, y)\psi(x, l, h). \tag{6.9}$$

Если на поверхности $y=0$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры, а поверхности $x = \pm l$ поддерживаются при нулевой температуре, то

$$v = \varphi(h, y)\psi(x, l) \tag{6.10}$$

и т. д.

III. *Неограниченное тело прямоугольного сечения* $-l < x < l$, $-b < y < b$ *с начальной температурой, равной единице.*

В этом случае решения соответствующих одномерных задач определяются из (6.6) и (6.7).

Если все граничные поверхности тела поддерживаются при нулевой температуре, то решение имеет вид

$$v = \psi(x, l)\psi(y, b). \tag{6.11}$$

Значения функций $\psi(x, l)$ можно найти из рис. 11; тогда легко построить изотермы для любого момента времени. На рис. 22 и 23 изображены изотермы

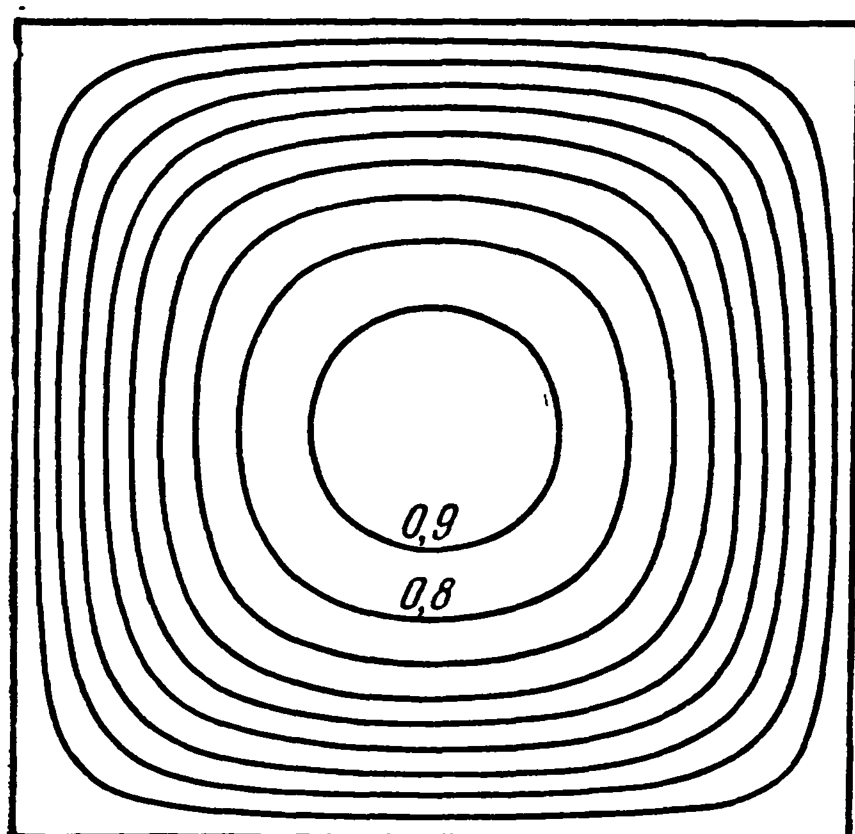


Рис. 22. Изотермы $v = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 0{,}9$ для тела с сечением в виде квадрата со стороной $2l$, с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности: $\varkappa t/l^2 = 0{,}08$.

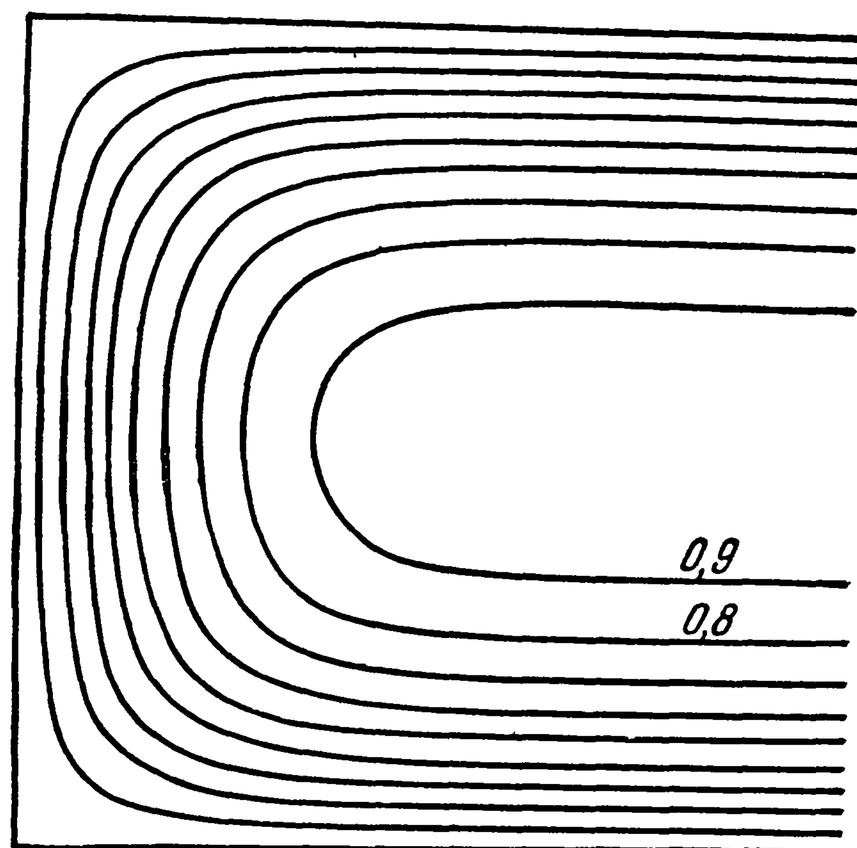


Рис. 23. Изотермы $v = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 0{,}9$ для тела с сечением в виде прямоугольника со сторонами $2l$, $4l$, начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности: $\varkappa t/l^2 = 0{,}08$.

$v = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots,\ 0{,}9$ при $\varkappa t/l^2 = 0{,}08$ для тел с квадратным и прямоугольным сечением, у которых $b = 2l$.

Аналогичным образом, если на граничных поверхностях тела происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то решение имеет вид

$$v = \psi(x, l, h)\psi(y, b, h). \tag{6.12}$$

Как отмечалось в § 15 гл. I, для твердого тела с различными коэффициентами температуропроводности в направлениях x и y и различными коэффициентами теплообмена на различных граничных поверхностях, решения по-прежнему можно записать таким же образом.

§ 7. Неустановившееся состояние. Произвольные начальные и граничные условия

Как и в § 14 гл. I, общую задачу можно свести к задаче установившейся температуры, какой-то заданной начальной температуры и нулевой температуры граничной поверхности (или теплообмена со средой нулевой температуры). Если начальная температура представляет собой произведение функций x и y, то, как и выше, решение можно записать в виде произведения; в противном случае следует использовать теорию двойных рядов Фурье и решение примет вид двойного ряда. Этот метод будет детально рассмотрен для прямоугольного параллелепипеда в §§ 3 и 6 следующей главы. Кроме того, в §§ 4 и 5 гл. XIV мы покажем, что для той же цели можно применить функцию Грина *). Общий обзор применяемых методов приведен в § 1 следующей главы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carslaw, Fourier's Series and Integrals Macmillan, ed. 3, 1930.
2. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, § 205.
3. Titchmarsh, Fourier Integrals, Oxford, 1937, § 10.11. (Э. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, перев. с 1-го изд.)
4. Karush, J. Appl. Phys. **23**, 492—494 (1952).
5. Harper, Brown, NACA Rep. No. 158 (1923).
6. Avrami, Little, J. Appl. Phys. **13**, 255 (1942).
7. Malkin, J. Franklin Inst. **232**, 129 (1941).
8. Cockroft, Proc. Camb. Phil. Soc. 22, 759—772 (1925).
9. Higgins, Elect. Engng **64**, 190—194 (1945).
10. Jakob, Trans. ASME **65**, 593—602 (1943).
11. Buchholz, Z. angew. Math. Mech. **14**, 285—294 (1934).
12. Higgins, J. Franklin Inst. **240**, 97—112 (1945).
13. Lowan, Phil. Mag. **24**, 410 (1937).

---

*) В работе [13] приводится ряд решений, полученных при помощи преобразования Лапласа.

ГЛАВА VI

ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

§ 1. Введение

Лучше всего исследованы трехмерные задачи теплопроводности для областей, ограниченных координатными поверхностями прямоугольной, цилиндрической и сферической систем. В случае радиального потока тепла в цилиндрах и сферах решение содержит лишь одну пространственную переменную и время; такие задачи рассматриваются в гл. VII и IX. В настоящей главе и в гл. VIII мы обсудим задачи для прямоугольного параллелепипеда и ограниченного цилиндра, т. е. задачи, в которых приходится рассматривать две или большее число пространственных переменных. Поскольку решения можно найти несколькими различными путями, на данном этапе желательно рассмотреть различные методы и соотношение между ними.

1. Наиболее просты и в то же время наиболее важны для нас задачи, решения которых можно выразить, как и в § 15 гл. I, в виде произведения решений одномерных задач.

Основным является случай, когда начальная температура равна единице и температура поверхности равна нулю (или происходит теплообмен со средой нулевой температуры); решив эту задачу, легко найти решение для случая нулевой начальной температуры и температуры поверхности, равной единице, а использовав теорему Дюамеля, — решение для температуры поверхности, равной $\varphi(t)$.

2. Используя кратные ряды Фурье или их обобщения, можно исследовать случай произвольных начальных и поверхностных температур.

3. Использование функции Грина (см. гл. XIV) также позволяет найти полное решение общей задачи для произвольной начальной и поверхностной температур. Для простых случаев, указанных в пункте 1, после некоторого упрощения получается такое же решение. Кроме того, применяя функцию Грина, легко найти решения для случая, когда количество тепла, выделяющееся в твердом теле в единицу времени, является заданной функцией положения и времени.

4. Непосредственное применение метода преобразования Лапласа (см. § 11 гл. XV) особенно полезно тогда, когда некоторые из граничных поверхностей поддерживаются при температурах, являющихся простыми функциями времени, const, kt, $\sin \omega t$ и т. д. В таких случаях результаты, найденные методами 2 и 3 (и методом 1, если температура поверхности непостоянна) в виде интегралов, можно получить суммированием частных решений.

В настоящей главе мы применим первые два из приведенных выше методов к задачам для прямоугольного параллелепипеда. Кроме того, в § 5 гл. XIV и § 11 гл. XV мы рассмотрим аналогичные задачи другими методами.

Теплопроводность в твердых телах простой геометрической формы, например тел в виде прямоугольного параллелепипеда и ограниченного цилиндра, представляет большой интерес, поскольку такие твердые тела часто встречаются на практике (мясные консервы, ящики с фруктами). В более старых методах определения теплопроводности плохих проводников также использовались образцы в виде куба, сферы и ограниченных цилиндров; описанный выше метод для стержня непригоден, поскольку количество тепла, теряемое в результате теплообмена с поверхности плохо проводящего стержня, может оказаться больше потери тепла вдоль стержня.

§ 2. Установившаяся температура

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи, в которых одни граничные плоскости твердого тела поддерживаются при постоянной температуре, тогда как на других плоскостях температура равна нулю или же происходит теплообмен со средой нулевой температуры. В более сложных случаях, в которых температуры граничных поверхностей являются заданными функциями положения, можно воспользоваться, как и в § 4 данной главы, теорией двойных рядов Фурье.

I. *Твердое тело* $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$. *Температуры плоскостей* $x = 0$ *и* $x = a$ *постоянны и равны соответственно* v_1 *и* v_2; *другие плоскости поддерживаются при нулевой температуре.*

В этом случае дифференциальное уравнение для температуры тела имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \tag{2.1}$$

Ясно, что выражение

$$\frac{v_1 \operatorname{sh} l(a-x) + v_2 \operatorname{sh} lx}{\operatorname{sh} la} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c} \tag{2.2}$$

удовлетворяет (2.1) при условии, что

$$l^2 = \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\pi^2. \tag{2.3}$$

Кроме того, если m и n — целые числа, то (2.2) обращается в нуль при $y = 0$ и $y = b$ и при $z = 0$ и $z = c$. Выражение

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \frac{v_1 \operatorname{sh} l(a-x) + v_2 \operatorname{sh} lx}{\operatorname{sh} la} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c} \tag{2.4}$$

имеет те же свойства; кроме того, оно равно v_1 при $x = 0$ и v_2 при $x = a$, если *)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c} = 1. \tag{2.5}$$

---

*) Для строгости рассуждений необходимо доказать возможность почленного дифференцирования двойного ряда для v. Это же замечание относится и к другим задачам, разбираемым в данной главе. См. выше, § 3 гл. III и работы [1, 2].

Далее, разлагая единицу в ряд по синусам в интервале $(0, b)$, получим *)

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin[(2p+1)\pi y/b]}{2p+1}. \tag{2.6}$$

Аналогично

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\sin[(2q+1)\pi z/c]}{2q+1}. \tag{2.7}$$

Перемножая (2.6) и (2.7), получим

$$1=\frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\sin[(2p+1)\pi y/b]\sin[(2q+1)\pi z/c]}{(2p+1)(2q+1)}. \tag{2.8}$$

Сравнивая (2.8) и (2.5), мы видим, что величина $A_{m,n}$ должна равняться нулю, если и m и n не являются оба нечетными; в этом случае величина A должна равняться $16/\pi^2 mn$. Таким образом, мы можем окончательно записать (2.4) в виде

$$v=\frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{[v_1\operatorname{sh} l(a-x)+v_2\operatorname{sh} lx]\sin[(2p+1)\pi y/b]\sin[(2q+1)\pi z/c]}{(2p+1)(2q+1)\operatorname{sh} la}, \tag{2.9}$$

где

$$l^2=\frac{(2p+1)^2\pi^2}{b^2}+\frac{(2q+1)^2\pi^2}{c^2}. \tag{2.10}$$

II. *Установившаяся температура в твердом теле* $0<x<a$, $-b<y<b$, $-c<z<c$. *Температуры плоскостей* $x=0$ *и* $x=a$ *поддерживаются при* v_1 *и* v_2 *соответственно, а на других происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

В этом случае граничные условия имеют вид

$$v=v_1 \quad \text{при} \quad x=0; \qquad v=v_2 \quad \text{при} \quad x=a; \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}-hv=0 \quad \text{при} \quad y=-b; \qquad \frac{\partial v}{\partial y}+hv=0 \quad \text{при} \quad y=b; \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}-hv=0 \quad \text{при} \quad z=-c; \qquad \frac{\partial v}{\partial z}+hv=0 \quad \text{при} \quad z=c. \tag{2.13}$$

Выражение

$$\frac{v_1\operatorname{sh} l(a-x)+v_2\operatorname{sh} lx}{\operatorname{sh} la}\cos\alpha_r y\cos\beta_s z \tag{2.14}$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности при условии, что

$$l^2=\alpha_r^2+\beta_s^2. \tag{2.15}$$

Оно удовлетворяет также граничным условиям (2.12) и (2.13), если α_r является корнем уравнения

$$\alpha\operatorname{tg}\alpha b=h, \tag{2.16}$$

а β_s — корнем уравнения

$$\beta\operatorname{tg}\beta c=h. \tag{2.17}$$

Таким образом, решение нашей задачи записывается в виде

$$v=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}A_{rs}\frac{v_1\operatorname{sh} l(a-x)+v_2\operatorname{sh} lx}{\operatorname{sh} la}\cos\alpha_r y\cos\beta_s z; \tag{2.18}$$

---

*) Этот прием в данном случае позволяет избежать использования двойных рядов Фурье. Последние следует применять в тех случаях, когда температуры поверхности являются произвольными функциями y и z (см. § 3 данной главы). Известно, что ряд (2.8) сходится [3].

при этом постоянные A_{rs} должны быть выбраны так, чтобы

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} A_{rs}\cos\alpha_r y\cos\beta_s z = 1. \tag{2.19}$$

Далее, если α_r и β_s — положительные корни соответственно (2.16) и (2.17), то, используя соотношение (10.10) гл. III, получим

$$2h\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_r y}{\left[\left(\alpha_r^2+h^2\right)b+h\right]\cos\alpha_r b} = 1 \tag{2.20}$$

и

$$2h\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_s z}{\left[\left(\beta_s^2+h^2\right)c+h\right]\cos\beta_s c} = 1. \tag{2.21}$$

Перемножая эти выражения, получим

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{4h^2\cos\alpha_r y\cos\beta_s z}{\cos\alpha_r b\cos\beta_s c\left[\left(\alpha_r^2+h^2\right)b+h\right]\left[\left(\beta_s^2+h^2\right)c+h\right]} = 1. \tag{2.22}$$

Как и прежде, A_{rs} в (2.18) находят путем сравнения (2.19) и (2.22). Тогда (2.18) окончательно записывается в виде

$$v=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{4h^2\left[v_1\operatorname{sh} l(a-x)+v_2\operatorname{sh} lx\right]\cos\alpha_r y\cos\beta_s z}{\cos\alpha_r b\cos\beta_s c\left[\left(\alpha_r^2+h^2\right)b+h\right]\left[\left(\beta_s^2+h^2\right)c+h^2\right]\operatorname{sh} la}, \tag{2.23}$$

где l определяется из (2.15).

Это решение не очень удобно для численного расчета или для определения теплопроводности [4].

III. *Установившаяся температура в твердом теле* $0 < x < a$, $-b < y < b$, $-c < z < c$; *плоскость* $x = 0$ *поддерживается при постоянной температуре* V, *а на других плоскостях происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

В данном случае граничные условия имеют вид (2.12) и (2.13) и

$$v = V, \qquad x = 0; \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0, \qquad x = a. \tag{2.25}$$

Выражение, соответствующее (2.14), имеет вид

$$V\frac{h\operatorname{sh} l(a-x)+l\operatorname{ch} l(a-x)}{h\operatorname{sh} al+l\operatorname{ch} al}\cos\alpha_r y\cos\beta_s z, \tag{2.26}$$

где l определяется из (2.15), а α_r и β_s — положительные корни (2.16) и (2.17). Поступая так же, как и в пункте II, мы получим окончательно

$$v=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{4h^2V\left[h\operatorname{sh} l(a-x)+l\operatorname{ch} l(a-x)\right]\cos\alpha_r y\cos\beta_s z}{\left[h\operatorname{sh} al+l\operatorname{ch} al\right]\left[\left(\alpha_r^2+h^2\right)b+h\right]\left[\left(\beta_s^2+h^2\right)c+h\right]\cos\alpha_r b\cos\beta_s c}. \tag{2.27}$$

Это выражение является обобщением решения двумерной задачи о коротком охлаждающем ребре (см. (3.20) гл. V).

IV. Задачи для неограниченного твердого тела прямоугольного сечения рассматриваются тем же способом (ср. также § 2 гл. V). Например, рассмотрим *твердое тело* $x > 0$, $-b < y < b$, $-c < z < c$, *причем его плоскость* $x = 0$ *поддерживается при температуре* V, *а на других плоскостях происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

В данном случае выражение, соответствующее (2.14), имеет вид

$$Ve^{-lx}\cos\alpha_r y\cos\beta_s z, \tag{2.28}$$

и окончательно получим

$$v = 4h^2V\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{-lx}\cos\alpha_r y\cos\beta_s z}{\left[\left(\alpha_r^2+h^2\right)b+h\right]\left[\left(\beta_s^2+h^2\right)c+h\right]\cos\alpha_r b\cos\beta_s c}, \tag{2.29}$$

где α_r, β_s и l определяются соответственно из (2.16), (2.17) и (2.15).

§ 3. Двойные и кратные ряды Фурье

При обычном формальном рассмотрении (см. [5], § 90) ряда Фурье функции одной переменной $f(x)$, определенной в интервале $(-l, l)$, предполагается, что $f(x)$ можно разложить в ряд

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{3.1}$$

При этом коэффициенты a_0, a_n, b_n получаются в результате умножения (3.1), соответственно, на единицу, $\cos(n\pi x/l)$ и $\sin(n\pi x/l)$ и почленного интегрирования полученных рядов *).

Таким образом, используя выражения

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0, \qquad \int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0, \qquad m \neq n, \tag{3.2}$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0, \tag{3.3}$$

$$\int_{-l}^{l}\left[\sin\frac{m\pi x}{l}\right]^2 dx = \int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{m\pi x}{l}\right]^2 dx = l, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

находим, что

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x')\cos\frac{n\pi x'}{l}\,dx';$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x')\sin\frac{n\pi x'}{l}\,dx'. \tag{3.5}$$

Эту формальную теорию нетрудно превратить в строгую путем тщательного исследования ряда в правой части уравнения (3.1) с коэффициентами, определяемыми (3.5). При этом оказывается, что если $f(x)$ удовлетворяет определенным условиям, например условиям Дирихле (см. [5], § 93), то этот ряд сходится и его сумма равна $f(x)$ в каждой точке интервала, в котором функция $f(x)$ непрерывна, и $\frac{1}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\}$ во всех других точках.

Формальную теорию двойных и кратных рядов Фурье развивают точно таким же образом. Предположим, что мы имеем функцию $f(x, y)$, определенную в прямоуголь-

*) Здесь следует допустить, что ряд (3.1) сходится равномерно. (*Прим. ред.*)

нике $-a < x < a$, $-b < y < b$. В этом двумерном случае функции

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}; \quad && m=1,\,2,\,\ldots; \quad && n=1,\,2,\,\ldots\\
&\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}; && m=1,\,2,\,\ldots; && n=0,\,1,\,\ldots\\
&\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}; && m=0,\,1,\,\ldots; && n=1,\,2,\,\ldots\\
&\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}; && m=0,\,1,\,\ldots; && n=0,\,1,\,\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

составляют ортогональную систему; они обладают свойствами, аналогичными (3.2), (3.3) и (3.4), т. е. интеграл по прямоугольнику от произведения любых двух различных функций равен нулю, а интегралы от их квадратов равны

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right]^2 dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right]^2 dx\,dy = ab,\\
&\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right]^2 dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right]^2 dx\,dy = ab
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

для $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$. Если $n = 0$ во втором, $m = 0$ в третьем или либо $m = 0$, либо $n = 0$ в последнем из этих интегралов, то искомый результат оказывается вдвое больше; если $m = n = 0$ в последнем интеграле, то его величина равна $4ab$.

Разложение функции $f(x,\ y)$, аналогичное (3.1), имеет вид

$$f(x,\ y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A'_{m,n}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} + \\ + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B'_{m,n}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{m,n}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}. \tag{3.8}$$

Чтобы найти коэффициенты ряда, умножим обе части (3.8) на одну из функций (3.6) и проинтегрируем в пределах от $-a$ до a по x и от $-b$ до b по y. В этом случае, используя (3.7) и учитывая, что все другие двойные интегралы от произведений функций (3.6) обращаются в нуль, находим

$$\begin{aligned}
A_{m,n} &= \frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,\ y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy;\\
A'_{m,n} &= \frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,\ y)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy;\\
B'_{m,n} &= \frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,\ y)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy;\\
B_{m,n} &= \frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,\ y)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Коэффициенты $A'_{m,0}$, $B'_{0,n}$, $B_{0,n}$, $B_{m,0}$ равны половине, а $B_{0,0}$ — одной четвертой от приведенных выше величин.

В основном мы будем рассматривать случай, в котором $f(x,\ y)$ является нечетной функцией как x, так и y; тогда все коэффициенты $A'_{m,n}$, $B'_{m,n}$ и $B_{m,n}$

обращаются в нуль. Отсюда следует, что

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m, n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{3.10}$$

где

$$A_{m, n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x', y') \sin \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi y'}{b} dx' dy', \tag{3.11}$$

что аналогично ряду Фурье по синусам.

Точно так же, если $f(x, y, z)$ определена в интервалах $-a < x < a, -b < y < b, -c < z < c$ и является нечетной функцией x, y и z, то мы получим тройной ряд по синусам

$$f(x, y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{l, m, n} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c}, \tag{3.12}$$

где

$$A_{l, m, n} = \frac{8}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x', y', z') \sin \frac{l\pi x'}{a} \sin \frac{m\pi y'}{b} \sin \frac{n\pi z'}{c} dx' dy' dz'. \tag{3.13}$$

Если $f(x, y, z)$ — четная функция x, y и z, то тем же способом мы получим ряд по косинусам.

Задачи, в которых встречаются кратные ряды Фурье, можно рассматривать и другим способом; мы воспользуемся им в гл. VIII, где нам придется иметь дело с комбинацией рядов Фурье и рядов Фурье — Бесселя. Рассмотрим, например, случай, в котором $f(x, y)$ является нечетной функцией x и y в интервалах $-a < x < a$, $-b < y < b$. Для любого фиксированного y в интервале $-b < y < b$, $f(x, y)$ является нечетной функцией x и, следовательно, ее можно разложить в ряд по синусам

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \tag{3.14}$$

где коэффициенты

$$a_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x', y) \sin \frac{m\pi x'}{a} dx' \tag{3.15}$$

зависят теперь от y. Они являются нечетными функциями y в интервале $-b < y < b$, и следовательно, их можно разложить в ряд

$$a_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m, n} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{3.16}$$

где

$$A_{m, n} = \frac{2}{b} \int_0^b a_m(y') \sin \frac{n\pi y'}{b} dy' = \frac{4}{ab} \int_0^b \sin \frac{n\pi y'}{b} dy' \int_0^a f(x', y') \sin \frac{m\pi x'}{a} dx'. \tag{3.17}$$

Таким образом, окончательно находим

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m, n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

где $A_{m, n}$ — коэффициент, определяемый (3.17), что находится в соответствии с (3.10) и (3.11). Все другие случаи можно рассматривать аналогичным образом. Так же можно поступать и при разложении функции нескольких переменных в ряд по функциям, приведенным в §§ 9, 10 гл. III.

Теперь мы можем записать решения задач, приведенных в § 2 данной главы, в которых температуры поверхности являются функциями положения на поверхности.

Возьмем задачу I предыдущего параграфа. Рассмотрим *установившуюся температуру в твердом теле* $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$, *граничная поверхность которого* $x = 0$ *поддерживается при температуре* $f(y, z)$, а другие поверхности — при нулевой температуре.

В этом случае выражение

$$\frac{\operatorname{sh} l(a-x)}{\operatorname{sh} al} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c} \tag{3.18}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению нашей задачи, если

$$l^2 = \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\pi^2; \tag{3.19}$$

кроме того, (3.18) должно обращаться в нуль на всех поверхностях твердого тела, за исключением $x = 0$.

Далее, если $f(y, z)$ можно представить в виде ряда по синусам (3.10), то решение задачи будет иметь вид

$$v = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \frac{\operatorname{sh} l(a-x)}{\operatorname{sh} al} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c}. \tag{3.20}$$

где

$$A_{m,n} = \frac{4}{bc}\int_0^b\int_0^c f(y', z') \sin\frac{m\pi y'}{b} \sin\frac{n\pi z'}{c}\, dy'\, dz'. \tag{3.21}$$

§ 4. Неустановившаяся температура. Решение в виде произведения решений

Решения ряда важных задач можно записать, как и в § 6 предыдущей главы, используя метод, изложенный в § 15 гл. I, и известные решения одномерных задач. Здесь мы приведем решения для случая начальной температуры, равной единице, и нулевой температуры поверхности (или теплообмена со средой нулевой температуры). Решения для случая нулевой начальной температуры и температуры поверхности, равной единице (или теплообмена со средой, имеющей температуру, равную единице), получаются путем вычитания приводимых ниже результатов из единицы. Тогда решения для произвольных температур поверхности следуют из теорем Дюамеля (см. § 14 гл. I). Для анизотропного твердого тела с главными осями теплопроводности, параллельными координатным плоскостям, и различными коэффициентами теплообмена на поверхностях, данный метод по-прежнему остается справедливым.

I. *Область* $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ *с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности.*

$$v = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \tag{4.1}$$

II. *Та же область с начальной температурой, равной единице, и теплообменом на поверхности со средой нулевой температуры.*

$$v = \varphi(h, x)\varphi(h, y)\varphi(h, z), \tag{4.2}$$

где $\varphi(h, x)$ определяется соотношением (6.5) гл. V.

III. *Область* $-a < x < a$, $-b < y < b$, $z > 0$ *с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности.*

$$v = \psi(x, a)\psi(y, b)\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right), \tag{4.3}$$

где

$$\psi(x,\ a)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{4a^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}. \qquad (4.4)$$

IV. *Область* $-a<x<a,\ -b<y<b,\ -c<z<c$ *с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности.*

$$v=\psi(x,\ a)\psi(y,\ b)\psi(z,\ c), \qquad (4.5)$$

или

$$v=\frac{64}{\pi^3}\sum\sum\sum\frac{(-1)^{l+m+n}}{(2l+1)(2m+1)(2n+1)}\cos\frac{(2l+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2b}\times$$
$$\times\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2c}\exp(-\alpha_{l,m,n}t), \qquad (4.6)$$

где

$$\alpha_{l,m,n}=\frac{\varkappa\pi^2}{4}\left[\frac{(2l+1)^2}{a^2}+\frac{(2m+1)^2}{b^2}+\frac{(2n+1)^2}{c}\right]. \qquad (4.7)$$

V. *Область* $-a<x<a,\ -b<y<b,\ -c<z<c$ *с начальной температурой, равной единице, и теплообменом на поверхности со средой нулевой температуры* [6].

$$v=\psi(x,\ a,\ h)\psi(y,\ b,\ h)\psi(z,\ c,\ h), \qquad (4.8)$$

где

$$\psi(x,\ a,\ h)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2h\cos\alpha_n x}{\left[(h^2+\alpha_n^2)a+h\right]\cos\alpha_n a}e^{-\varkappa\alpha_n^2t} \qquad (4.9)$$

и α_n — положительные корни уравнения

$$\alpha\operatorname{tg}\alpha a=h. \qquad (4.10)$$

VI. *Область* $-a<x<a,\ -b<y<b,\ -c<z<c$ *с начальной температурой, равной нулю, и температурой поверхности* $\varphi(t)$.

Если $\varphi(t)=V=\mathrm{const}$, то решение, которое следует из (4.6) и (4.7), имеет вид

$$v=V-\frac{64}{\pi^3}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+m+n}}{(2l+1)(2m+1)(2n+1)}\cos\frac{(2l+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2b}\times$$
$$\times\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2c}\exp(-\alpha_{l,m,n}t). \qquad (4.11)$$

В случае температуры поверхности, равной $\varphi(t)$, мы получим, используя теорему Дюамеля

$$v=\frac{64}{\pi^3}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_{l,m,n}(-1)^{l+m+n}}{(2l+1)(2m+1)(2n+1)}\cos\frac{(2l+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2b}\times$$
$$\times\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2c}\exp[-\alpha_{l,m,n}t]\int_0^t\exp[\alpha_{l,m,n}\lambda]\varphi(\lambda)\,d\lambda. \qquad (4.12)$$

Если $\varphi(t) = kt$, мы получим *)

$$v = kt - \frac{64k}{\pi^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+m+n}}{(2l+1)(2m+1)(2n+1)\,\alpha_{l,m,n}} [1 - \exp(-\alpha_{l,m,n} t)] \times$$
$$\times \cos \frac{(2l+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2c}. \qquad (4.13)$$

При выводе (4.12) и (4.13) из (4.11) мы получаем один ряд, так как начальная температура равна нулю. Выражение для случая периодического изменения температуры поверхности можно найти из (4.12), но конечный его вид не очень удобен для использования. Эти задачи будут еще раз рассмотрены в § 11 гл. XV.

§ 5. Определение коэффициента теплопроводности и экстраполяция кривых охлаждения

Решения (4.6) и (4.8) предыдущего параграфа для прямоугольного параллелепипеда с начальной температурой, равной единице, и температурой поверхности, равной нулю (или теплообменом со средой нулевой температуры) позволяют получить исключительно простой метод определения коэффициента температуропроводности плохих проводников.

При больших значениях времени ряд (4.6) очень быстро сходится и искомая температура с достаточно хорошим приближением определяется первым его членом. Таким образом, если построить график зависимости логарифма температуры в любой точке твердого тела от времени, то в конечном итоге кривая обратится в прямую с наклоном

$$-\frac{\varkappa\pi^2}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right). \qquad (5.1)$$

Если измеряется температура в точке $\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b, \frac{1}{3}c\right)$, то в соотношении (4.6) данной главы все члены с l, m и n обращаются в нуль, и в данном случае первый член этого соотношения будет служить достаточно хорошим приближением.

Если твердое тело теряет тепло в результате теплообмена со средой нулевой температуры, то следует определить величины $\varkappa$ и h. Рассмотрим для простоты куб $a = b = c$; температура в любой его точке при больших значениях времени, т. е. когда кривая $\ln v = f(t)$ превращается в прямую, определяется соотношением

$$v = \frac{8h^2 \cos \alpha_1 x \cos \alpha_1 y \cos \alpha_1 z}{\left[\left(h^2 + \alpha_1^2\right)a + h\right]^3 \cos^3 \alpha_1 a} e^{-3\varkappa\alpha_1^2 t}. \qquad (5.2)$$

Отношение температуры в центре к температуре в любой другой подходящей точке определяет α_1. Величину h находят из (4.10) данной главы, а $\varkappa\alpha_1^2$ — из угла наклона кривой $\ln v = f(t)$. Если начальная температура твердого тела постоянна, то знать ее не нужно: ее можно вычислить по значениям α_1, h, $\varkappa$ и данным измерения температуры (или путем нахождения точки пересечения оси t с асимптотой кривой $\ln v = f(t)$). Это является проверкой полученных результатов в тех случаях, когда известна начальная температура; кроме того, появляется возможность вычисления начальной температуры твердого тела, охлаждавшегося в течение некоторого времени в результате теплообмена.

*) В работе [7] приводится ряд решений этого вида.

Тот же метод можно использовать и для других тел простой геометрической формы, например для ограниченных цилиндров (см. § 5 гл. VIII) или сфер (см. § 5 гл. IX). Другой метод обработки наблюдений обсуждается при рассмотрении сферы.

§ 6. Неустановившаяся температура. Тройной ряд Фурье

Если начальную температуру в параллелепипеде нельзя представить в виде произведения функций x, y и z или если граничные условия отличны от условий, рассмотренных в § 15 гл. I, то метод, изложенный в § 4 данной главы, становится непригодным. Поскольку задачу о твердом теле с заданными начальной и поверхностной температурами можно свести (см. § 14 гл. I) к задаче об установившейся температуре, рассмотренной в § 2 данной главы, и к задаче с нулевой температурой поверхности, то в этом случае необходимо рассмотреть только *область* $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$ *с нулевой температурой поверхности и начальной температурой* $f(x, y, z)$.

Пусть $f(x, y, z)$ можно разложить в тройной ряд по синусам (см. (3.12) данной главы)

$$f(x, y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{l, m, n} \sin\frac{l\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c}, \tag{6.1}$$

где

$$A_{l, m, n} = \frac{8}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x', y', z') \sin\frac{l\pi x'}{a} \sin\frac{m\pi y'}{b} \sin\frac{n\pi z'}{c}\, dx'\, dy'\, dz'. \tag{6.2}$$

Тогда выражение

$$e^{-\varkappa t \alpha^2_{l, m, n}} \sin\frac{l\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c}, \tag{6.3}$$

где

$$\alpha^2_{l, m, n} = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right), \tag{6.4}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению и обращается в нуль на граничных поверхностях.

Таким образом, мы получили соотношение

$$v = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\varkappa \alpha^2_{l, m, n} t\right] A_{l, m, n} \sin\frac{l\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c}, \tag{6.5}$$

служащее решением нашей задачи.

Это решение и соответствующее решение в случае теплообмена на границе *) можно получить, используя функцию Грина (см. § 5 гл. XIV, где рассматривается также задача о прямоугольном параллелепипеде при наличии в нем источника тепла).

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore, On convergence factors in double series and the double Fourier's series, Trans. Am. Math. Soc. **14**, 73 (1913).
2. Moore, Bull. Am. Math. Soc. **25**, 274 (1919).
3. Hardy, Proc. Lond. Math. Soc. **6**, 410 (1908).
4. Chivers, Phil. Mag. **6**, 305 (1928).
5. Carslaw, Fourier's Series and Integrals, Macmillan, ed. 3, 1930.
6. Berger, Z. angew. Math. Mech. **8**, 479 (1928).
7. Williamson, Adams, Phys. Rev. **14**, 99 (1919).

*) Здесь можно пользоваться также конечным преобразованием Фурье (см. § 5 гл. XVII).

ГЛАВА VII

ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В НЕОГРАНИЧЕННОМ ЦИЛИНДРЕ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

§ 1. Введение

В § 8 гл. I мы видели, что в цилиндрических координатах уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{1.1}$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right). \tag{1.2}$$

Если ось нагреваемого кругового цилиндра совпадает с осью z, а начальные и граничные условия не зависят от координат θ и z, то температура цилиндра зависит только от r и t, и уравнение теплопроводности сводится к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right). \tag{1.3}$$

В этом случае тепловой поток перпендикулярен оси цилиндра, а линии тока радиальны.

Если начальные и граничные условия не зависят от координаты z, то тепло распространяется в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, и уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right). \tag{1.4}$$

Если начальные и граничные условия не зависят от угла θ, то тепло распространяется в плоскостях, проходящих через ось цилиндра, и уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right). \tag{1.5}$$

В данной главе приводятся решения задач для сплошного и полого цилиндров с различными граничными условиями. Эти решения всегда имеют вид рядов Фурье — Бесселя; решения, пригодные для малых значений $\varkappa t/a^2$, находить значительно труднее; мы их будем рассматривать в гл. XIII еще и потому, что эти решения нельзя представить в простой конечной форме. Задачи для составных цилиндрических областей и для областей, ограниченных изнутри круговым цилиндром, также рассматриваются в гл. XIII.

§ 2. Установившаяся температура. Радиальный поток

Если твердое тело представляет собой полый цилиндр, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно a и b, то уравнение (1.1) предыдущего параграфа для распределения температур в теле примет вид

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=0, \qquad a<r<b. \tag{2.1}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v=A+B\ln r, \tag{2.2}$$

где A и B — постоянные, определяемые из граничных условий при $r=a$ и $r=b$.

I. *Поверхность $r=a$ поддерживается при температуре v_1, поверхность $r=b$ — при температуре v_2.*

В этом случае

$$v=\frac{v_1\ln(b/r)+v_2\ln(r/a)}{\ln(b/a)}. \tag{2.3}$$

Величина теплового потока на единицу длины равна

$$-2\pi rK\frac{dv}{dr}=\frac{2\pi K(v_1-v_2)}{\ln(b/a)}. \tag{2.4}$$

II. *Поверхность $r=a$ поддерживается при температуре v_1. На поверхности $r=b$ происходит теплообмен со средой, имеющей температуру v_2, и поэтому граничное условие на ней имеет вид*

$$\frac{dv}{dr}+h(v-v_2)=0, \qquad r=b.$$

В данном случае

$$v=\frac{v_1[1+hb\ln(b/r)]+hbv_2\ln(r/a)}{1+hb\ln(b/a)}. \tag{2.5}$$

Величина теплового потока на внешней поверхности цилиндра на единицу его длины равна

$$2\pi K(v_1-v_2)\frac{hb}{1+hb\ln(b/a)}. \tag{2.6}$$

Если $ah>1$, то величина (2.6) непрерывно уменьшается с увеличением b. Если же $ah<1$, то (2.6) имеет максимум при $b=\frac{1}{h}$. Это означает, что при определенных условиях можно увеличить тепловые потери трубы, окружив ее изолирующим материалом [1].

III. *Количество тепла, подводимого в единицу времени внутрь цилиндра на единицу его длины, равно постоянной величине F_0.*

В данном случае тепловой поток через любой цилиндр не зависит от радиуса цилиндра, так как из (2.1) следует, что $r(dv/dr)$ постоянно, и мы можем написать

$$F_0=-2\pi rK\frac{dv}{dr}, \qquad a<r<b. \tag{2.7}$$

Если v_1 и v_2 — температуры при r, равном r_1 и r_2 соответственно, то, интегрируя (2.7), получим

$$2\pi K(v_1-v_2)=F_0\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \tag{2.8}$$

Справедливость этого соотношения не зависит от способа подвода тепла и от граничных условий на цилиндрических поверхностях *). Если тепло подводится с помощью проволоки, расположенной вдоль оси цилиндра, с сопротивлением R *ом* на единицу длины, а сила протекающего по ней тока равна Ia, то мы получим

$$F_0 = jI^2R,$$

где j — число калорий в джоуле.

Если коэффициент теплопроводности K зависит от температуры, то соотношение вида (2.8) по-прежнему остается справедливым. Соотношение (2.7) тоже оказывается справедливым; введем теперь

$$K_m = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} K\,dv, \tag{2.9}$$

т. е. средний коэффициент теплопроводности для всей области температур от v_1 до v_2; тогда, интегрируя (2.7), получим

$$2\pi K_m (v_1 - v_2) = F_0 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \tag{2.10}$$

IV. *Составной полый цилиндр, состоящий из n областей* (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_n, a_{n+1}) *с коэффициентами теплопроводности* $K_1, \ldots, K_n$.

Если $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ — температуры на поверхностях $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, то многократное использование (2.4) показывает, что величина теплового потока, приходящегося на единицу длины системы F, равна

$$F = \frac{2\pi K_1 (v_1 - v_2)}{\ln(a_2/a_1)} = \ldots = \frac{2\pi K_n (v_n - v_{n+1})}{\ln(a_{n+1}/a_n)}. \tag{2.11}$$

Следовательно,

$$v_1 - v_{n+1} = \frac{F}{2\pi} \sum_{r=1}^{n} \frac{\ln(a_{r+1}/a_r)}{K_r}. \tag{2.12}$$

Если, кроме того, имеются контактные сопротивления $R_1, R_2, \ldots, R_n, R_{n+1}$ на единицу площади поверхностей $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, а v_0 и v_{n+2} — температуры внутри и вне составного цилиндра, то мы получим следующее соотношение:

$$v_0 - v_{n+2} = \frac{F}{2\pi} \left\{ \sum_{r=1}^{n} \frac{\ln(a_{r+1}/a_r)}{K_r} + \sum_{r=1}^{n+1} \frac{R_r}{a_r} \right\}. \tag{2.13}$$

Приведенное выше выражение (2.6) представляет собой простой частный случай (2.13).

V. *Выделение тепла в цилиндре.*

Если количество выделяемого в единицу времени тепла равно постоянной A_0, то для установившегося радиального потока соотношение (6.7) гл. I примет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) + \frac{A_0}{K} = 0. \tag{2.14}$$

Общее решение (2.14) имеет вид

$$v = A + B\ln r - \left(\frac{A_0 r^2}{4K}\right). \tag{2.15}$$

---

*) Это соотношение часто использовалось при определении теплопроводности [2—5].

Для сплошного цилиндра *) член, содержащий $\ln r$, выпадает **), и (2.15) примет вид

$$v = v_0 - \left(\frac{A_0 r^2}{4K}\right), \tag{2.16}$$

где v_0 — температура на оси цилиндра. Если поверхность цилиндра $r = a$ поддерживается при нулевой температуре, то

$$v = \frac{A_0 (a^2 - r^2)}{4K}; \tag{2.17}$$

если же на поверхности $r = a$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры и коэффициентом теплообмена H, то

$$v = \frac{aA_0}{2H} + \frac{A_0 (a^2 - r^2)}{4K}. \tag{2.18}$$

Для полой цилиндрической проволоки, внутренний и внешний радиусы которой соответственно равны a и b, а температуры внутренней и внешней поверхностей равны v_1 и v_2, мы получим из (2.15)

$$v_1 - v_2 = B \ln (a/b) - \frac{(a^2 - b^2) A_0}{4K}. \tag{2.19}$$

Постоянная B определяется из граничных условий. Если, как это обычно бывает, тепловой поток на внутренней поверхности отсутствует, то можно написать

$$\left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]_{r=a} = \frac{B}{a} - \frac{aA_0}{2K} = 0. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и (2.20) следует, что

$$K = \frac{A_0 \{b^2 - a^2 - 2a^2 \ln (b/a)\}}{4 (v_1 - v_2)}. \tag{2.21}$$

Соотношения (2.16) и (2.21) использовались для определения коэффициента теплопроводности [9—12].

Рассмотрим *изолированную проволоку*, в которой изолирующий материал с коэффициентом теплопроводности K_1 заполняет область $a < r < b$, окружающую участок проволоки $0 < r < a$ с коэффициентом теплопроводности K, причем в этом участке количество тепла, выделяющегося в единицу времени на единицу объема, равно A_0. Если при $r = b$ происходит теплообмен, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial r} + hv = 0, \quad r = b,$$

то решение, полученное из (2.2) и (2.16), примет вид

$$v = \frac{A_0}{4K} \left\{ a^2 - r^2 + \frac{2Ka^2}{hbK_1} + \frac{2Ka^2}{K_1} \ln \frac{b}{a} \right\}, \quad 0 \leqslant r < a, \tag{2.22}$$

$$v = \frac{a^2 A_0}{2K_1} \left\{ \frac{1}{hb} + \ln \frac{b}{r} \right\}, \quad a < r < b. \tag{2.23}$$

---

*) Простейшим является случай нагревания проволоки путем пропускания по ней электрического тока плотностью I $a/см^2$; в данном случае $A_0 = jI^2/\sigma$, где σ — электропроводность проволоки, а j — число калорий в джоуле. Случай установившейся температуры в проволоке, нагреваемой либо в результате пропускания переменного тока (здесь A_0 является функцией r вследствие скин-эффекта), либо за счет индукции, рассматривается в работе [6]. Данная задача совпадает с задачей о нагревании длинной цилиндрической магнитной катушки [7]. Случай индукционного нагрева цилиндра рассматривается в работе [8].

**) $B = 0$, так как температура любой точки тела конечна. (*Прим. ред.*)

Если изменение сопротивления проволоки линейно зависит от температуры, то (2.14) заменяется уравнением

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}+\beta^2 v=-\frac{A_0}{K}, \tag{2.24}$$

где

$$\beta^2=\frac{\alpha A_0}{K}, \tag{2.25}$$

а α — температурный коэффициент сопротивления.

Решение уравнения (2.24), которое является конечным при $r=0$, имеет вид

$$v=AJ_0(\beta r)-\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{2.26}$$

Если поверхность $r=a$ поддерживается при нулевой температуре, то температура тела в зависимости от r выражается следующим образом *):

$$v=\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)}-1\right\}, \tag{2.27}$$

где $J_0(z)$ определяется в приложении 3.

Для полого цилиндра $a<r<b$, поверхность которого $r=b$ поддерживается при нулевой температуре, при отсутствии теплового потока через поверхность $r=a$ температурное поле записывается в виде

$$v=\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{J_0(\beta r)\,Y_1(\beta a)-Y_0(\beta r)\,J_1(\beta a)}{J_0(\beta b)\,Y_1(\beta a)-Y_0(\beta b)\,J_1(\beta a)}-1\right\}. \tag{2.28}$$

VI. *Методы с использованием горячей проволоки* [13].

Для измерения коэффициента теплопроводности газов и плохих проводников **) были использованы различные комбинации (2.4) и результатов, полученных методом Каллендера [14, 15]. Как и в пункте II § 11 гл. IV, проволоку радиусом a и длиной $2l$ нагревают электрическим током и измеряют ее электрическое сопротивление. Кольцевую область $a<r<b$, $0<x<2l$, окружающую проволоку, заполняют веществом, коэффициент теплопроводности которого K_1 нужно измерить; при этом температуру внешних поверхностей $r=b$, а также $z=0$ и $z=2l$ поддерживают равной нулю.

Пусть v — температура проволоки в точке x (предполагается, что она постоянна по всему поперечному сечению, как и в § 10 гл. IV), а поток в области $0<r<b$ радиален ***); если предположить, кроме того, что на поверхности раздела $r=a$ между проволокой и окружающей средой изменение температуры происходит непрерывно ****), то из (2.4) мы находим

*) Если α — отрицательная величина (как, например, для графита), то $J_0(\beta r)$ в (2.27) следует заменить на $I_0[r(-\alpha A_0/K)^{1/2}]$. Числовые значения (2.27) даны Якобом в работе [56], где α — величина положительная, и в работе [57], где α — величина отрицательная.

**) Неустановившееся состояние рассматривается в работе [16] (см. также § 4 гл. XIII).

***) Полная задача с двумя переменными, в которой это предположение не делается, рассматривается в § 3 гл. VIII (см. [14]).

****) Как отмечалось в пункте Ж § 9 гл. I, на поверхности раздела двух твердых тел (если только между ними нет очень хорошего контакта), всегда может быть скачок температуры. Как показал Смолуховский [17], при наличии контакта между твердым телом и газом на поверхности имеется скачок температуры, величина которого зависит от температурного градиента (см. также [18]). В случае скачка температуры на поверхности для его учета необходимо изменить (2.29).

потерю тепла проволокой в точке x в виде

$$\frac{2\pi K_1}{\ln(b/a)} v. \tag{2.29}$$

Тогда дифференциальное уравнение, описывающее распространение тепла в проволоке, будет иметь вид (10.4) гл. IV, но вместо члена Hpv будет стоять (2.29). Оно исследуется таким же образом, как и в § 11 гл. IV.

§ 3. Установившаяся, периодически изменяющаяся температура в круговых цилиндрах [19—22]

Как и в § 7 гл. III, ищем решения с периодом $2\pi/\omega$, содержащие временной множитель $e^{i\omega t}$ (напомним, что на этот множитель нужно умножить все выражения для температур и потоков и что мы условились всюду пропускать его). Тогда соотношение (1.3) данной главы принимает вид

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dt} - \frac{i\omega}{\varkappa} v = 0. \tag{3.1}$$

Общее его решение записывается следующим образом (ср. соотношение (6) приложения 3):

$$v = PI_0(kri^{1/2}) + QK_0(kri^{1/2}), \tag{3.2}$$

где

$$k = \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Поток f определяется уравнением

$$f = -K\frac{\partial v}{\partial r} = -Kki^{1/2}PI_1(kri^{1/2}) + Kki^{1/2}QK_1(kri^{1/2}). \tag{3.4}$$

Функции Бесселя мнимого аргумента в соотношениях (3.2) и (3.4) выражаются при помощи табулированных функций ber, bei, ker и kei, которые определяются соотношениями (ср. [23])

$$i^n I_n(zi^{1/2}) = \mathrm{ber}_n z + i\,\mathrm{bei}_n z, \tag{3.5}$$

$$i^{-n} K_n(zi^{1/2}) = \mathrm{ker}_n z + i\,\mathrm{kei}_n z, \tag{3.6}$$

причем их числовые значения для любых значений r и k можно считать известными.

Предположим теперь, что v_1 и F_1 — величины температуры и теплового потока на поверхности $r = a_1$, а v_1' и f_1' — соответствующие величины на поверхности $r = a_2$. Решая затем (3.2) и (3.4) при $r = a_1$, получим зависимость P и Q от величин v_1 и f_1. Подставляя найденные значения P и Q в (3.2) и (3.4) при $r = a_2$, получим зависимость v_1' и f_1' от величин v_1 и f_1 в виде

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ f_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где

$$A = a_1 ki^{1/2}[I_0(ka_2i^{1/2})K_1(ka_1i^{1/2}) + K_0(ka_2i^{1/2})I_1(ka_1i^{1/2})], \tag{3.8}$$

$$B = \left(\frac{a_1}{K}\right)[I_0(ka_1i^{1/2})K_0(ka_2i^{1/2}) - K_0(ka_1i^{1/2})I_0(ka_2i^{1/2})], \tag{3.9}$$

$$C = Kk^2a_1[I_1(ka_2i^{1/2})K_1(ka_1i^{1/2}) - K_1(ka_2i^{1/2})I_1(ka_1i^{1/2})], \tag{3.10}$$

$$D = a_1 ki^{1/2}[I_0(ka_1i^{1/2})K_1(ka_2i^{1/2}) + K_0(ka_1i^{1/2})I_1(ka_2i^{1/2})], \tag{3.11}$$

$$AD - BC = \frac{a_1}{a_2}. \tag{3.12}$$

Для упрощения выкладок используется соотношение (22) приложения 3. Приведенная выше запись в виде матриц была рассмотрена в § 7 гл. III. Из соотношения

(3.12) следует, что v_1 и f_1 можно выразить через v_1' и f_1' в виде

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \frac{a_2}{a_1} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ f_1' \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Так же, как и в § 7 гл. III, искомые решения для составных цилиндрических областей можно непосредственно получить, перемножая соответствующие матрицы. Например, если область $a_1 < r < a_2$ состоит из вещества, характеризуемого величинами A_1, B_1, C_1, D_1, определяемыми из (3.8) — (3.12), а область $a_2 < r < a_3$ — из другого вещества, характеризуемого величинами A_2, B_2, C_2, D_2, и если между этими двумя веществами вдоль поверхности a_2 термическое сопротивление на единицу площади равно R, то

$$\begin{pmatrix} v_2' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Как отмечалось в § 7 гл. III, общие выражения быстро становятся слишком сложными, но для любых заданных условий можно найти из таблиц численные значения A, B, C, D и выполнить умножение квадратных матриц в соотношении (3.14) или эквивалентных им матриц. Граничные условия на внутренней и внешней поверхностях исследуемого тела позволяют получить два дополнительных соотношения для температур и тепловых потоков на этих поверхностях и, следовательно, мы можем определить все четыре величины.

Для области $0 \leqslant r < a$ мы должны иметь $Q = 0$ в (3.2), так как $K_0(kri^{1/2}) \to \infty$ при $r \to 0$. Отсюда следует, что при $r = a$

$$f = -\frac{Kki^{1/2} I_1(kai^{1/2})}{I_0(kai^{1/2})} v. \tag{3.15}$$

Для неограниченной области $r > b$ в соотношении (3.2) P должно равняться нулю, так как $I_0(kri^{1/2}) \to \infty$ при $r \to \infty$. Следовательно, в данном случае при $r = b$ мы можем написать

$$f = \frac{Kki^{1/2} K_1(kbi^{1/2})}{K_0(kbi^{1/2})} v. \tag{3.16}$$

§ 4. Неограниченный цилиндр. Радиальный поток. Неустановившаяся температура

Пусть начальное распределение температур задано в виде $v = f(r)$, и пусть поверхность $r = a$ поддерживается при постоянной температуре, которую можно принять равной нулю *).

Уравнения температурного поля записываются в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad 0 < r < a,$$

$$v = 0 \quad \text{при} \quad r = a$$

и

$$v = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Если положить $v = e^{-\varkappa \alpha^2 t} u$, где u — функция только r, то мы получим для u уравнение

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u = 0,$$

которое представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка.

*) Если температура поверхности постоянна и равна v_0, то, положив $v = v_0 + w$, мы можем свести этот случай к случаю нулевой температуры.

Так как его решение второго рода $Y_0(\alpha r)$ неограничено при $r=0$, то частное решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее нашей задаче, имеет вид

$$v = AJ_0(\alpha r)\, e^{-\varkappa\alpha^2 t},$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка*). Чтобы удовлетворить граничному условию, α должно служить корнем уравнения

$$J_0(a\alpha) = 0.$$

Известно, что это уравнение не имеет комплексных или кратных корней, а имеет бесчисленное множество действительных положительных корней [24]

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots$$

Каждому положительному корню α соответствует отрицательный корень $-\alpha$. Первые несколько корней приводятся в приложении 4 (см. табл. 3, $C=\infty$).

Если функцию $f(r)$ можно разложить в ряд **)

$$A_1J_0(\alpha_1 r) + A_2J_0(\alpha_2 r) + \ldots, \tag{4.1}$$

то решением задачи служит ряд

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)\, e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}. \tag{4.2}$$

Допустим, что можно произвести такое разложение в ряд и что сам ряд можно интегрировать почленно ***). Тогда, воспользовавшись определенными интегралами, которые мы рассмотрим в следующем параграфе, можно найти коэффициенты этого ряда.

Ряд Фурье — Бесселя (4.1), представляющий собой разложение функции $f(r)$, можно применить для решения задачи о цилиндре с нулевой температурой поверхности. Если же на его поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то граничное условие должно иметь вид

$$\frac{dv}{dr} + hv = 0, \quad r = a,$$

а для того чтобы $J_0(\alpha r)$ удовлетворяло заданному условию, α должно служить корнем уравнения

$$\alpha J_0'(\alpha a) + hJ_0(\alpha a) = 0. \tag{4.3}$$

В этом случае мы предполагаем, что функцию $f(r)$ можно разложить в ряд (4.1), где α_n теперь являются корнями (4.3). Разложение в такой ряд (ряд Дини) и соответствующие разложения в ряд по функциям Бесселя n-го порядка рассматриваются в книге Ватсона [24].

---

*) О функциях Бесселя см. приложение 3; см. также [24, 25].

**) Для этого достаточно потребовать, чтобы функция $f(r)$ была кусочно гладкой. (*Прим. ред.*)

***) Исследование возможности разложения произвольной функции в ряд по функциям Бесселя можно найти в [24, 26—30].

Если функцию $f(r)$ можно разложить в ряд (4.1), то еще необходимо показать, что (4.2) удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальным и граничным условиям; иными словами, этот случай полностью аналогичен случаю линейного потока тепла, изложенному в § 3 гл. III [27]. Те же замечания применимы ко всем случаям разложения в ряд по бесселевым функциям, рассмотренным в настоящей и в следующей главах. Процесс доказательства можно провести также на основе метода преобразования Лапласа (см. приложение 1).

В следующем параграфе мы найдем основные определенные интегралы, позволяющие нам оценить коэффициенты во всех рядах, которые представляют для нас интерес. Там же будут решены различные задачи по теплопроводности цилиндра; при этом мы будем исходить из предположения о возможности разложения в ряд и допустимости почленного интегрирования. Все решения можно получить при помощи преобразования Лапласа, как это сделано в гл. XIII, XIV.

§ 5. Интегралы*) $\int\limits_0^a rJ_n(\alpha r)\,J_n(\beta r)\,dr$ и $\int\limits_0^a r\,[J_n(\alpha r)]^2\,dr$

Пусть $u = J_n(\alpha r)$ и $v = J_n(\beta r)$. Тогда из уравнения Бесселя получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)+\left(\alpha^2-\frac{n^2}{r^2}\right)u=0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)+\left(\beta^2-\frac{n^2}{r^2}\right)v=0.$$

Тогда

$$(\beta^2-\alpha^2)\int\limits_0^a ruv\,dr=\int\limits_0^a\left[v\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)-u\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\right]dr=$$

$$=a\left[v\frac{du}{dr}-u\frac{dv}{dr}\right]_{r=a}.$$

Последнее обращается в нуль при

$$\alpha J_n(\beta a)\,J_n'(\alpha a)-\beta J_n(\alpha a)\,J_n'(\beta a)=0,$$

где

$$J_n'(\alpha a)=\left[\frac{d}{dr}J_n(r)\right]_{r=\alpha a}.$$

Таким образом, если α и β являются двумя различными положительными корнями уравнений

1)
$$J_n(\alpha a)=0,$$
или 2)
$$J_n'(\alpha a)=0,$$
или 3)
$$\alpha J_n'(\alpha a)+hJ_n(\alpha a)=0,$$
мы получим
$$\int\limits_0^a rJ_n(\alpha r)\,J_n(\beta r)\,dr=0. \qquad (5.1)$$

Кроме того, поскольку

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)+\left(\alpha^2-\frac{n^2}{r^2}\right)u=0,$$

*) Для сходимости этих интегралов при $r=0$ необходимо, чтобы действительная часть n была больше чем -1. В дальнейшем эти интегралы будут применяться в тех случаях, когда n действительно и не меньше нуля.

можно написать

$$2r\frac{du}{dr}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)+2\left(\alpha^2-\frac{n^2}{r^2}\right)r^2u\frac{du}{dr}=0.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)^2+\alpha^2r^2\frac{du^2}{dr}-n^2\frac{du^2}{dr}=0$$

и

$$\alpha^2\int_0^a r^2\frac{du^2}{dr}dr+\left[\left(r\frac{du}{dr}\right)^2-n^2u^2\right]_0^a=0.$$

Интегрируя по частям, получим следующее выражение:

$$2\alpha^2\int_0^a ru^2\,dr=\left[r^2\left(\frac{du}{dr}\right)^2+(\alpha^2r^2-n^2)\,u^2\right]_0^a.$$

Используя соотношение (1) приложения 3 при нижнем пределе, находим, что

$$\int_0^a r\,\{J_n(\alpha r)\}^2\,dr=\frac{1}{2\alpha^2}\left[a^2\alpha^2\{J_n'(\alpha a)\}^2+(a^2\alpha^2-n^2)\{J_n(\alpha a)\}^2\right]=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\{J_n'(\alpha a)\}^2+\left(1-\frac{n^2}{a^2\alpha^2}\right)\{J_n(a\alpha)\}^2\right].$$

В результате получим:

1) если α является корнем *) уравнения $J_n(\alpha a)=0$, то

$$\int_0^a r\,\{J_n(\alpha r)\}^2\,dr=\frac{a^2}{2}\{J_n'(\alpha a)\}^2; \tag{5.2}$$

2) если α является корнем уравнения $J_n'(\alpha a)=0$, то

$$\int_0^a r\,\{J_n(\alpha r)\}^2\,dr=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{a^2\alpha^2}\right)\{J_n(\alpha a)\}^2; \tag{5.3}$$

3) если α является корнем уравнения $\alpha J_n'(\alpha a)+hJ_n(\alpha a)=0$, то

$$\int_0^a r\,\{J_n(\alpha r)\}^2\,dr=\frac{1}{2\alpha^2}\{a^2h^2+(a^2\alpha^2-n^2)\}\{J_n(\alpha a)\}^2. \tag{5.4}$$

Наконец, отметим, что из рекуррентной формулы (см. (17) приложения 3) следует

$$\frac{d}{dz}\{z^{n+1}J_{n+1}(z)\}=z^{n+1}J_n(z).$$

Отсюда непосредственно вытекает, что для *любого* α и $n>-1$

$$\int_0^r r^{n+1}J_n(\alpha r)\,dr=\frac{1}{\alpha}r^{n+1}J_{n+1}(\alpha r). \tag{5.5}$$

---

*) Известно, что все корни этого и других уравнений (см. (2) и (3)) являются действительными и среди них нет кратных [24].

§ 6. Неограниченный цилиндр с температурой поверхности $\varphi(t)$ и начальной температурой $f(r)$

Рассматривая вначале случай *начальной температуры, равной* $f(r)$, и *температуры поверхности, равной нулю*, получим

$$f(r) = A_1 J_0(\alpha_1 r) + A_2 J_0(\alpha_2 r) + \ldots, \tag{6.1}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$J_0(\alpha a) = 0. \tag{6.2}$$

Умножим обе части уравнения (6.1) на $rJ_0(\alpha_n r)$ и проинтегрируем от 0 до a; тогда, используя соотношения (5.1) и (5.2) предыдущего параграфа, а именно

$$\int_0^a rJ_0(\alpha_m r)\, J_0(\alpha_n r)\, dr = 0, \qquad m \neq n,$$

$$\int_0^a r\,[J_0(\alpha_n r)]^2\, dr = \frac{1}{2} a^2 \left[J_0'(a\alpha_n)\right]^2 = \frac{1}{2} a^2 J_1^2(a\alpha_n),$$

где учитывается, что $J_0'(z) = -J_1(z)$, находим

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(a\alpha_n)} \int_0^a r f(r)\, J_0(r\alpha_n)\, dr. \tag{6.3}$$

Следовательно,

$$v = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1^2(a\alpha_n)} \int_0^a r f(r)\, J_0(r\alpha_n)\, dr. \tag{6.4}$$

В случае постоянной начальной температуры, $f(r) = V$, интеграл в (6.4) вычисляется с помощью (5.5). В результате имеем

$$v = \frac{2V}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_1(a\alpha_n)}. \tag{6.5}$$

Используя еще раз (5.5), находим *среднюю температуру цилиндра*; она равна

$$\frac{2}{a^2} \int_0^a rv\, dr = \frac{4V}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}. \tag{6.6}$$

Пусть мы имеем параболическое начальное распределение температуры, например

$$f(r) = V_0 - kr^2;$$

тогда, интегрируя по частям и используя (5.5), находим

$$\int_0^a r^3 J_0(\alpha r)\, dr = \frac{a^3}{\alpha} J_1(a\alpha) - \frac{2a^2}{\alpha^2} J_2(\alpha a).$$

Итак, воспользовавшись этим результатом, мы получим вместо (6.4) соотношение

$$v=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_n^2t}\frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n^2J_1^2(a\alpha_n)}\{\alpha_n(V_0-ka^2)J_1(a\alpha_n)+2kaJ_2(a\alpha_n)\}. \quad (6.7)$$

Если начальная температура цилиндра равна нулю и при $t>0$ *его поверхность поддерживается при постоянной температуре* V, то решение, полученное в результате вычитания (6.5) из V, имеет вид

$$v=V-\frac{2V}{a}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_n^2t}\frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_nJ_1(a\alpha_n)}. \quad (6.8)$$

Рис. 24. Распределение температур в различные моменты времени в цилиндре радиуса a для случая нулевой начальной температуры и температуры поверхности, равной V.

Числа на кривых указывают величины $\varkappa t/a^2$.

При расчетах удобнее использовать безразмерные переменные. Поэтому запишем

$$a\alpha_n=\beta_n \quad \text{и} \quad \frac{\varkappa t}{a^2}=T; \quad (6.9)$$

тогда (6.8) принимает вид *)

$$\frac{v}{V}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\beta_n^2T}\frac{J_0(r\beta_n/a)}{\beta_nJ_1(\beta_n)}, \quad (6.10)$$

где теперь $\pm\beta_n(n=1, 2, \ldots)$ — корни уравнения

$$J_0(\beta)=0. \quad (6.11)$$

Первые несколько корней этого уравнения приведены в приложении 4 (табл. 3, при $C=\infty$); первые пятьдесят корней с соответствующими значениями $J_1(\beta_n)$ можно найти в [25].

На рис. 24 приведены графики зависимости v/V от r/a (при разных значениях T), определяемой соотношением (6.10). Полученные кривые очень похожи на соответствующие кривые для пластины, показанные на рис. 11; и действительно [32, 33] **), можно найти такие значения $T_1=\varkappa t_1/a^2$ для пластины толщиной $2a$, что распределение температуры в цилиндре в момент времени t окажется очень близким к распределению температуры в пластине в момент времени t_1. Температура на оси цилиндра ***) и зависимость средней температуры цилиндра от T приведены на рис. 12. Ряд (6.10) очень быстро сходится при любых значениях T (кроме очень малых). Соответствующие решения, пригодные для расчетов при малых T, приводятся в § 3 гл. XIII.

Если начальная температура цилиндра равна нулю, а температура его поверхности равна $\varphi(t)$, то решение, полученное методом

*) Величины $J_0(r\beta_n/a)$, входящие в (6.10), протабулированы в работе [31] до пяти десятичных знаков при $n=1, 2, \ldots, 10$ и (r/a) — от 0 до 1 с шагом (0,01).

**) То же замечание остается применимым и к задачам с другими граничными условиями.

***) Численные значения для температуры на оси цилиндра приведены в [34].

Дюамеля (см. § 14 гл. I) из (6.8), имеет вид

$$v = \frac{2\varkappa}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{\alpha_n J_0(r\alpha_n)}{J_1(a\alpha_n)} \int_0^t e^{+\varkappa\alpha_n^2\lambda} \varphi(\lambda)\, d\lambda. \tag{6.12}$$

Если начальная температура равна нулю и температура поверхности равна kt, то

$$v = k\left(t - \frac{a^2 - r^2}{4\varkappa}\right) + \frac{2k}{a\varkappa} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha)_n}{\alpha_n^3 J_1(a\alpha_n)}. \tag{6.13}$$

Если начальная температура равна нулю и температура поверхности равна $V \sin(\omega t + \varepsilon)$, то

$$v = V \operatorname{Re}\left\{ \frac{I_0[r(i\omega/\varkappa)^{1/2}]}{iI_0[a_0(i\omega/\varkappa)^{1/2}]} \exp[i(\omega t + \varepsilon)] \right\} +$$

$$+ \frac{2\varkappa V}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\varkappa\alpha_n^2 t) \frac{\alpha_n(\omega\cos\varepsilon - \varkappa\alpha_n^2 \sin\varepsilon) J_0(r\alpha_n)}{(\varkappa^2\alpha_n^4 + \omega^2) J_1(a\alpha_n)}. \tag{6.14}$$

Здесь первый член можно считать решением задачи для установившегося периодического состояния, второй — для неустановившегося состояния. Напишем *)

$$I_0\left(zi^{\frac{1}{2}}\right) = \operatorname{ber} z + i \operatorname{bei} z = M_0(z)\, e^{i\theta_0(z)} \tag{6.15}$$

и $\omega' = (\omega/\varkappa)^{1/2}$; тогда первый член решения (6.14) примет вид

$$\frac{VM_0(\omega' r)}{M_0(\omega' a)} \sin\{\omega t + \varepsilon + \theta_0(\omega' r) - \theta_0(\omega' a)\}. \tag{6.16}$$

§ 7. Неограниченный цилиндр с теплообменом на поверхности

В настоящем параграфе мы рассмотрим круговой цилиндр с начальной температурой $f(r)$ и теплообменом на его поверхности со средой. Пусть

$$f(r) = A_1 J_0(\alpha_1 r) + A_2 J_0(\alpha_2 r) + \ldots, \tag{7.1}$$

где $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots$ — корни уравнения

$$\alpha J_0'(a\alpha) + hJ_0(a\alpha) = 0. \tag{7.2}$$

Все эти корни действительны и просты [24]. Тогда, используя соотношение (5.4) данной главы

$$\int_0^a r[J_0(\alpha_n r)]^2 dr = \frac{a^2}{2\alpha_n^2}(h^2 + \alpha_n^2) J_0^2(a\alpha_n),$$

получим

$$v = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n r)}{(h^2 + \alpha_n^2) J_0^2(\alpha_n a)} \int_0^a r f(r) J_0(r\alpha_n)\, dr. \tag{7.3}$$

*) Объяснение символов $M_0(z)$ и $\theta_0(z)$ и их численные значения приведены в книге Мак-Лахлана [23].

Для случая $f(r) = V = \text{const}$ находим, используя соотношение (5.5) данной главы

$$v = \frac{2V}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{\alpha_n J_0(r\alpha_n) J_1(a\alpha_n)}{(h^2+\alpha_n^2) J_0^2(a\alpha_n)},$$

$$v = \frac{2hV}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{(h^2+\alpha_n^2) J_0(a\alpha_n)}. \tag{7.4}$$

Для перехода к безразмерным величинам введем следующие обозначения:

$$a\alpha_n = \beta_n, \qquad \frac{\varkappa t}{a^2} = T, \qquad ah = A. \tag{7.5}$$

Тогда можно написать

$$\frac{v}{V} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 T} \frac{2AJ_0(r\beta_n/a)}{(\beta_n^2 + A^2) J_0(\beta_n)}, \tag{7.6}$$

где $\pm\beta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — корни уравнения

$$\beta J_1(\beta) = AJ_0(\beta). \tag{7.7}$$

Таблица значений этих корней приведена в приложении 4.

Если начальная температура цилиндра равна нулю и на его поверхности происходит теплообмен со средой, имеющей температуру V, то

$$\frac{v}{V} = 1 - 2A \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 T} \frac{J_0(r\beta_n/a)}{(\beta_n^2 + A^2) J_0(\beta_n)}. \tag{7.8}$$

Численные значения (7.6) и (7.8) приведены в ряде работ [35—38] *).

Средняя температура цилиндра $v_{\text{ср}}$ определяется соотношением

$$\frac{v_{\text{ср}}}{V} = 1 - 4A \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 T} \frac{J_1(\beta_n)}{\beta_n (\beta_n^2 + A^2) J_0(\beta_n)}, \tag{7.9}$$

а теплосодержание, приходящееся на единицу длины цилиндра, равно $\pi a^2 \rho c v_{\text{ср}}$. *Если начальная температура цилиндра равна нулю и на его поверхности происходит теплообмен со средой, имеющей температуру kt*, то

$$v = kt - \frac{ka^2}{4\varkappa}\left(1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{2}{A}\right) + \frac{2Aka^2}{\varkappa} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 T} \frac{J_0(r\beta_n/a)}{\beta_n^2 (A^2 + \beta_n^2) J_0(\beta_n)}, \tag{7.10}$$

где A, T, β_n определяются из (7.5) и (7.7).

Если начальная температура цилиндра равна нулю и на его поверхности происходит теплообмен со средой, имеющей температуру $V \sin(\omega t + \varepsilon)$, то

$$v = \operatorname{Re}\left\{\frac{hVI_0[r(i\omega/\varkappa)^{1/2}]\, e^{i(\omega t+\varepsilon)}}{i\{(i\omega/\varkappa)^{1/2} I_1[a(i\omega/\varkappa)^{1/2}] + hI_0[a(i\omega/\varkappa)^{1/2}]\}}\right\} +$$
$$+ 2\varkappa AV \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 T} \frac{\beta_n^2 (a^2\omega \cos\varepsilon - \varkappa\beta_n^2 \sin\varepsilon) J_0(r\beta_n/a)}{(\varkappa^2\beta_n^4 + \omega^2 a^4)(\beta_n^2 + A^2) J_0(\beta_n)}. \tag{7.11}$$

Используя (6.15), можно записать первый член (7.11) в виде

$$V\eta_0 \sin(\omega t + \varepsilon - \varepsilon_0),$$

где ε_0 и η_0 — сложные выражения, содержащие функции ber и bei **).

*) Приложение к определению поправки на излучение в калориметрии изложено в [39].

**) Численные значения ε_0 и η_0 приведены в [40].

§ 8. Неограниченный цилиндр с постоянным потоком тепла на поверхности *)

I. *Нулевая начальная температура. Постоянный поток тепла F_0 внутрь цилиндра.*

$$v_0=\frac{2F_0\varkappa t}{Ka}+\frac{F_0 a}{K}\left\{\frac{r^2}{2a^2}-\frac{1}{4}-2\sum\exp\left[-\frac{\varkappa\alpha_n^2 t}{a^2}\right]\frac{J_0(r\alpha_n/a)}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)}\right\}, \quad (8.1)$$

где α_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — положительные корни уравнения

$$J_1(\alpha)=0. \quad (8.2)$$

Некоторые значения функции $v-(2F_0\varkappa t/Ka)$ приведены на рис. 25. Доказательство (8.1) изложено в § 2 гл. XIII.

II. *Начальная температура $f(r)$. Тепловой поток на поверхности равен нулю.*

$$v=\frac{2}{a^2}\int_0^a r'f(r')\,dr'+\frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa\alpha_n^2 t}{a^2}\right]\frac{J_0(r\alpha_n/a)}{J_0^2(\alpha_n)}\int_0^a r'f(r')\,J_0\left(\frac{r'\alpha_n}{a}\right)dr', \quad (8.3)$$

где α_n — корни уравнения (8.2).

Это соответствует случаю h, равного нулю, в задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе. Однако следует отметить, что условие $h=0$ в соотношении (7.3) данной главы не приводит к соотношению (8.3) из-за отсутствия первого члена. В § 9 гл. I указывалось, что при граничных условиях вида

$$\frac{\partial v}{\partial r}+hv=0, \qquad r=a,$$

h всегда предполагается величиной положительной, и поэтому допущение для таких условий, что $h=0$, часто не дает правильного решения задачи, в которой граница непроницаема для тепла. В данной задаче физический смысл различия заключается в том, что если h положительно, то конечная температура цилиндра равна нулю независимо от того, насколько малой может быть величина h, тогда как при $h=0$ (т. е. при условии, что поверхность непроницаема для тепла) конечная температура цилиндра равна не нулю, а средней величине начальной температуры. Математически это соответствует тому, что к нашему соотношению следует добавить постоянный первый член, аналогичный постоянному первому члену ряда Фурье по косинусам **). То же остается справедливым и для сферы в отсутствие теплового потока на ее поверхности (см. § 7 гл. IX).

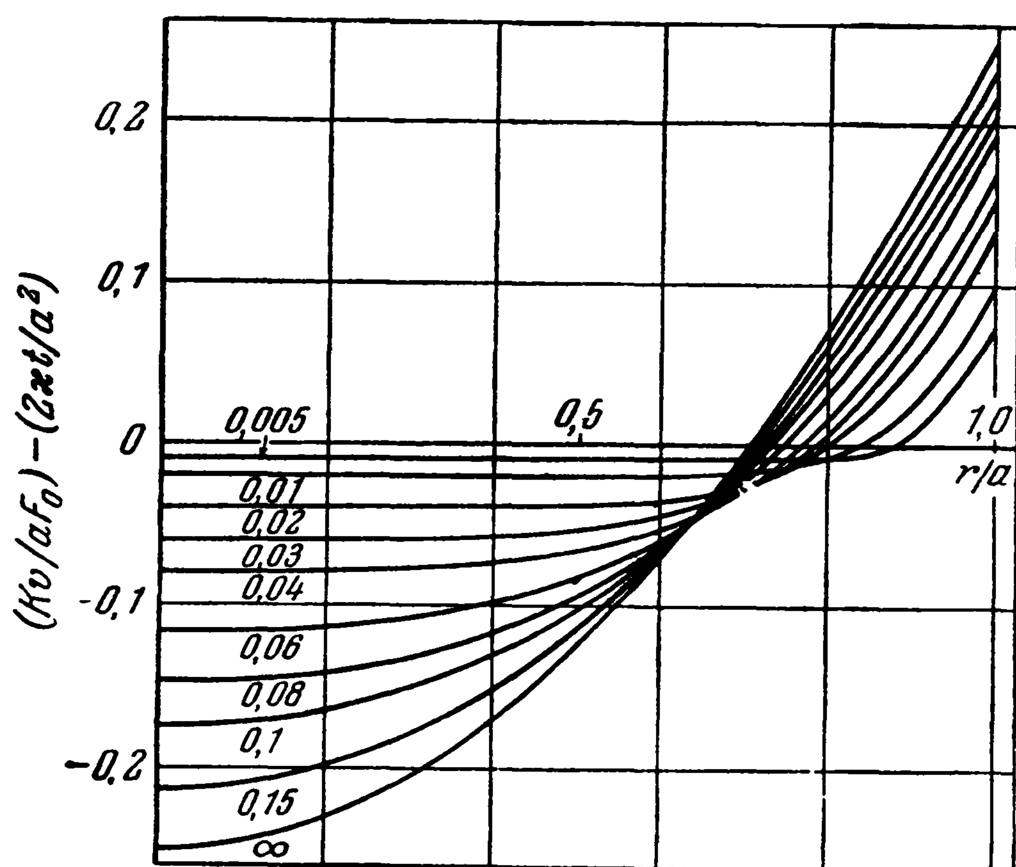


Рис. 25. Температура в цилиндре кругового сечения для случая постоянного потока тепла на поверхности.

Числа на кривых указывают величины $\varkappa t/a^2$.

*) Подобные задачи возникают при рассмотрении индукционного нагрева, а также сушки глины (ср. [41—44]).

**) Эта трудность не возникает при использовании метода преобразования Лапласа, рассматриваемого в гл. XIII, так как в этом случае члены, которые имеются в решении, определяются особыми точками функции комплексного переменного (см. также [24]). В работе [45] постоянный член, соответствующий первому члену, опущен и, таким образом, приведенное в ней решение некорректно.

§ 9. Неограниченный цилиндр с внутренними источниками тепла *)

I. *Начальная температура и температура поверхности равны нулю. Мощность источников* **) *при* $t > 0$ *равна постоянной величине* A_0

$$v = \frac{A_0 (a^2 - r^2)}{4K} - \frac{2A_0}{aK} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa \alpha_n^2 t} \frac{J_0 (r\alpha_n)}{\alpha_n^3 J_1 (a\alpha_n)}, \tag{9.1}$$

где α_n — положительные корни уравнения $J_0(a\alpha) = 0$. Некоторые значения температуры приведены на рис. 26. Доказательство (9.1) изложено в § 2 гл. XIII.

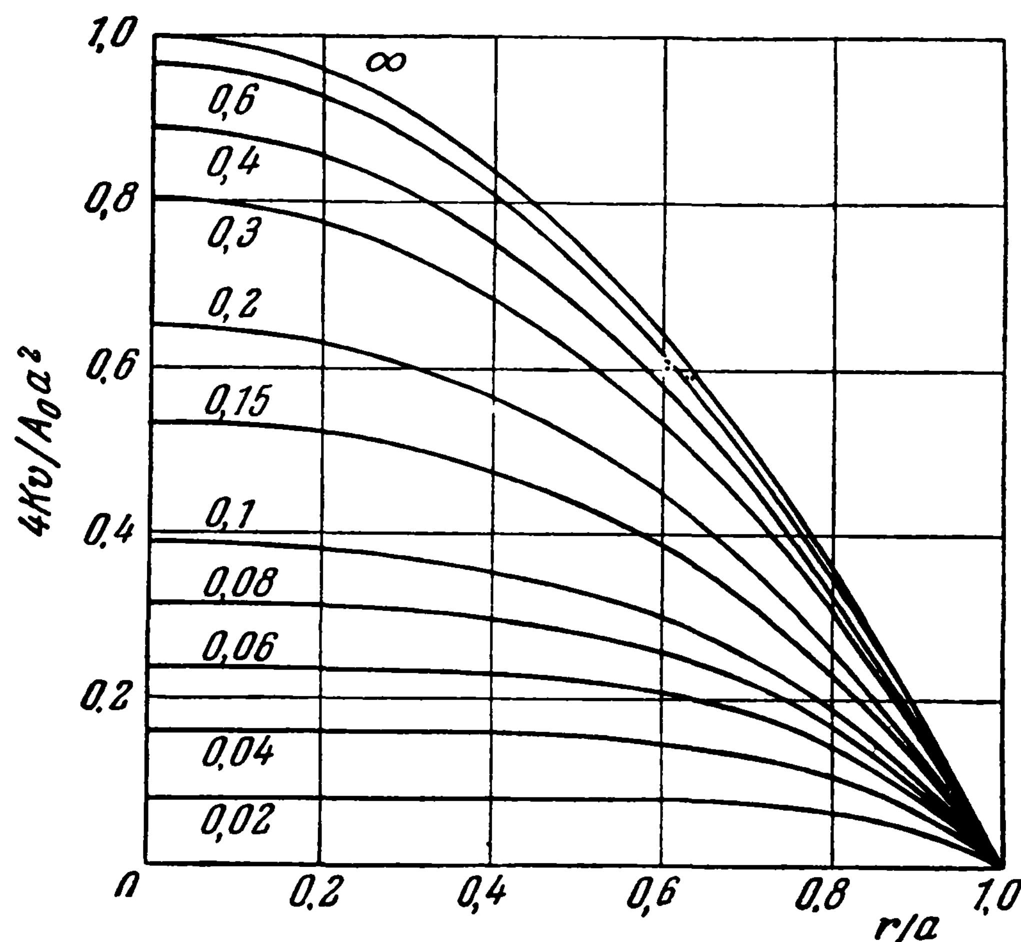


Рис. 26. Температура в цилиндре кругового сечения для случая постоянного выделения тепла в единицу времени и нулевой температуры поверхности.

II. *Начальная температура и температура поверхности равны нулю. При* $t > 0$ *мощность источников равна* $A_0 e^{-\lambda t}$.

$$v = \frac{\varkappa A_0}{K\lambda} e^{-\lambda t} \left\{ \frac{J_0 [r (\lambda/\varkappa)^{1/2}]}{J_0 [a (\lambda/\varkappa)^{1/2}]} - 1 \right\} - \frac{2A_0 \varkappa}{aK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\varkappa \alpha_n^2 t} J_0 (r\alpha_n)}{\alpha_n \left(\varkappa \alpha_n^2 - \lambda\right) J_1 (a\alpha_n)}, \tag{9.2}$$

где α_n — положительные корни уравнения $J_0 (a\alpha) = 0$.

III. *Начальная температура равна нулю. При* $t > 0$ *мощность источников равна постоянной* A_0. *На поверхности* $r = a$ *происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

$$v = \frac{A_0 a^2}{4K} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{2}{ah}\right) - \frac{2hA_0}{aK} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa \alpha_n^2 t} \frac{J_0 (r\alpha_n)}{\alpha_n^2 \left(h^2 + \alpha_n^2\right) J_0 (a\alpha_n)}, \tag{9.3}$$

где α_n — положительные корни уравнения $\alpha J_1 (a\alpha) = hJ_0 (a\alpha)$.

---

*) Эта задача и соответствующая задача для полого цилиндра рассматриваются в [46] в приложении к биологическим проблемам.

**) Здесь автор имеет в виду равномерное распределение источников в цилиндре. (*Прим. ред.*)

§ 10. Неограниченный полый цилиндр. Радиальный поток

I. *Неограниченный полый цилиндр. Поверхности $r=a$ и $r=b$ поддерживаются при нулевой температуре. Начальная температура $f(r)$.*

В этом случае мы имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right), \qquad a<r<b. \tag{10.1}$$

Положим $v=ue^{-\varkappa\alpha^2 t}$, где u зависит только от r; тогда для u получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\alpha^2 u=0,$$

т. е. уравнение Бесселя нулевого порядка.

Если область изменения r не включает $r=0$, то могут встретиться функции Бесселя второго рода. Рассмотрим функцию

$$U_0(\alpha r)=J_0(\alpha r)Y_0(\alpha b)-J_0(\alpha b)Y_0(\alpha r). \tag{10.2}$$

Эта функция обращается в нуль при $r=b$. Кроме того, она обращается в нуль и при $r=a$, если α служит корнем уравнения

$$J_0(\alpha a)Y_0(\alpha b)-J_0(\alpha b)Y_0(\alpha a)=0. \tag{10.3}$$

Известно, что все корни уравнения (10.3) действительны и просты и что каждому положительному корню α соответствует отрицательный корень $-\alpha$ [25] *). Некоторые значения этих корней приведены в табл. 4 приложения 4. Сначала найдем интегралы от функций $U_0(\alpha r)$, аналогичные соответствующим интегралам, рассмотренным в § 5 данной главы. Повторяя приведенный там анализ для значений $u=U_0(\alpha r)$ и $v=U_0(\beta r)$, получим

$$\int_a^b rU_0(\alpha r)U_0(\beta r)\,dr=0, \tag{10.4}$$

где α и β — два различных корня уравнения (10.3).

Кроме того,

$$\int_a^b rU_0^2(\alpha r)\,dr=\frac{1}{2\alpha^2}\left[\left(r\frac{dU_0}{dr}\right)^2\right]_a^b. \tag{10.5}$$

Теперь, используя соотношение (20) приложения 3, получим

$$\left[r\frac{dU_0}{dr}\right]_{r=b}=\alpha b\left[J_0'(\alpha b)Y_0(\alpha b)-Y_0'(\alpha b)J_0(\alpha b)\right]=-\frac{2}{\pi}. \tag{10.6}$$

Помимо этого,

$$\left[r\frac{dU_0}{dr}\right]_{r=a}=\alpha a\left[J_0'(\alpha a)Y_0(\alpha b)-Y_0'(\alpha a)J_0(\alpha b)\right]. \tag{10.7}$$

Однако если α служит корнем (10.3), то, например,

$$\frac{J_0(a\alpha)}{J_0(b\alpha)}=\frac{Y_0(a\alpha)}{Y_0(b\alpha)}=\rho.$$

*) В цитируемой работе приводится также формула для вычисления больших корней этого уравнения. Значения корней для $b/a=1{,}2,\ 1{,}5,\ 2{,}0$ указаны в [47, 48]. См. также [49].

Таким образом, (10.7) принимает вид

$$\left[r\frac{dU_0}{dr}\right]_{r=a}=\frac{\alpha a}{\rho}\left[J_0'(\alpha a)Y_0(\alpha a)-Y_0'(\alpha a)J_0(\alpha a)\right]=-\frac{2}{\pi\rho}. \qquad (10.8)$$

Следовательно, (10.5) можно записать в виде

$$\int\limits_a^b rU_0^2(\alpha r)\,dr=\frac{2\left\{J_0^2(\alpha a)-J_0^2(\alpha b)\right\}}{\pi^2\alpha^2J_0^2(\alpha a)}. \qquad (10.9)$$

Два других интеграла можно найти почти тем же способом из нашего дифференциального уравнения, используя (10.6) и (10.8). Эти интегралы имеют вид

$$\int\limits_a^b rU_0(\alpha r)\,dr=-\frac{1}{\alpha^2}\left[r\frac{dU_0}{dr}\right]_a^b=\frac{2\left\{J_0(a\alpha)-J_0(b\alpha)\right\}}{\pi\alpha^2J_0(a\alpha)}, \qquad (10.10)$$

$$\int\limits_a^b rU_0(\alpha r)\ln r\,dr=-\frac{1}{\alpha^2}\left[r\ln r\,\frac{dU_0}{dr}\right]_a^b=\frac{2\left\{J_0(a\alpha)\ln b-J_0(b\alpha)\ln a\right\}}{\pi\alpha^2J_0(a\alpha)}, \qquad (10.11)$$

где α — корень уравнения (10.3).

Предположим теперь, что начальную температуру $f(r)$ можно разложить в ряд

$$f(r)=A_1U_0(\alpha_1r)+A_2U_0(\alpha_2r)+\ldots,$$

который можно проинтегрировать почленно; тогда из (10.4) и (10.9) имеем

$$A_n=\frac{\pi^2\alpha_n^2}{2}\,\frac{J_0^2(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n)-J_0^2(b\alpha_n)}\int\limits_a^b rf(r)\,U_0(r)\,U_0(r\alpha_n)\,dr.$$

Таким образом, мы приходим к решению нашей задачи в виде

$$v=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2J_0^2(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n)-J_0^2(b\alpha_n)}\,e^{-\varkappa\alpha_n^2t}\,U_0(r\alpha_n)\int\limits_a^b rf(r)\,U_0(r\alpha_n)\,dr, \qquad (10.12)$$

причем суммирование ведется по всем положительным корням уравнения (10.3).

Для случая постоянной начальной температуры $f(r)=V$ мы получим, используя (10.8),

$$v=V\pi\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_n^2t}\,\frac{J_0(a\alpha_n)\,U_0(r\alpha_n)}{J_0(a\alpha_n)+J_0(b\alpha_n)}. \qquad (10.13)$$

II. *Начальная температура равна* $f(r)$, *а при* $t>0$ *поверхности* $r=a$ *и* $r=b$ *поддерживаются при постоянных температурах* v_1 *и* v_2.

В этом случае, имеющем большое практическое значение, мы можем написать, как и в § 14 гл. I,

$$v=u+w,$$

где

$$u=\frac{v_1\ln(b/r)+v_2\ln(r/a)}{\ln(b/a)}, \qquad (10.14)$$

согласно соотношению (2.3) данной главы, представляет собой температуру при установившемся потоке между поверхностями $r=a$ при v_1 и $r=b$

при v_2, а w определяется (10.12), в котором $f(r)$ заменено на $f(r)-u$. Используя (10.11), получим искомое решение в виде

$$v=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2 J_0^2(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n)-J_0^2(b\alpha_n)}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}U_0(r\alpha_n)\int_a^b rf(r)U_0(r\alpha_n)\,dr-$$

$$-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{v_2J_0(a\alpha_n)-v_1J_0(b\alpha_n)\}J_0(a\alpha_n)U_0(r\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n)-J_0^2(b\alpha_n)}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}+\frac{v_1\ln(b/r)+v_2\ln(r/a)}{\ln(b/a)}. \tag{10.15}$$

Ряд других решений для полого цилиндра, выведенных рассмотренными выше методами, приводится в [50, 51]. При наличии теплообмена или других граничных условий на поверхностях подобные задачи можно рассматривать аналогичным образом, используя соответствующие обобщения цилиндрической функции $U_0(\alpha r)$; однако эти задачи, вероятно, лучше рассматривать методом преобразований Лапласа, что и будет сделано в § 4 гл. XIII.

§ 11. Неограниченный цилиндр. Установившаяся температура. Общий случай

I. *Установившаяся температура в цилиндре* $0\leqslant r<a$. *Температура поверхности* $F(\theta, z)$.

Разложим $F(\theta, z)$ в ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{\varphi_n(z)\cos n\theta+\psi_n(z)\sin n\theta\}. \tag{11.1}$$

Запишем теперь интегралы Фурье для $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n(z)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(\beta)\cos\alpha(\beta-z)\,d\beta,\\ \psi_n(z)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(\beta)\cos\alpha(\beta-z)\,d\beta.\end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Тогда, поскольку выражения

$$I_n(\alpha r)\cos\alpha(\beta-z)\cos n\theta \quad \text{и} \quad I_n(\alpha r)\cos\alpha(\beta-z)\sin n\theta$$

(где $I_n(z)$ определено в приложении 3) представляют собой решения уравнения Лапласа в цилиндрических координатах, конечные при $r=0$, решение нашей задачи имеет вид

$$v=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{I_n(\alpha r)}{I_n(\alpha a)}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\{\varphi_n(\beta)\cos n\theta+\psi_n(\beta)\sin n\theta\}\cos\alpha(\beta-z)\,d\beta,$$

или

$$v=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi_n(\beta)\cos n\theta+\psi_n(\beta)\sin n\theta\}d\beta\int_0^{\infty}\frac{I_n(\alpha r)}{I_n(\alpha a)}\cos\alpha(\beta-z)\,d\alpha. \tag{11.3}$$

Здесь предполагается, что порядок интегрирования можно изменить.

Чтобы оценить второй интеграл в (11.3), рассмотрим интеграл

$$\int\frac{J_n(\alpha r)}{J_n(\alpha a)}e^{-\alpha(\beta-z)}\,d\alpha, \tag{11.4}$$

взятый по контуру, содержащему при $\beta > z$ мнимую ось и большую полуокружность в правой полуплоскости. Подынтегральное выражение имеет полюсы в точках α_s ($s = 1, 2, \ldots$), служащих положительными корнями уравнения

$$J_n(a\alpha) = 0.$$

Определяя вычеты в этих полюсах, мы получим окончательно

$$\int_0^\infty \cos\alpha(\beta - z)\frac{I_n(\alpha r)}{I_n(\alpha a)}\,d\alpha = -\frac{\pi}{a}\sum_{s=1}^\infty e^{-\alpha_s|\beta - z|}\frac{J_n(r\alpha_s)}{J_n'(a\alpha_s)}. \tag{11.5}$$

Таким образом, из (3) следует

$$v = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^\infty\sum_{s=1}^\infty\frac{J_n(r\alpha_s)}{J_n'(a\alpha_s)}\int_{-\infty}^\infty\{\varphi_n(\beta)\cos n\theta + \psi_n(\beta)\sin n\theta\}\,e^{-\alpha_s|\beta - z|}\,d\beta. \tag{11.6}$$

Если температура поверхности является функцией только z, например имеет вид $f(z)$, то решение принимает вид

$$v = \frac{1}{a}\sum_{s=1}^\infty\frac{J_0(r\alpha_s)}{J_1(a\alpha_s)}\int_0^\infty e^{-u\alpha_s}\{f(z+u) + f(z-u)\}\,du, \tag{11.7}$$

где α_s служат положительными корнями уравнения

$$J_0(a\alpha) = 0.$$

Например, если

$$f(z) = 1, \quad z > 0,$$
$$f(z) = 0, \quad z < 0,$$

то из (11.7) следует, что

$$\left.\begin{aligned} v &= 1 - \frac{1}{a}\sum_{s=1}^\infty\frac{J_0(r\alpha_s)}{\alpha_s J_1(a\alpha_s)}e^{-\alpha_s z}, \quad z > 0,\\ v &= \frac{1}{a}\sum_{s=1}^\infty\frac{J_0(r\alpha_s)}{\alpha_s J_1(a\alpha_s)}e^{\alpha_s z}, \quad z < 0,\end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

где мы использовали соотношение

$$\frac{2}{a}\sum_{s=1}^\infty\frac{J_0(r\alpha_s)}{\alpha_s J_1(a\alpha_s)} = 1, \tag{11.9}$$

которое можно получить, положив $t = 0$ в соотношении (6.5) данной главы.

Соотношение (11.8) можно также получить непосредственно при помощи метода, используемого ниже.

II. *Установившаяся температура в цилиндре $0 \leqslant r < a$, движущемся со скоростью U в направлении своей оси. При $z < 0$ температура поверхности равна единице; при $z > 0$ она равна нулю.*

В этом случае, как и в § 7 гл. I, дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{U}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \tag{11.10}$$

Если мы ищем решение (11.10) вида

$$J_0(\alpha r)\,u(z),$$

то u должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{U}{\varkappa}\frac{du}{dz} - \alpha^2 u = 0.$$

Таким образом, если $\pm\alpha_s$ — корни уравнения

$$J_0(a\alpha)=0,$$

то

$$\left.\begin{aligned} v&=1+\sum_{s=1}^{\infty} a_s J_0(r\alpha_s)\exp\left[z\left(k+\sqrt{k^2+\alpha_s^2}\right)\right], \quad z<0,\\ \text{и}\quad v&=\sum_{s=1}^{\infty} b_s J_0(r\alpha_s)\exp\left[z\left(k-\sqrt{k^2+\alpha_s^2}\right)\right], \quad z<0 \end{aligned}\right\} \qquad (11.11)$$

(где k обозначает $U/2\varkappa$) удовлетворяют нашему дифференциальному уравнению и граничным условиям. Для нахождения значений a_s и b_s следует воспользоваться условием, требующим непрерывности v и $\frac{\partial v}{\partial z}$ при $z=0$. Используя (11.9), мы находим, что из условия непрерывности следует

$$a_s+\frac{2}{a\alpha_s J_1(a\alpha_s)}=b_s$$

и

$$\left[k+\sqrt{k^2+\alpha_s^2}\right]a_s=\left[k-\sqrt{k^2+\alpha_s^2}\right]b_s.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$v=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left[k-\sqrt{k^2+\alpha_s^2}\right]J_0(r\alpha_s)}{a\alpha_s J_0(a\alpha_s)\sqrt{k^2+\alpha_s^2}}\exp\left[z\left(k+\sqrt{k^2+\alpha_s^2}\right)\right], \qquad z<0,$$

$$v=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_s)\left[k+\sqrt{k^2+\alpha_s^2}\right]}{a\alpha_s J_1(a\alpha_s)\sqrt{k^2+\alpha_s^2}}\exp\left[z\left(k-\sqrt{k^2+\alpha_s^2}\right)\right], \qquad z>0.$$

При рассмотрении ряда задач этого типа [52, 53] был использован метод, описанный выше, а также метод движущихся источников тепла (ср. гл. X).

§ 12. Неограниченный цилиндр. Неустановившаяся температура. Общий случай

В данном параграфе рассматривается ряд задач для неограниченного цилиндра, в котором поток не радиален. При этом используются разобранные выше методы, а также интегралы, приведенные в § 5 настоящей главы.

I. *Температура поверхности $r=a$ равна нулю. Начальная температура $v=f(r,\theta)$.*

В данном случае уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right),$$

а выражение $e^{-\varkappa\alpha^2 t}J_n(\alpha r)(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$ удовлетворяет этому уравнению. Здесь n принимает целые значения, так как температура является периодической функцией от θ с периодом 2π.

Разложим функцию $f(r,\theta)$ в ряд Фурье

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\cos n\theta\,d\theta \qquad (n\geqslant 1),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

и

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\, d\theta.$$

Коэффициенты a_n, b_n и a_0 являются функциями от r. Разложим каждый из них в ряд функций Бесселя n-го порядка

$$a_n=\sum_{s=1}^{\infty} A_{n, s} J_n(\alpha_s r),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$J_n(\alpha a)=0.$$

Эти корни представлены в виде таблиц для n от 0 до 5 в книге [24].

Тогда мы можем написать

$$A_{0, s}=\frac{1}{\pi a^2\left\{J_0'\left(\alpha_s a\right)\right\}^2}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) J_0(\alpha_s r)\, r\, dr\, d\theta,$$

$$A_{n, s}=\frac{2}{\pi a^2\left\{J_n'\left(\alpha_s a\right)\right\}^2}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\cos n\theta J_n(\alpha_s r)\, r\, dr\, d\theta$$

и

$$B_{n, s}=\frac{2}{\pi a^2\left\{J_n'\left(\alpha_s a\right)\right\}^2}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\sin n\theta J_n(\alpha_s r)\, r\, dr\, d\theta.$$

Таким образом, мы получим наше решение в виде

$$v=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n, s}\cos n\theta+B_{n, s}\sin n\theta) J_n(\alpha_s r)\, e^{-\varkappa\alpha_s^2 t}. \qquad (12.1)$$

II. *Теплообмен на поверхности $r=a$ со средой нулевой температуры. Начальная температура $v=f(r, \theta)$.*

Разложим в ряд Фурье функцию $f(r, \theta)$, как и в задаче I,

$$f(r, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

Коэффициенты a_n и b_n являются функциями r. Разложим каждый из них в ряд функций Бесселя n-го порядка

$$a_n=\sum_{s=1}^{\infty} A_{n, s} J_n(\alpha_s r),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\alpha J_n'(\alpha a)+hJ_n(\alpha a)=0.$$

Тогда получим

$$A_{0, s}=\frac{\alpha_s^2}{\pi a^2\left(\alpha_s^2+h^2\right)\left\{J_0\left(\alpha_s a\right)\right\}^2}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) J_0(\alpha_s r)\, r\, dr\, d\theta,$$

$$A_{n, s}=\frac{2\alpha_s^2}{\pi a^2\left(\alpha_s^2+h^2-n^2/a^2\right)\left\{J_n\left(\alpha_s a\right)\right\}^2}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\cos n\theta J_n(\alpha_s r)\, r\, dr\, d\theta,$$

$$B_{n, s}=\frac{2\alpha_s^2}{\pi a^2\left(\alpha_s^2+h^2-n^2/a^2\right)\left\{J_n\left(\alpha_s a\right)\right\}^2}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\sin n\theta J_n(\alpha_s r)\, r\, dr\, d\theta$$

и

$$v = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n,s} \cos n\theta + B_{n,s} \sin n\theta) J_n(\alpha_s r) e^{-\varkappa \alpha_s^2 t}. \tag{12.2}$$

III. *Температура поверхности* $r = a$ *равна нулю. Начальная температура* $v = f(r, \theta, z)$.

В данном случае имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

и выражение

$$e^{-\varkappa(\alpha^2+\mu^2)t} J_n(\mu r) \frac{\cos}{\sin} n\theta \frac{\cos}{\sin} \alpha z$$

является частным интегралом.

Разложим теперь функцию $f(r, \theta, z)$ в ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Коэффициенты a_n и b_n являются функциями r и z. Обозначим эти функции через $F_n(r, z)$ и $G_n(r, z)$ и разложим их в ряд функций Бесселя, определяемых положительными корнями уравнения

$$J_n(\mu a) = 0.$$

Пусть, кроме того,

$$F_n(r, z) = \sum_{\mu} \varphi_n(z) J_n(\mu r),$$

$$G_n(r, z) = \sum_{\mu} \psi_n(z) J_n(\mu r).$$

Наконец, выразим функции $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ через интегралы Фурье

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\beta) \cos \alpha(\beta - z)\, d\beta,$$

$$\psi_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\beta) \cos \alpha(\beta - z)\, d\beta.$$

Тогда мы получим наше решение в виде

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu} \sum_{n=0} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\varkappa(\alpha^2 + \mu^2) t] J_n(\mu r) [\varphi_n(\beta) \cos n\theta + \\ + \psi_n(\beta) \sin n\theta] \cos \alpha(\beta - z)\, d\alpha\, d\beta, \tag{12.3}$$

где суммирование по μ производится по положительным корням уравнения

$$J_n(\mu a) = 0.$$

Изменяя порядок интегрирования в (12.3), окончательно получим

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi \varkappa t}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu}^{\infty} \exp[-\varkappa \mu^2 t] J_n(\mu r) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\beta - z)^2}{4\varkappa t}\right] \{\varphi_n(\beta) \cos n\theta + \\ + \psi_n(\beta) \sin n\theta\}\, d\beta. \tag{12.4}$$

IV. *Температура поверхности* $r = a$ *равна* $v = F(\theta, z)$. *Начальная температура* $v = f(r, \theta, z)$.

Как показано в § 14 гл. I и в § 11 гл. VII, этот случай приводится соответственно к примерам III и I, если положить $v = u + w$.

V. *Неограниченный цилиндр. Поверхность* $r = a$ *и плоскости* $\theta = 0$ *и* $\theta = \theta_0$ *поддерживаются при нулевой температуре. Начальная температура* $f(r, \theta)$.

В данном случае можно написать

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right).$$

Выражение

$$J_{m\pi/\theta_0}(\alpha r)\sin\frac{m\pi\theta}{\theta_0}e^{-\varkappa\alpha^2 t}$$

является частным интегралом этого уравнения.

Условия при $r=a$, $\theta=0$ и $\theta=\theta_0$ удовлетворяются в том случае, если m — положительное целое число, а α — корень уравнения

$$J_{m\pi/\theta_0}(\alpha a)=0.$$

Разложим функцию $f(r,\theta)$ в ряд по синусам

$$\sum_{1}^{\infty}a_m\sin\frac{m\pi\theta}{\theta_0},$$

где коэффициенты a_m являются функциями r, например $F_m(r)$.

Теперь разложим $F_m(r)$ в ряд функций Бесселя, определяемых положительными корнями уравнения

$$J_{m\pi/\theta_0}(\alpha a)=0.$$

Таким образом, мы получим решение нашей задачи в виде

$$v=\sum_{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}A_{\alpha,m}e^{-\varkappa\alpha^2 t}\sin\frac{m\pi\theta}{\theta_0}J_{m\pi/\theta_0}(\alpha r), \tag{12.5}$$

где, используя соотношение (5.2) данной главы,

$$A_{\alpha,m}=\frac{4}{a^2\theta_0\left\{J'_{m\pi/\theta_0}(\alpha a)\right\}^2}\int_0^a\int_0^{\theta_0}f(r,\theta)\sin\frac{m\pi\theta}{\theta_0}J_{m\pi/\theta_0}(\alpha r)\,r\,dr\,d\theta;$$

здесь суммирование по α производится по положительным корням уравнения

$$J_{m\pi/\theta_0}(\alpha a)=0.$$

Решение для клина со щеками $\theta=0$ и $\theta=\theta_0$ можно получить из написанного выше при $a\to\infty$. Если начальная температура равна постоянной *), то (12.5) принимает вид

$$v=\frac{8}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin s\theta\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_m^2 t}\frac{J_s(r\alpha_m)}{\left[J'_s(a\alpha_m)\right]^2}\int_0^a rJ_s(r\alpha_m)\,dr, \tag{12.6}$$

где

$$s=(2n+1)\pi/\theta_0 \quad \text{и} \quad \pm\alpha_m, \quad m=1,2,\ldots$$

служат корнями уравнения

$$J_s(a\alpha)=0. \tag{12.7}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Porter, Martin, Phil. Mag. **20**, 511 (1910).
2. Lamb, Wilson, Proc. Roy. Soc. **A65**, 285 (1899).
3. Niven, Proc. Roy. Soc. **A76**, 34 (1905).
4. Poole, Phil. Mag. **24**, 45 (1912); **27**, 58 (1914).
5. Bridgman, Proc. Am. Acad. Arts Sci. **57**, 80 (1922).

*) Некоторые численные результаты для данного случая приведены в [54]. Задача о полуограниченном цилиндре с этим поперечным сечением рассматривается в [55].

6. Strutt, Phil. Mag. **5**, 904—914 (1928).
7. Emmerich, J. Appl. Phys. **21**, 75—80 (1950).
8. Thorn, Simpson, J. Appl. Phys. **24**, 297—299 (1953).
9. Angell, Phys. Rev. **33**, 421 (1911).
10. Worthing, Phys. Rev. **4**, 536 (1914).
11. Langmuir, Phys. Rev. **7**, 151 (1916).
12. Powell, Schofield, Proc. Phys. Soc. **51**, 153 (1939).
13. Schleiermacher, Wied. Ann. **34**, 623 (1888); **36**, 346 (1899).
14. Kannuluik, Martin, Proc. Roy. Soc. **A141**, 144 (1933); **144**, 496 (1934).
15. Gregory, Archer, Proc. Roy. Soc. **A110**, 91 (1926); Phil. Mag. **3**, 931 (1927); **15**, 301 (1933).
16. Fischer, Ann. Physik **34**, 669 (1939).
17. Smoluchowski, Ann. Physik **64**, 101 (1898); **35**, 983 (1911).
18. Gregory, Proc. Roy. Soc. **A149**, 35 (1935).
19. Dahl, Trans. ASME **46**, 161—208 (1924).
20. Awbery, Phil. Mag. **28**, 447 (1939).
21. Van Gorcum, Appl. Sci. Res. **A2**, 272—280 (1951).
22. Vodička, Appl. Sci. Res. **A5**, 115—120, 268—272, 327—337 (1955).
23. McLachlan, Bessel Functions for Engineers, Oxford, 1934.
24. Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge, ed. 2, 1944 (Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.)
25. Gray, Mathews, Treatise on Bessel Functions, Macmillan, ed. 2, 1922. (Э. Грэй, Г. Мэттьюз, Функции Бесселя и их применение в физике и механике, ИЛ, М., 1953.)
26. Hobson, Proc. Lond. Math. Soc. **7**, 359—388 (1909).
27. Moore, Trans. Am. Math. Soc. **10**, 391—435 (1909); **12**, 181—206 (1911); **21**, 107—156 (1920).
28. Young, Proc. Lond. Math. Soc. **18**, 163—200 (1920).
29. Dini, Serie di Fourier, 1880, pp. 246—269.
30. Ford, Studies in Divergent Series and Summability, 1916, Chap. V.
31. Goodwin, Staton, Quart. J. Mech. Appl. Math. **1**, 220—224 (1948).
32. Jaeger, Proc. Phys. Soc. **56**, 197 (1944).
33. Macey, Proc. Phys. Soc. **54**, 128 (1942).
34. Olson, Schultz, Ing. Eng. Chem. **34**, 874—877 (1942).
35. Gurney, Lurie, Ind. Eng. Chem. **15**, 1170 (1923).
36. Schack, Stahl u. Eisen **50**, 1290 (1930).
37. Newman, Trans. Am. Inst. Chem. Engrs **27**, 203 (1931), Ind. Eng. Chem. **28**, 545—548 (1936).
38. Heisler, Trans. ASME **69**, 227—237 (1947).
39. Vasileff, J. Appl. Phys. **23**, 979—983 (1952).
40. Gröber, Z. Ver. dtsch. Ing. **70**, 1266 (1926).
41. Macey, Proc. Phys. Soc. **52**, 625 (1940); **54**, 128 (1942).
42. Awbery, Proc. Phys. Soc. **55**, 202 (1943).
43. Jaeger, Proc. Phys. Soc. **56**, 197 (1944).
44. Newman, Church, J. Appl. Mech. **2**, **A** — 96 (1935).
45. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, Macmillan, ed. 2, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1947.)
46. Thews, Acta Biotheoretica **A10**, 105—138 (1953).
47. Kalähne, Z. Math. Phys. **54**, 55 (1907).
48. Jahnke — Emde, Funktionen Tafeln, Teubner, ed. 3, 1933. (Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, изд. 3-е, Физматгиз, 1959.)
49. Lowan, Hillman, J. Math. Phys. **22**, 208 (1943).
50. Muskat, Flow of Homogeneous Fluids, McGraw-Hill, 1937.
51. Muskat, J. Appl. Phys. **5**, 71 (1934).
52. Wilson, Proc. Camb. Phil. Soc. **12**, 406 (1904).
53. Owen, Proc. Lond. Math. Soc. **23**, 238 (1925).
54. Jaeger, Phil. Mag. **33**, 527 (1942).
55. Craggs, Phil. Mag. **36**, 220 (1945).
56. Jakob, Trans. ASME **65**, 593—605 (1943).
57. Jakob, Trans. ASME **70**, 25—30 (1948).

ГЛАВА VIII

ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В ОБЛАСТЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ КООРДИНАТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

§ 1. Введение

В настоящей главе мы исследуем ряд задач по теплопроводности для областей, ограниченных координатными поверхностями цилиндрической системы координат, например ограниченный и полуограниченный цилиндры, ограниченные полые цилиндры и т. д. Для этого используем методы, изложенные в предыдущих главах. Задачи этого типа для областей, ограниченных изнутри цилиндром кругового сечения, можно рассматривать тем же способом, используя решения, приведенные в § 5 гл. XIII.

Кроме того, задачи по теплопроводности цилиндрических областей решаются в §§ 10—15 гл. XIV при помощи функций Грина, а в § 11 гл. XV— при помощи преобразования Лапласа.

§ 2. Установившееся распределение температур в неограниченной и полуограниченной среде, обусловленное подводом тепла через круг

Предположим, что через круг радиуса r (где $0 \leqslant r < a$), расположенный в плоскости $z=0$, подводится тепло, количество которого в единицу времени зависит только от r.

Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0 \tag{2.1}$$

удовлетворяется

$$e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)$$

для любого λ. Таким образом,

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)f(\lambda)\,d\lambda \tag{2.2}$$

служит решением нашей задачи, если функцию $f(\lambda)$ можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла заданным условиям в плоскости $z=0$. Для этой цели можно применить интегральную теорему Неймана (см. [1] гл. XIV); однако два наиболее интересных случая описываются хорошо известными интегралами,

содержащими функции Бесселя [см. [1], § 13.42 и [2]):

$$\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\sin\lambda a\,\frac{d\lambda}{\lambda}=\begin{cases}\arcsin\dfrac{a}{r}, & r>a,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\pi, & r\leqslant a;\end{cases} \tag{2.3}$$

$$\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)J_1(\lambda a)\,d\lambda=\begin{cases}0, & r>a,\\ 1/(2a), & r=a,\\ 1/a, & r<a.\end{cases} \tag{2.4}$$

Рассмотрим теперь задачу, в которой *круговой диск* $0\leqslant r<a$, *лежащий в плоскости* $z=0$, *поддерживается при температуре, равной* V. Здесь мы выбираем $f(\lambda)$ в (2.2) равной $[(2V/\pi)\sin\lambda a]/\lambda$. Тогда

$$v=\frac{2V}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)\sin\lambda a\,\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{2.5}$$

представляет собой решение нашей задачи. Согласно (2.3) это выражение равно V для $z=0$ и $r\leqslant a$. Оно служит решением задачи и для области $z>0$, когда круг $0\leqslant r<a$, расположенный в плоскости $z=0$, поддерживается при температуре V, а тепловой поток через остальную часть плоскости $z=0$ отсутствует.

Если количество тепла, подводимое к неограниченному твердому телу в единицу времени через единицу площади круга радиуса a, *лежащего в плоскости* $z=0$ (например, плоского круглого нагревательного элемента), *равно постоянной величине* Q, то условие, которое должно удовлетворяться в плоскости $z=0$, имеет вид

$$-2K\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=+0}=\begin{Bmatrix}Q, & 0<r<a,\\ 0, & r>a\end{Bmatrix}. \tag{2.6}$$

Таким образом, используя (2.2) и (2.4), мы получим решение в виде

$$v=\frac{Qa}{2K}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)J_1(\lambda a)\,\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{2.7}$$

Его можно применить к важной задаче полуограниченного твердого тела $z>0$ при различных условиях на поверхности последнего *). Задачи аналогичного типа в случае неустановившегося состояния разобраны в § 5 гл. X.

I. *Температура области* $z>0$ *постоянна и равна* V *при* $0<r<a$, $z=0$; *вне этого круга тепловой поток отсутствует.*

Из (2.5) имеем

$$v=\frac{2V}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\sin\lambda a\,\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{2.8}$$

или

$$v=\frac{2V}{\pi}\arcsin\left\{\frac{2a}{[(r-a)^2+z^2]^{1/2}+[(r+a)^2+z^2]^{1/2}}\right\}, \tag{2.9}$$

*) Для других задач подобного типа см. [3, 4].

Тепловой поток F через круг $0 < r < a$ равен

$$F = -2\pi K \int_0^\infty \left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z=0} r\,dr = 4KVa \int_0^\infty J_1(\lambda a) \sin \lambda a \frac{d\lambda}{\lambda} = 4KVa. \quad (2.10)$$

При этом для вычисления интеграла используется цитированная выше работа (см. [1]). Величину $R = V/F$ можно считать термическим сопротивлением в случае установившегося потока через круг радиуса a в полупространство. Из (2.10) следует, что

$$R = \frac{V}{F} = \frac{1}{4Ka}. \quad (2.11)$$

II. *Области $z > 0$ и $z < 0$ с коэффициентами теплопроводности, равными соответственно K_1 и K_2, и температурами на больших расстояниях от начала координат, равными соответственно 0 и V. Установившийся тепловой поток проходит через круг радиуса a, расположенный в плоскости $z = 0$. Остальная часть плоскости непроницаема для тепла.*

Температуры v_1 и v_2 в областях $z > 0$ и $z < 0$ находят, как и в примере I; они равны соответственно

$$v_1 = \frac{2K_2 V}{\pi (K_1 + K_2)} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \sin \lambda a \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (2.12)$$

$$v_2 = V - \frac{2K_1 V}{\pi (K_1 + K_2)} \int_0^\infty e^{\lambda z} J_0(\lambda r) \sin \lambda a \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (2.13)$$

Эти выражения можно упростить, как и (2.8) и (2.9). Термическое сопротивление равно $(K_1 + K_2)/4aK_1K_2$.

III. *Область $z > 0$ с постоянным тепловым потоком Q через круг $r < a$, $z = 0$ и нулевым потоком через $r > a$.*

Воспользовавшись (2.7), получим следующее выражение для искомой температуры:

$$v = \frac{Qa}{K} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (2.14)$$

Средняя температура $v_{ср}$ области $0 < r < a$ равна [1]

$$v_{ср} = \frac{2Q}{K} \int_0^\infty J_1^2(\lambda a) \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{8Qa}{3\pi K}. \quad (2.15)$$

Так как величина теплового потока через круг радиуса a равна $F = \pi a^2 Q$, то из (2.15) следует, что

$$\frac{v_{ср}}{F} = \frac{8}{3\pi^2 Ka}. \quad (2.16)$$

Неустановившееся состояние и соответствующая задача для случая нагрева полосы рассматриваются в § 5 гл. X.

IV. *Область* $z > 0$ *с постоянным тепловым потоком* Q *через круг* $0 < r < a$, $z = 0$ *и нулевой температурой* [5] *) *в области* $r > a$.

$$v = \frac{2Q}{K\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda z) \{\sin \lambda a - \lambda a \cos \lambda a\} \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \tag{2.17}$$

V. *Термическое сопротивление при переходе в полупространство.* Когда тепло или электричество течет через круг радиуса a в полупространство, часто важно знать установившееся термическое (поверхностное) или электрическое сопротивление в полупространстве **). Простейшее приближение, которое часто используется для малых кругов, заключается в замене круга полусферой радиуса a (иными словами, вещество считается идеальным проводником); при этом поток оказывается радиальным. Тогда, учитывая (2.14) гл. IX, мы находим, что термическое сопротивление R, определяемое как V/F (где V — температура контакта и F — поток через него), равно

$$R = \frac{V}{F} = \frac{1}{2\pi K a}. \tag{2.18}$$

Точное значение R в (2.11) в случае, когда круг поддерживается при постоянной температуре, в $\frac{1}{2}\pi$ раз больше значения R в уравнении (2.18), что указывает на важность учета области, находящейся вблизи начала координат.

В задачах, представляющих практический интерес, тепло или электричество обычно подводится в полупространство через провод, и в этом случае граничное условие постоянства температуры, предполагаемое в примере I, оказывается недостаточно точным; действительно, можно считать, что постоянство потока, как в примере II, является допустимой идеализацией, поэтому, сравнивая коэффициент 0,25 в уравнении (2.11) и коэффициент $8/3\pi^2 = 0{,}27$ в уравнении (2.16), мы можем получить представление о том, как велика ошибка в найденных нами величинах сопротивления.

§ 3. Установившаяся температура в ограниченном и полуограниченном цилиндрах

В настоящем параграфе мы приведем ряд простых решений для случая установившегося потока тепла в ограниченном и полуограниченном цилиндрах. Путем комбинации решений приведенных выше задач можно получить решения ряда многих других задач. Например, используя решения задач, приведенные в примерах III и IV предыдущего параграфа, можно решить задачу для ограниченного цилиндра с заданным распределением температур на всех его поверхностях; приняв $h = 0$ в решениях задач с граничными условиями, учитывающими теплообмен, можно решить различные задачи, в которых отсутствует тепловой поток через некоторые границы; считая, что в примерах IV и V функция $f(z)$ симметрична относительно $^1/_2\, l$, можно решить две другие задачи для цилиндра при отсутствии потока через одну из плоских поверхностей; наконец, считая, что в примере V $f(z)$ антисимметрична относительно $^1/_2\, l$, получим решение для цилиндра с нулевой температурой

*) Следует отметить, что граничные условия в плоскости $z = 0$ являются «смешанными», т. е. задан тепловой поток через часть этой плоскости и задана температура для остальной ее части. Для таких задач применима теория двойных интегральных уравнений (ср. [6]). Соответствующая задача для неограниченной полосы $|x| < a$ вместо круга рассматривается в работе [7].

**) Для случая потока в ограниченной области см. [2], гл. XII.

на одной плоской поверхности и теплообменом на другой. Рассматривая совокупность всех этих решений, мы получим все возможные комбинации граничных условий для ограниченного круглого цилиндра. Аналогичным образом из найденных данных можно получить много других решений для конечного полого цилиндра. Столь же легко найти решения задач для важных случаев неодинаковых коэффициентов теплопроводности в направлениях r и z, а также для различных коэффициентов теплопроводности на разных поверхностях. Однако полученные результаты оказываются несколько сложнее. Наконец, следует отметить, что во многих частных задачах, в которых рассматривается теплообмен, решения часто удается представить в более простом виде через корни (10.6) и (10.7) гл. III, чем через корни (9.5) этой главы, как было сделано здесь.

I. *Конечный цилиндр* $0 \leqslant r < a$, $0 < z < l$. *Поверхность* $z = 0$ *поддерживается при заданной температуре* $f(r)$, поверхность $z = l$ — при нулевой температуре. *Теплообмен происходит при* $r = a$ *со средой нулевой температуры.*

В этом случае v должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \qquad 0 \leqslant r < a, \qquad 0 < z < l, \tag{3.1}$$

при условиях

$$v = 0, \qquad z = l, \qquad 0 \leqslant r < a. \tag{3.2}$$

$$v = f(r), \qquad z = 0, \qquad 0 \leqslant r < a, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + hv = 0, \qquad 0 < z < l, \qquad r = a. \tag{3.4}$$

Функция *)

$$J_0(\alpha r)\,\mathrm{sh}\,\alpha(l - z) \tag{3.5}$$

удовлетворяет (3.1) и (3.2) при всех значениях α. Она удовлетворяет также (3.4), если α служит корнем уравнения

$$\alpha J_0'(\alpha a) + hJ_0(\alpha a) = 0. \tag{3.6}$$

Как и в § 7 гл. VII, мы предполагаем, что $f(r)$ можно разложить в ряд

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(r\alpha_n), \tag{3.7}$$

где α_n — положительные корни (3.6), а

$$A_n = \frac{2\alpha_n^2}{a^2\left(h^2 + \alpha_n^2\right) J_0^2(a\alpha_n)} \int_0^a r f(r)\, J_0(r\alpha_n)\, dr. \tag{3.8}$$

Таким образом, решение нашей задачи имеет вид

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_0(r\alpha_n)\,\mathrm{sh}\,(l - z)\alpha_n}{\mathrm{sh}\, l\alpha_n}. \tag{3.9}$$

---

*) Уравнению (3.1) удовлетворяют *либо* произведения функций Бесселя на экспоненциальные функции, *либо* произведения функций Бесселя от мнимого аргумента на тригонометрические функции. Мы выберем первое из упомянутых решений, когда температура задана как произвольная функция на плоской границе, и второе решение, когда она задана на окружности.

Если $f(r)$ равно постоянной величине V, то, используя соотношение (5.5) предыдущей главы, находим

$$\frac{v}{V}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2hJ_0(r\alpha_n)\operatorname{sh}(l-z)\alpha_n}{a(h^2+\alpha_n^2)J_0(a\alpha_n)\operatorname{sh}l\alpha_n}. \tag{3.10}$$

Установившаяся температура используется в этом случае для измерения коэффициента теплопроводности [8].

Из (3.10) находим тепловой поток, поступающий в цилиндр через поверхность $z=0$, в виде

$$-2\pi K\int_0^a r\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z=0}dr=4\pi Kh^2V\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth}l\alpha_n}{\alpha_n(h^2+\alpha_n^2)}. \tag{3.11}$$

Аналогичным образом, тепловой поток, «вытекающий» из цилиндра через поверхность $z=l$, равен

$$4\pi Kh^2V\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cosech}l\alpha_n}{\alpha_n(h^2+\alpha_n^2)}. \tag{3.12}$$

Эти решения представляют собой обобщение решений для случая тонкой проволоки, рассмотренного в § 5 гл. IV. Их можно использовать при рассмотрении влияния проволоки конечной толщины.

II. *Конечный цилиндр $0\leqslant r<a$, $0<z<l$. Поверхность $z=0$ поддерживается при заданной температуре $f(r)$. На других поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(r\alpha_n)\frac{\alpha_n\operatorname{ch}\alpha_n(l-z)+h\operatorname{sh}\alpha_n(l-z)}{\alpha_n\operatorname{ch}\alpha_nl+h\operatorname{sh}\alpha_nl}, \tag{3.13}$$

где α_n и A определяются из (3.6) и (3.8). В работе [8] приводятся некоторые численные результаты.

III. *Конечный цилиндр $0\leqslant r<a$, $0<z<l$. Поверхность $z=0$ поддерживается при заданной температуре $f(r)$, другие поверхности — при нулевой температуре.*

$$v=\frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_n)\operatorname{sh}(l-z)\alpha_n}{J_1^2(a\alpha_n)\operatorname{sh}l\alpha_n}\int_0^a rf(r)J_0(r\alpha_n)\,dr, \tag{3.14}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$J_0(a\alpha_n)=0. \tag{3.15}$$

IV. *Конечный цилиндр $0\leqslant r<a$, $0<z<l$. Поверхность $r=a$ поддерживается при заданной температуре $f(z)$, другие поверхности — при нулевой температуре.*

$$v=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_0(n\pi r/l)}{I_0(n\pi a/l)}\sin\frac{n\pi z}{l}\int_0^l f(z')\sin\frac{n\pi z'}{l}\,dz'. \tag{3.16}$$

V. *Конечный цилиндр $0\leqslant r<a, 0<z<l$. Поверхность $r=a$ поддерживается при заданной температуре $f(z)$, на других поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

$$v=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_0(\alpha_nr)\{\alpha_n\cos\alpha_nz+h\sin\alpha_nz\}}{I_0(\alpha_na)\{(\alpha_n^2+h^2)l+2h\}}\int_0^l f(z')\{\alpha_n\cos\alpha_nz'+h\sin\alpha_nz'\}\,dz', \tag{3.17}$$

где α_n — положительные корни (ср. § 9 гл. III) уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha l = \frac{2\alpha h}{\alpha^2 - h^2}. \tag{3.18}$$

VI. *Конечный цилиндр* $0 \leqslant r < a$, $-l < z < l$. *На поверхностях* $z = \pm l$ *тепловой поток отсутствует. Количество тепла (в единицу времени), равное* Q, *подводится к одному основанию боковой поверхности с помощью тонкого кольца шириной* b *и отводится тем же способом от другого основания. Тепловой поток через остальную часть криволинейной поверхности отсутствует* *).

В данном случае граничное условие при $r = a$ имеет вид

$$-K \frac{\partial v}{\partial r} = f(z), \qquad r = a, \qquad -l < z < l,$$

где

$$\begin{aligned} f(z) &= -Q, & l > z > l - b, \\ f(z) &= 0, & l - b > z > -l + b, \\ f(z) &= Q, & -l + b > z > -l. \end{aligned}$$

Здесь $f(z)$ — нечетная функция, которую можно разложить в ряд

$$f(z) = -\frac{4Q}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi b}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l}.$$

Следовательно,

$$v = \frac{8Ql}{K\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{I_0[(2n+1)\pi r/2l]}{I_1[(2n+1)\pi a/2l]} \sin \frac{(2n+1)\pi b}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l}. \tag{3.19}$$

VII. *Конечный полый цилиндр* $a < r < b$, $0 < z < l$. *Поверхность* $r = a$ *поддерживается при* $f(z)$, *другие поверхности — при нулевой температуре.*

$$v = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0(n\pi r/l;\ n\pi b/l)}{F_1(n\pi a/l;\ n\pi b/l)} \sin \frac{n\pi z}{l} \int_0^l f(z') \sin \frac{n\pi z'}{l}\, dz', \tag{3.20}$$

где

$$F_0(x;\ y) = I_0(x) K_0(y) - K_0(x) I_0(y). \tag{3.21}$$

VIII. *Конечный полый цилиндр* $a < r < b$, $0 < z < l$. *На поверхности* $r = a$ *тепловой поток внутрь твердого тела является заданной функцией* $f(z)$. *Другие поверхности поддерживаются при нулевой температуре.*

$$v = -\frac{2}{K\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0(n\pi r/l;\ n\pi b/l)}{nF_1(n\pi a/l;\ n\pi b/l)} \sin \frac{n\pi z}{l} \int_0^l f(z') \sin \frac{n\pi z'}{l}\, dz', \tag{3.22}$$

где F_0 определяется соотношением (3.21), а

$$F_1(x;\ y) = I_1(x) K_0(y) + K_1(x) I_0(y). \tag{3.23}$$

Если **)

$$\begin{aligned} f(z) &= Q \quad \text{при} \quad L < z < l - L \\ f(z) &= 0 \quad \text{при} \quad 0 < z < L \text{ и } l - L < z < l, \end{aligned}$$

то правая часть (3.22) принимает вид

$$-\frac{4Ql}{K\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_0[(2m+1)\pi r/l;\ (2m+1)\pi b/l]}{(2m+1)^2 F_1[(2m+1)\pi a/l;\ (2m+1)\pi b/l]} \cos \frac{(2m+1)\pi L}{l} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{l}. \tag{3.24}$$

*) Эта задача совпадает с задачей о конечном стержне, часть поверхности которого шириной b нагревается на одном конце нагревательной катушкой и охлаждается с противоположного конца [9].

**) Эти условия служат грубым приближением к условиям, характерным для трубчатой печи.

IX. *В области* $-l < z < l$, $a < r < b$ *(полый цилиндр) находится среда с коэффициентом теплопроводности* K_1. *Поверхности* $r = b$ *и* $z = \pm l$ *поддерживаются при нулевой температуре. Область* $r < a$ *занята проволокой с коэффициентом теплопроводности* K, *которая нагревается электрическим током*).*

Предположим, что температура проволоки постоянна по всему ее поперечному сечению и при $r = a$ между проволокой и окружающей ее средой нет разрыва в температуре.

Если v — температура среды в полом цилиндре, то мы должны решить уравнение (3.1) для области при $v = 0$ на поверхности $r = b$ и на поверхностях $z = \pm l$. В данном случае решение будет иметь вид

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} F_0\left[\frac{(2n+1)\pi r}{2l};\ \frac{(2n+1)\pi b}{2l}\right], \tag{3.25}$$

где F_0 определяется (3.21) и a_n — постоянные, определяемые из граничного условия при $r = a$. Наше решение получено из уравнения (10.4) гл. IV для температуры проволоки при $U = s = 0$, причем величина $Hp(v - v_0)$, которая в этом уравнении представляла потерю тепла проволокой в окружающую среду, заменена величиной

$$-2\pi a K_1 \left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]_{r=a}.$$

Отсюда мы получим для граничного условия при $r = a$ соотношение

$$K\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2K_1}{a}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\alpha j I^2}{\omega^2 \sigma_0} v + \frac{j I^2}{\omega^2 \sigma_0} = 0, \qquad r = a, \qquad -l < z < l. \tag{3.26}$$

Подставляя (3.25) в (3.26), находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\left\{\left[\frac{\alpha j I^2}{\omega^2\sigma_0} - \frac{K(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}\right] F_0\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l};\ \frac{(2n+1)\pi b}{2l}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{K_1(2n+1)\pi}{al} F_1\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l};\ \frac{(2n+1)\pi b}{2l}\right]\right\} = -\frac{jI^2}{\omega^2\sigma_0} =$$
$$= -\frac{4jI^2}{\omega^2\sigma_0\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l}, \tag{3.27}$$

где F_0 и F_1 определяются из (3.21) и (3.23). Из уравнения (3.27) получаем a_n для всех n. Решение (3.25) является полным.

X. *Конечный полый цилиндр* $a < r < b$, $0 < z < l$. *Поверхность* $z = 0$ *поддерживается при* $f(r)$, *другие поверхности — при нулевой температуре.*

$$v = \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2 J_0^2(a\alpha_n)\, U_0(r\alpha_n)\,\mathrm{sh}\,(l-z)\,\alpha_n}{\left[J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)\right]\mathrm{sh}\, l\alpha_n}\int_a^b r f(r)\, U_0(r\alpha_n)\, dr, \tag{3.28}$$

где $U_0(\alpha r)$ определяется (10.2) гл. VII, а α_n — положительные корни уравнения $U_0(\alpha a) = 0$.

XI. *Конечный полый цилиндр* $a < r < b$, $0 < z < l$. *Поверхность* $r = a$ *поддерживается при температуре* $f(r)$. *На других поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры**).*

$$v = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha_n \cos\alpha_n z + h\sin\alpha_n z)\,\varphi(r;\ n)}{\left[\left(\alpha_n^2 + h^2\right) l + 2h\right]\varphi(a;\ n)}\int_0^l f(z)(\alpha_n\cos\alpha_n z + h\sin\alpha_n z)\, dz, \tag{3.29}$$

---

*) Ниже приводится законченная теория экспериментального метода, рассмотренного приближенно в примере VI § 2 предыдущей главы.

**) Эта задача совпадает с задачей об установившемся потоке тепла в цилиндрическом охлаждающем ребре (ср. § 6 гл. IV).

где α_n — положительные корни (3.18), а

$$\varphi(r;\ n) = I_0(r\alpha_n)[\alpha_n K_1(b\alpha_n) - hK_0(b\alpha_n)] + K_0(r\alpha_n)[\alpha_n I_1(b\alpha_n) + hI_0(b\alpha_n)]. \qquad (3.30)$$

XII. *Полуограниченный цилиндр $0 \leqslant r < a$, $z > 0$. Поверхность $z = 0$ поддерживается при заданной температуре $f(r)$, а поверхность $r = a$ — при нулевой температуре*

$$v = \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1^2(a\alpha_n)}e^{-\alpha_n z}\int_0^a rf(r)J_0(r\alpha_n)\,dr, \qquad (3.31)$$

где α_n — положительные корни (3.15).

XIII. *Полуограниченный цилиндр $0 \leqslant r < a$, $z > 0$. Поверхность $r = a$ поддерживается при заданной температуре $f(z)$, а поверхность $z = 0$ — при нулевой температуре.*

$$v = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1(a\alpha_n)}\int_0^{\infty} f(\beta)\left\{e^{-\alpha_n|\beta - z|} - e^{-\alpha_n(\beta + z)}\right\}d\beta, \qquad (3.32)$$

где α_n — положительные корни (3.15).

XIV. *Полуограниченный цилиндр $0 \leqslant r < a$, $z > 0$. Поверхность $z = 0$ поддерживается при заданной температуре $f(r)$, а на поверхности $r = a$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

$$v = \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2 J_0(r\alpha_n)}{(h^2 + \alpha_n^2)J_0^2(a\alpha_n)}e^{-\alpha_n z}\int_0^a rf(r)J_0(r\alpha_n)\,dr, \qquad (3.33)$$

где α_n — положительные корни (3.6).

Когда a мало, то корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ быстро возрастают, и поэтому в выражении для v мы можем ограничиться первым членом разложения. Далее, если величиной $\alpha_1^2 a^2$ можно пренебречь, то $J_0(a\alpha_1) = 1$ и $J_0'(a\alpha_1) = -{}^1/_2\, a\alpha_1$.

Тогда из (3.6) получим

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Необходимо отметить, что для справедливости наших рассуждений ah должно быть мало, и в этом приближении

$$v = Ve^{-z\sqrt{2h/a}},$$

где V — среднее значение температуры на поверхности $r = a$. Этот результат совпадает с решением, приведенным в § 3 гл. IV.

XV. *Полуограниченный цилиндр $0 \leqslant r < a$, $z > 0$. Поверхность $r = a$ поддерживается при заданной температуре $f(z)$, а на поверхности $z = 0$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

$$v = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1(a\alpha_n)}\int_0^{\infty}\left\{e^{-\alpha_n|z - z'|} + \frac{\alpha_n - h}{\alpha_n + h}e^{-\alpha_n(z + z')}\right\}f(z')\,dz', \qquad (3.34)$$

где α_n — положительные корни (3.15).

XVI. *Ограниченный цилиндр $0 \leqslant r < b$, $0 < z < l$. Потоки тепла через круг $0 \leqslant r < a$, $z = 0$ и через круг $0 \leqslant r < a$, $z = l$ одинаковы и равны постоянной величине F. Поток тепла через остальные поверхности отсутствует.*

Разность между средними температурами двух областей, через которые подводится и отводится тепло, равна следующей величине:

$$\frac{Fl}{K}\left\{1 - \frac{16}{\pi^2}\sum\frac{I_1(n\pi a/l)}{n^2 I_1(n\pi b/l)}\left[I_1\left(\frac{n\pi b}{l}\right)K_1\left(\frac{n\pi a}{l}\right) - K_1\left(\frac{n\pi b}{l}\right)I_1\left(\frac{n\pi a}{l}\right)\right]\right\}, \qquad (3.35)$$

где суммирование проводят по нечетным значениям n.

XVII. *Ограниченный цилиндр $0 < z < l$, $0 \leqslant r < a$. Количество тепла, выделяемое*) в единицу времени единицей объема, постоянно и равно A_0. Температура поверхности равна нулю.*

*) Задачи, в которых имеет место выделение тепла, встречаются при рассмотрении вопросов, связанных с нагреванием обмоток электромагнитных катушек [10, 11], а также в некоторых биологических проблемах [12].

В данном случае следует решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-\frac{A_0}{K}. \tag{3.36}$$

Частный интеграл этого уравнения, который обращается в нуль при $z=0$ и $z=l$, имеет вид

$$A_0 z(l-z)/2K. \tag{3.37}$$

Полное решение получается путем добавления к этому выражению решения уравнения (3.1), величина которого равна $\frac{-A_0 z(l-z)}{2K}$ при $r=a$ и нулю при $z=0$ и $z=l$. Последняя задача решена в примере IV, и окончательно получаем

$$v=\frac{A_0 z(l-z)}{2K}-\frac{4l^2 A_0}{K\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_0[(2n+1)\pi r/l]}{(2n+1)^3 I_0[(2n+1)\pi a/l]}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{l}. \tag{3.38}$$

XVIII. *Ограниченный полый цилиндр $0<z<l$, $a<r<b$. Тепловой поток через поверхность $r=a$ отсутствует. Поверхности $z=0$ и $z=l$ имеют нулевую температуру. На поверхности $r=b$ температура равна $f(z)$.*

$$v=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_1(n\pi a/l;\ n\pi r/l)}{F_1(n\pi a/l;\ n\pi b/l)}\sin\frac{n\pi z}{l}\int_0^l f(z')\sin\frac{n\pi z'}{l}\,dz', \tag{3.39}$$

где $F_1(x, y)$ определяется (3.23).

XIX. *Ограниченный полый цилиндр $0<z<l$, $a<r<b$. Количество тепла, выделяемое в единицу времени единицей объема, постоянно и равно A_0. Тепловой поток через поверхность $r=a$ отсутствует. На других поверхностях температура равна нулю.*

Используя (3.37) и (3.39), получим

$$v=\frac{A_0 z(l-z)}{2K}-\frac{4l^2 A_0}{K\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_1[(2n+1)\pi a/l;\ (2n+1)\pi r/l]}{F_1[(2n+1)\pi a/l;\ (2n+1)\pi b/l]}\,\frac{\sin(2n+1)\pi r/l}{(2n+1)^3}. \tag{3.40}$$

XX. *Ограниченный полый цилиндр $0<z<l$, $a<r<b$. Количество тепла, выделяемое в единицу времени на единицу объема, постоянно и равно A_0. Поверхности $z=0$, $z=l$ и $r=b$ имеют нулевую температуру, поверхность $r=a$ охлаждается водой.*

Подобные задачи можно рассматривать следующим образом. Предположим, что поверхность $r=a$ обтекается жидкостью, характеризуемой удельной теплоемкостью c' и температурой V, и что количество M этой жидкости, уходящей в единицу времени, заменяется тем же количеством жидкости с нулевой температурой, причем сама жидкость все время хорошо перемешивается. Тогда количество тепла, уносимое жидкостью, составляет $Mc'V$, что должно равняться f_a, т. е. величине теплового потока через поверхность $r=a$, $0<z<l$. Учитывая это и используя (3.37) и (3.20), получим решение для v.

XXI. *Ограниченный цилиндр $0\leqslant r<a$, $0<z<l$ с нулевой температурой поверхности; количество выделяемого тепла равно $A_0(1+\beta v)$.*

В данном случае следует решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{A_0\beta}{K}v=-\frac{A_0}{K}.$$

Частный интеграл, который обращается в нуль при $z=0$ и $z=l$, имеет вид

$$\frac{1}{\beta}\left\{\frac{\cos\gamma\left(\frac{1}{2}l-z\right)}{\cos\frac{1}{2}\gamma l}-1\right\},$$

где

$$\gamma=\left(\frac{A_0\beta}{K}\right)^{1/2}.$$

Поступая как в примере XVII, найдем полное решение в виде

$$v=\frac{1}{\beta}\left\{\frac{\cos\gamma\left(\frac{1}{2}l-z\right)}{\cos\frac{1}{2}\gamma l}-1\right\}-\frac{4A_0l^2}{\pi K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_0(r\gamma_n/l)\sin(2n+1)\pi z/l}{I_0(a\gamma_n/l)(2n+1)\gamma_n^2}, \qquad (3.41)$$

где

$$\gamma_n^2=(2n+1)^2\pi^2-\gamma^2l^2.$$

Здесь на β налагаются ограничения, аналогичные рассматриваемым в § 7 гл. XV.

XXII. *Другие задачи.*

Вебер дал ряд решений задач для случая установившегося потока электричества (или тепла) в областях, ограниченных цилиндрами и плоскостями, перпендикулярными их оси [13] *). Во многих из этих задач рассматривается электрический ток как «втекающий» внутрь поверхности, так и «вытекающий» из нее через небольшие электроды. Задачи подобного типа не представляют большого интереса при обсуждении вопросов теплопроводности; полное описание их дается в книге [2].

§ 4. Неустановившееся состояние. Решения в форме произведений

Как и в гл. V и VI, решения многих важных задач можно записать (см. § 15 гл. I) в виде произведения решений простых задач. Они имеют вид функций $\varphi(x)$ и $\varphi(x, h)$, определяемых (6.1) и (6.5) гл. V, что соответствует случаю полуограниченного твердого тела с заданной температурой поверхности и теплообменом соответственно, а также функций $\psi(x, l)$ и $\psi(x, l, h)$, определяемых (6.6) и (6.7) гл. V, что соответствует случаю пластины $-l<x<l$ с заданной температурой поверхности и теплообменом соответственно. К этим решениям необходимо теперь добавить функции

$$\chi(r, a)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_n^2t}\frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_nJ_1(a\alpha_n)}, \qquad (4.1)$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$J_0(a\alpha)=0 \qquad (4.2)$$

и

$$\chi(r, a, h)=\frac{2h}{a}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_s^2t}\frac{J_0(r\alpha_s)}{\left(h^2+\alpha_s^2\right)J_0(a\alpha_s)}, \qquad (4.3)$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$\alpha J_0'(a\alpha)+hJ_0(a\alpha)=0. \qquad (4.4)$$

В § 6 и 7 гл. VII было показано, что выражения (4.1) и (4.3), аналогичные (6.5) и (7.4) гл. VII соответственно, служат решениями задач для случаев неограниченного цилиндра с начальной температурой, равной единице, и либо с поверхностью, поддерживаемой при нулевой температуре, либо с теплообменом со средой нулевой температуры.

I. *Ограниченный цилиндр $-l<z<l$, $0\leqslant r<a$ с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности.*

$$v=\psi(z, l)\chi(r, a). \qquad (4.5)$$

Численные значения функций ψ и χ были приведены в § 4 гл. III и в § 6 гл. VII. На рис. 27 и 28 приведены изотермы $v=0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; ...

*) Бóльшая часть материала первой цитируемой статьи приводится в гл. XII книги [2]. См. также [14].

при $\varkappa t/a^2 = 0{,}08$ для осевых плоскостей в цилиндрах, для которых $l = a$ и $l = 2a$. Эти значения указывают на важную роль краевых эффектов.

Если теплопроводности цилиндра в радиальном и осевом направлениях различны (как, например, в бревне), то решение по-прежнему будет иметь вид произведения (4.5) тех же функций, каждой с соответствующим значением $\varkappa$.

II. *Ограниченный цилиндр* $-l < z < l$, $0 \leqslant r < a$ *с нулевой начальной температурой.*

Если температура поверхности цилиндра равна единице, то решение имеет вид

$$v = 1 - \psi(z, l)\chi(r, a),$$

или

$$v = 1 - \frac{8}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^n J_0(r\alpha_m)}{(2n+1)\alpha_m J_1(a\alpha_m)}\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\times$$

$$\times\exp\left[-\varkappa t\left\{\alpha_m^2 + (2n+1)^2\pi^2/4l^2\right\}\right], \qquad (4.6)$$

где α_m — положительные корни (4.2). Решение для случая температуры поверхности, равной $\varphi(t)$, легко получить, воспользовавшись теоремой Дюамеля.

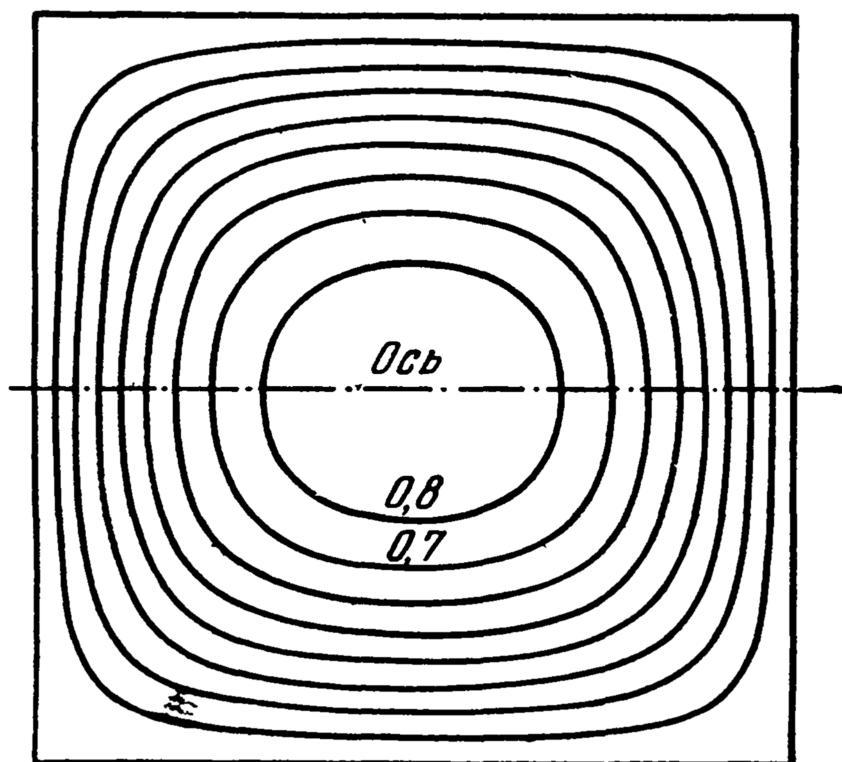


Рис. 27. Изотермы $v = 0{,}1; 0{,}2; \ldots, 0{,}8$ для цилиндра, длина и диаметр которого равны $2a$, с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности; $\varkappa t/a^2 = 0{,}08$.

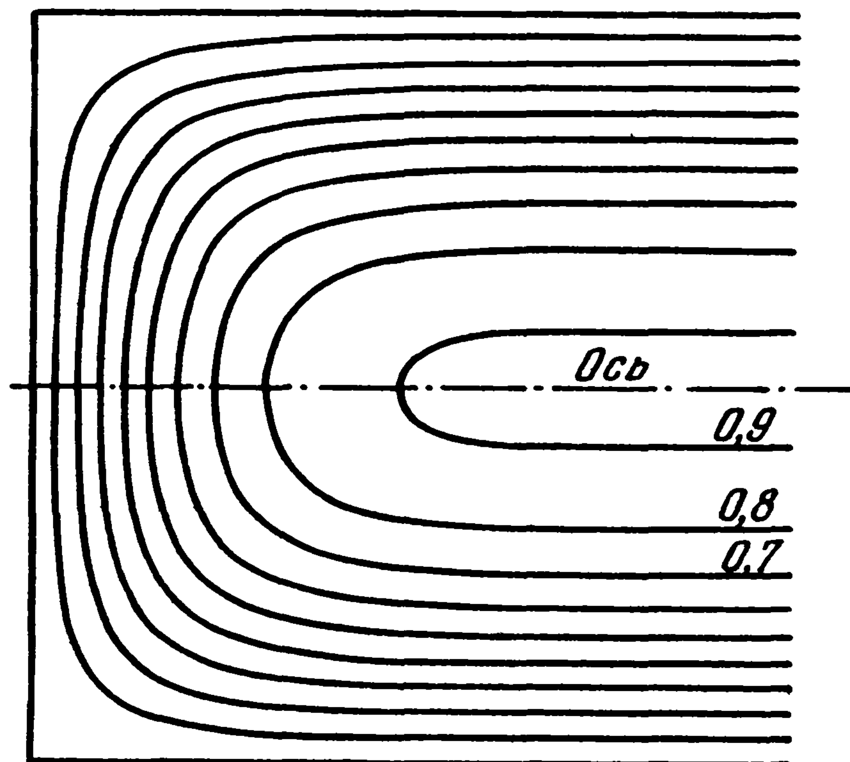


Рис. 28. Изотермы $v = 0{,}1; 0{,}2; \ldots, 0{,}9$ для цилиндра длиной $4a$ и диаметром $2a$ с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности; $\varkappa t/a^2 = 0{,}08$.

III. *Ограниченный цилиндр* $-l < z < l$, $0 \leqslant r < a$ *с начальной температурой, равной единице. На поверхности цилиндра происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

$$v = \psi(z, l, h)\chi(r, a, h). \qquad (4.7)$$

Численные значения ψ и χ приведены в литературе (см. ссылки к гл. III и гл. VII). Некоторые численные значения приведены в [15].

IV. *Ограниченный цилиндр* $-l < z < l$, $0 \leqslant r < a$ *с начальной температурой, равной единице. На поверхностях* $z = \pm l$ *происходит теплообмен со средой нулевой температуры. При* $t > 0$ *поверхность*

$r=a$ поддерживается при нулевой температуре.

$$v=\psi(z,\ l,\ h)\chi(r,\ a). \tag{4.8}$$

V. *Полуограниченный цилиндр $z>0$, $0\leqslant r<a$ с начальной температурой, равной единице.*

Если на всех поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то

$$v=\varphi(z,\ h)\chi(r,\ a,\ h). \tag{4.9}$$

Если все поверхности поддерживаются при нулевой температуре, то

$$v=\varphi(z)\chi(r,\ a). \tag{4.10}$$

Для $\varkappa t/a^2=0{,}08$ изотермы вблизи поверхности $z=0$ в этом случае не отличаются от изотерм, изображенных на рис. 28.

Если поверхность $z=0$ поддерживается при нулевой температуре, а на поверхности $r=a$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то

$$v=\varphi(z)\chi(r,\ a,\ h). \tag{4.11}$$

Если поверхность $r=a$ поддерживается при нулевой температуре, а на поверхности $z=0$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то

$$v=\varphi(z,\ h)\chi(r,\ a). \tag{4.12}$$

Ясно, что легко записать решения многих других задач такого же типа, в частности задач с полыми цилиндрами.

В гл. XIII будут приведены соотношения, определяющие температуры в областях, ограниченных изнутри цилиндрами; после этого можно написать аналогичные решения для областей типа $r>a$, $z>0$ или $r>a$, $-l<z<l$.

§ 5. Определение теплопроводности вещества в форме цилиндра

Для определения теплопроводности вещества, имеющего форму ограниченного цилиндра, был использован ряд методов, аналогичных методам, изложенным в § 5 гл. VI.

Для ограниченного цилиндра $0\leqslant r<a$, $-l<z<l$ с начальной температурой, равной единице [16], при наличии на его поверхности теплообмена со средой нулевой температуры первый член решения (4.7) предыдущего параграфа имеет вид

$$\frac{8h\sin\lambda_1 l\cos\lambda_1 z J_0(\alpha,\ r)}{a\left(h^2+\alpha_1^2\right)\left[2l\lambda_1+\sin 2l\lambda_1\right]J_0\left(a\alpha_1\right)}e^{-\varkappa t\left(\lambda_1^2+\alpha_1^2\right)}, \tag{5.1}$$

где α_1 — наименьший корень уравнения

$$\alpha J_1(a\alpha)=hJ_0(a\alpha), \tag{5.2}$$

а λ_1 — наименьший корень уравнения

$$\lambda\operatorname{tg}\lambda l=h. \tag{5.3}$$

Если боковая поверхность цилиндра, начальная температура которого равна единице, поддерживается при нулевой температуре и на его основаниях происходит теплообмен со средой нулевой температуры [17], то первый член решения (4.8) предыдущего параграфа будет иметь вид

$$\frac{8\sin\lambda_1 l\cos\lambda_1 z J_0(\mu_1 r)}{a\mu_1 J_1(a\mu_1)\left[2l\lambda_1+\sin 2\lambda_1 l\right]}e^{-\varkappa t\left(\lambda_1^2+\mu_1^2\right)}, \tag{5.4}$$

где λ_1 — наименьший корень уравнения (4.3) и μ_1 — наименьший корень уравнения

$$J_0(a\mu)=0. \tag{5.5}$$

Если начальная температура цилиндра равна единице и при $t > 0$ поверхность $z = -l$ поддерживается при нулевой температуре, а на других поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры [18, 19], то первый член нашего решения будет иметь вид

$$\frac{8h(1-\cos 2\lambda_1 l)\sin\lambda_1(z+l)J_0(\alpha_1 r)}{a(h^2+\alpha_1^2)[4\lambda_1 l-\sin 4\lambda_1 l]J_0(a\alpha_1)}e^{-\varkappa t(\lambda_1^2+\alpha_1^2)}, \tag{5.6}$$

где α_1 — наименьший корень (3.2) и λ_1 — наименьший корень уравнения

$$\lambda\operatorname{ctg}2\lambda l + h = 0. \tag{5.7}$$

Зная любые из решений (5.1), (5.4), (5.6), а также из других решений аналогичного вида, можно, использовав какой-либо метод, изложенный в § 5 гл. VI или в § 5 гл. IX, получить значения h, $\varkappa$ и, в случае надобности, начальную температуру цилиндра.

§ 6. Ограниченный цилиндр $-l < z < l$, $0 \leqslant r < a$ с начальной температурой $f(r, \theta, z)$

Если начальная температура или граничные условия таковы, что метод, изложенный в § 15 гл. I, оказывается непригодным, то используется комбинация рядов Фурье и рядов Фурье — Бесселя. Наряду с этим можно применить функцию Грина (см. гл. XIV) или непосредственно использовать, как в гл. XV, преобразование Лапласа *).

I. *Поверхность при нулевой температуре.*

В данном случае уравнения теплопроводности имеют следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\nabla^2 v \qquad (0 \leqslant r < a,\ -l < z < l), \tag{6.1}$$

и

$$v = f(r, \theta, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{6.2}$$

$$v = 0 \quad \text{при} \quad r = a \quad \text{и} \quad z = \pm l. \tag{6.3}$$

Выражение

$$\exp[-\varkappa(\mu^2 + m^2\pi^2/4l^2)t]\,J_n(\mu r)\,{\cos \atop \sin}\,n\theta\,\sin\frac{m\pi(z+l)}{2l}$$

удовлетворяет (6.1) и (6.3), если m — любое целое число, а μ — корень уравнения

$$J_n(\mu a) = 0.$$

Разложим теперь $f(r, \theta, z)$ в ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta),$$

где коэффициенты a_n и b_n являются функциями r и z. Обозначим их через $F_n(r, z)$ и $G_n(r, z)$ и затем разложим в ряды по функциям Бесселя, определяемым положительными корнями уравнения $J_n(\mu a) = 0$. Коэффициенты этих рядов разложим в ряды по синусам углов, кратных $\frac{\pi(z+l)}{2l}$.

Тогда мы получим искомое решение в виде

$$v = \sum_{\mu}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\varkappa\left(\mu^2+\frac{m^2\pi^2}{4l^2}\right)t\right]\times$$
$$\times J_n(\mu r)\sin\frac{m\pi(z+l)}{2l}(A_{\mu,m,n}\cos n\theta + B_{\mu,m,n}\sin n\theta)$$

где

$$A_{\mu,m,n} = \frac{2}{\pi a^2 l\{J_n'(\mu a)\}^2}\int_0^a rJ_n(\mu r)\,dr\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi(z+l)}{2l}\,dz\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\theta f(r, \theta, z)\,d\theta.$$

*) Неустановившееся состояние для случаев, описанных в примерах I, II, XIII и XIV § 3 данной главы, рассматривается таким методом в § 11 гл. XV.

Для $B_{\mu, m, n}$ получаются аналогичные выражения [20] *).

II. *Другие случаи.*

Решения других задач для ограниченного цилиндра можно вывести с помощью описанного выше метода, а также метода, изложенного в § 12 гл. VII. Случай, когда задана температура поверхности, рассматривается в § 60 книги Карслоу [21]; случай теплообмена на поверхности — в § 61 той же книги, а также в работе [20]. Случай области, ограниченной плоскостями $z = \pm l$, плоскостями $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ и поверхностью $r = a$, обсуждается в § 62 книги Карслоу [21].

§ 7. Полуограниченный цилиндр

Задачи для случая полуограниченного цилиндра с произвольной начальной или поверхностной температурами могут рассматриваться аналогично тому, как это делается в § 12 гл. VII и в предыдущем параграфе. Решение для произвольной начальной температуры и нулевой температуры поверхности приведено в § 59 книги Карслоу [21]. Некоторые решения для полуограниченного полого цилиндра даются в [22, 23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, ed. 2, 1944. (Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.)
2. Gray, Mathews, Treatise on Bessel Functions, Macmillan, ed. 2, 1922. (Э. Грэй, Г. Мэтьюз, Функции Бесселя и их применение в физике и механике, ИЛ, М., 1953.)
3. Lowan, Phil. Mag. **29**, 93 (1940).
4. Thomas, Quart. J. Mech. Appl. Math. **10**, 482 (1957).
5. Karush, Young, J. Appl. Phys. **23**, 1191—1193 (1952).
6. Titchmarsh, Theory of Fourier Integrals, Oxford, 1937. (Э. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М., 1948.)
7. Tranter, J. Appl. Phys. **24**, 369 (1953).
8. Nancarrow, Proc. Phys. Soc. **45**, 447 (1933).
9. Lees, Phil. Trans. Roy. Soc. **A208**, 381 (1908).
10. Emmerich, J. Appl. Phys. **21**, 75—80 (1950).
11. Szalay, Frequenz **7**, 81—84 (1953).
12. Thews, Acta Biotheoretica **A10**, 105—138 (1953).
13. Weber, Crelle **75** (1873); **76** (1873).
14. Weinberg, Bull. Math. Biophysics **3**, 39 (1941).
15. Berger, Z. angew. Math. Mech. **11**, 45 (1931).
16. Weber, Ann. Physik (N. F.) **10**, 103 (1880).
17. Weber, S. B. preuss. Akad. Wiss. 457 (1880).
18. Beglinger, Verh. Ver. Gew-Fleiss., Berl. **75** (1896).
19. Hall, Phys. Rev. **10**, 277 (1900).
20. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl., Bd. II.
21. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, Macmillan, ed. 2, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1947.)
22. Tranter, Phil. Mag. **35**, 102 (1944).
23. Lowan, Quart. Appl. Math. **2**, 348 (1945).

---

*) Если $n = 0$, выражения для коэффициентов следует разделить на 2.

ГЛАВА IX

ПОТОК ТЕПЛА В ШАРЕ И КОНУСЕ

§ 1. Введение

Мы уже видели (см. § 8 гл. I), что уравнение теплопроводности в сферических координатах имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right\}. \tag{1.1}$$

Если рассматривается поток тепла в шаре с такими начальными и граничными условиями, что изотермические поверхности являются концентрическими сферами и, следовательно, температура зависит только от r и t, то это уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right). \tag{1.2}$$

Полагая $u = vr$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \tag{1.3}$$

В настоящей главе при помощи классического метода разделения переменных (см. (1.3)) будет решен ряд важных задач для шара, полого шара и области, ограниченной изнутри сферической поверхностью. Для полноты изложения мы приведем без доказательства ряд решений, которые легче получить методами, изложенными в гл. XIII и XIV. Задачи о составных шарах, сферических или неограниченных областях со сферическим сердечником из идеального проводника и задачи о выделении тепла в неограниченной среде будут изложены в § 9 гл. XIII.

§ 2. Установившаяся температура. Радиальный тепловой поток

В данном случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dv}{dr} \right) = 0. \tag{2.1}$$

Общим решением уравнения (2.1) служит

$$v = \frac{A}{r} + B, \tag{2.2}$$

где A и B — постоянные, которые следует определить из граничных условий.

I. *Полый шар $a < r < b$. Поверхность $r = a$ имеет температуру v_1, а поверхность $r = b$ — температуру v_2.*

15*

В данном случае

$$v = \frac{av_1(b-r)+bv_2(r-a)}{r(b-a)}. \tag{2.3}$$

II. *Полый шар $a<r<b$. Поверхность $r=a$ имеет температуру v_1. На поверхности $r=b$ происходит теплообмен со средой температуры v_2.*

В этом случае

$$v = \frac{av_1[hb^2+r(1-hb)]+hb^2v_2(r-a)}{r[hb^2+a(1-hb)]}. \tag{2.4}$$

III. *Полый шар $a<r<b$. На поверхности $r=a$ теплообмен со средой температуры v_1, а на поверхности $r=b$ — со средой температуры v_2.*

Если граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial r}+h_1(v_1-v)=0, \quad r=a; \qquad \frac{\partial v}{\partial r}+h_2(v-v_2)=0, \quad r=b,$$

то искомым решением служит

$$v = \frac{v_1a^2h_1[b^2h_2-r(bh_2-1)]+v_2b^2h_2[r(ah_1+1)-a^2h_1]}{r[b^2h_2(ah_1+1)-a^2h_1(bh_2-1)]}. \tag{2.5}$$

IV. *Постоянный тепловой поток $Q_0/4\pi a^2$ через внутреннюю поверхность $r=a$ полого шара $a<r<b$.*

Так как тепловой поток через любую сферическую поверхность радиуса r равен

$$-4\pi r^2K\frac{dv}{dr}$$

и, в соответствии с (2.1), постоянен, то

$$Q_0 = -4\pi r^2K\frac{dv}{dr}, \qquad a<r<b. \tag{2.6}$$

Если v_1 и v_2 — температуры поверхностей $r=a$ и $r=b$ соответственно, то, интегрируя, получим

$$Q = \frac{4\pi K(v_1-v_2)ab}{b-a}. \tag{2.7}$$

Устройства, в которых тепло выделяется внутри полого шара, используются для определения теплопроводности [1—3]. Применение шара обеспечивает устранение краевых эффектов, но вносит другие трудности.

Если теплопроводность K является функцией температуры, то соотношение (2.6) остается справедливым и интегрирование дает

$$Q_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = 4\pi\int_{v_2}^{v_1}K\,dv = 4\pi K_m(v_1-v_2), \tag{2.8}$$

где K_m — средняя теплопроводность для интервала температур, равного разности между температурами в точках $r=a$ и $r=b$. Таким образом, соотношение (2.7) остается справедливым, если K заменяется на K_m.

V. *Составной полый шар из n областей* $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_{n+1})$ *с теплопроводностями* $K_1, \ldots, K_n$.

Если температуры на поверхностях $r = a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ равны соответственно $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$, то последовательное использование соотношения (2.7) дает

$$Q_0 = \frac{4\pi K_1 (v_1 - v_2) a_1 a_2}{a_2 - a_1} = \ldots = \frac{4\pi K_n (v_n - v_{n+1}) a_{n+1} a_n}{a_{n+1} - a_n}.$$

Отсюда

$$v_1 - v_{n+1} = \frac{Q_0}{4\pi} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{K_r} \left(\frac{1}{a_r} - \frac{1}{a_{r+1}} \right). \tag{2.9}$$

Если, кроме того, на поверхностях $r = a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ имеются контактные сопротивления, равные на единицу поверхности $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$, а температуры внутри и снаружи составного шара соответственно равны v_0 и v_{n+2}, то

$$v_0 - v_{n+2} = \frac{Q_0}{4\pi} \left\{ \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{K_r} \left(\frac{1}{a_r} - \frac{1}{a_{r+1}} \right) + \sum_{r=1}^{n+1} \frac{R_r}{a_r^2} \right\}. \tag{2.10}$$

VI. *Шар из твердого материала* $0 \leqslant r < a$, *в котором в единицу времени на единицу объема выделяется постоянное количество тепла* A_0.

Тогда дифференциальное уравнение (6.7) гл. I принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{A_0}{K}. \tag{2.11}$$

Требуется найти решение, имеющее конечное значение при $r = 0$. Если температура поверхности равна нулю, то оно имеет вид

$$v = \frac{A_0}{6K} (a^2 - r^2). \tag{2.12}$$

Если на поверхности $r = a$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то это решение примет вид

$$v = \frac{A_0}{6hK} \{ h (a^2 - r^2) + 2a \}. \tag{2.13}$$

VII. *Область* $r > a$. *Поверхность* $r = a$ *имеет температуру* V_0.

$$v = aV_0/r, \qquad -4\pi a^2 K \left[\frac{\partial v}{\partial r} \right]_{r=a} = 4\pi K a V_0. \tag{2.14}$$

VIII. *В области* $0 \leqslant r < a$ *с теплопроводностью* K_0 *в единицу времени на единицу объема выделяется постоянное количество тепла, равное* A_0. *В области* $r > a$ *с теплопроводностью* K *тепло не выделяется. На поверхности* $r = a$ *имеется контактное сопротивление, равное на единицу площади* R.

$$v = A_0 \{ a^2 - r^2 + 2RaK_0 + 2a^2 (K_0/K) \} / 6K_0, \qquad 0 \leqslant r < a,$$

$$v = A_0 a^3 / 3Kr, \quad r > a.$$

§ 3. Шар $0 \leqslant r < a$ с начальной температурой $f(r)$ и температурой поверхности $\varphi(t)$

Как и в § 1 данной главы, сделаем подстановку

$$u = vr. \tag{3.1}$$

Тогда уравнения для u записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \qquad 0 \leqslant r < a, \tag{3.2}$$

$$u = 0, \quad \text{когда} \quad r = 0,$$

$$u = a\varphi(t), \quad \text{когда} \quad r = a,$$

$$u = rf(r), \quad \text{когда} \quad t = 0.$$

Эти уравнения сходны с уравнениями теплопроводности для плиты толщиной a, поверхности которой $r = 0$ и $r = a$ поддерживаются при температурах 0 и $a\varphi(t)$ соответственно, а начальная температура равна $rf(r)$. Решение этой задачи приведено в § 5 гл. III (см. (5.2) гл. III). Используя его, окончательно получим

$$v = \frac{2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right] \sin\frac{n\pi r}{a} \left\{ \int_0^a r' f(r') \sin\frac{n\pi r'}{a}\, dr' - n\pi\varkappa(-1)^n \int_0^t \exp\left[\frac{\varkappa n^2\pi^2\lambda}{a^2}\right] \varphi(\lambda)\, d\lambda \right\}. \tag{3.3}$$

Ниже приводятся результаты для некоторых важных частных случаев. Для большинства этих случаев приводятся также решения, применимые при малых значениях параметра $\varkappa t/a^2$.

I. *Нулевая начальная температура. Температура поверхности постоянна и равна V.*

$$v = V + \frac{2aV}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\frac{n\pi r}{a} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right], \tag{3.4}$$

или

$$v = \frac{aV}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Phi^*\left[\frac{(2n+1)a - r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] - \Phi^*\left[\frac{(2n+1)a + r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] \right\}. \tag{3.5}$$

Температура $v_ц$ в центре, получающаяся из соотношений (3.4) и (3.5) при переходе к пределу при $r \to 0$, равна

$$v_ц = V + 2V \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right], \tag{3.6}$$

или

$$v_ц = \frac{aV}{(\pi\varkappa t)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 a^2}{4\varkappa t}\right]. \tag{3.7}$$

Средняя температура $v_{ср}$ шара в любой момент времени равна *)

$$v_{ср} = V - \frac{6V}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right], \tag{3.8}$$

или

$$v_{ср} = \frac{6V(\varkappa t)^{1/2}}{a\pi^{1/2}} - \frac{3\varkappa V t}{a^2} + \frac{12V(\varkappa t)^{1/2}}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}\Phi^*\left[\frac{na}{(\varkappa t)^{1/2}}\right]. \tag{3.9}$$

Теплосодержание шара в любой момент времени равно $4\pi a^3\rho c v_{ср}/3$.

На рис. 29 приведены графики зависимости v/V от r/a, рассчитанные по формуле (3.4) для различных значений $T = \varkappa t/a^2$. Их можно сравнить с соответствующими кривыми на рис. 24 для цилиндра и кривыми на рис. 11 для пластины. Значения температур в центре и средних температур тел такой формы, рассчитанные по формулам (3.6) и (3.8), приведены на рис. 12.

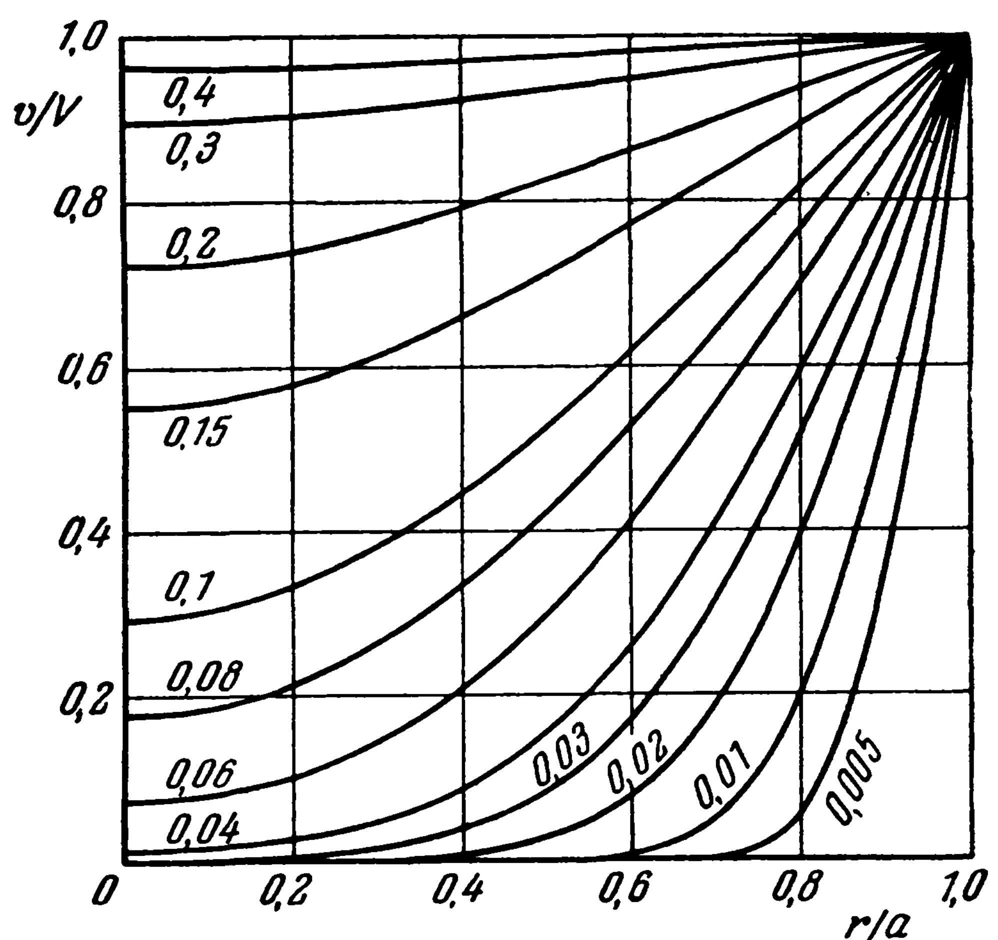


Рис. 29. Распределение температуры в различные моменты времени в шаре радиуса $r = a$ с нулевой начальной температурой и температурой поверхности, равной V.

Числа у кривых указывают величины $\varkappa t/a^2$.

Уравнение (3.8) находит применение в теории запаздывания показаний термометров [5—7] **). Предположим, что стеклянный ртутный термометр со сферическим резервуаром, имеющий нулевую температуру в момент $t = 0$, вводится в среду с температурой V. Если пренебречь влиянием движения ртути и термическим сопротивлением стекла, в которое заключена ртуть, то увеличение объема последней, т. е. показание термометра, пропорционально средней температуре (3.8). Аналогичным образом выражение (3.11) соответствует показанию термометра в среде, температура которой увеличивается линейно (например, в снижающемся самолете); очевидно, что в этом случае следует ожидать постоянного запаздывания. Влияние стеклянного резервуара можно учесть с помощью выражения (4.10) данной главы; кроме того, необходимо учитывать расширение стекла.

II. *Нулевая начальная температура. Температура поверхности равна* kt.

$$v = k\left[t - \frac{a^2 - r^2}{6\varkappa}\right] - \frac{2ka^3}{\varkappa\pi^3 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\sin\frac{n\pi r}{a}. \tag{3.10}$$

Средняя температура равна

$$k\left\{t - \frac{a^2}{15\varkappa}\right\} + \frac{6ka^2}{\varkappa\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]. \tag{3.11}$$

*) В работе [4] отмечается, что из результатов взвешивания сконденсированного на шаре за любой промежуток времени пара в паровом калориметре Жоли можно определить как $\varkappa$, так и ρc.

**) В статье [8] дается приближенное рассмотрение отставания по времени в более сложных системах.

III. *Нулевая начальная температура. Температура поверхности меняется по закону* $\sin(\omega t+\varepsilon)$.

$$v=\frac{aA}{r}\sin(\omega t+\varepsilon+\varphi)+$$
$$+\frac{2a\varkappa\pi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(\varkappa n^2\pi^2\sin\varepsilon-\omega a^2\cos\varepsilon)}{\varkappa^2n^4\pi^4+\omega^2a^4}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\sin\frac{n\pi r}{a}, \quad (3.12)$$

где

$$A=\left|\frac{\operatorname{sh}\omega'r(1+i)}{\operatorname{sh}\omega'a(1+i)}\right|=\left\{\frac{\operatorname{ch}2\omega'r-\cos 2\omega'r}{\operatorname{ch}2\omega'a-\cos 2\omega'a}\right\}^{\frac{1}{2}},$$
$$\varphi=\arg\left\{\frac{\operatorname{sh}\omega'r(1+i)}{\operatorname{sh}\omega'a(1+i)}\right\},\qquad \omega'=\sqrt{(\omega/2\varkappa)}.$$

Искомое решение получается из соотношения (6.5) гл. III.

IV. *Начальная температура постоянна и равна V. Температура поверхности равна нулю.*

Искомые решения получаются вычитанием из V соотношений (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) и (3.9).

V. *Начальная температура* $V(a-r)/a$. *Температура поверхности равна нулю.*

$$v=\frac{8aV}{r\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{a^2}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi r}{a}, \quad (3.13)$$

или

$$v=\frac{V(a-r)}{a}-\frac{2V\varkappa t}{ar}+\frac{8V\varkappa t}{ar}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{i^2\Phi^*\left[\frac{na+r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]+i^2\Phi^*\left[\frac{(n+1)a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}. \quad (3.14)$$

VI. *Начальная температура* $V(a^2-r^2)/a^2$. *Температура поверхности равна нулю.*

$$v=\frac{12aV}{r\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin\frac{n\pi r}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right], \quad (3.15)$$

или

$$v=\frac{V(a^2-r^2)}{a^2}-\frac{6V\varkappa t}{a^2}+$$
$$+\frac{24V\varkappa t}{ra}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{i^2\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]-i^2\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a+r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}. \quad (3.16)$$

VII. *Начальная температура* $(V/r)\sin(\pi r/a)$. *Температура поверхности равна нулю.*

$$v=\frac{V}{r}\sin\frac{\pi r}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa\pi^2 t}{a}\right]. \quad (3.17)$$

VIII. *Начальная температура* $V\exp[\alpha(r-a)]$.

$$v=\frac{2Va\pi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2\pi^2+\alpha^2a^2)^2}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\sin\frac{n\pi r}{a}\left\{(-1)^{n+1}\left[\alpha^2a^2-2\alpha a+n^2\pi^2\right]-\right.$$
$$\left.-2\alpha a e^{-\alpha a}\right\}. \quad (3.18)$$

IX. *Начальная температура в области* $0<r<b$ *постоянна и равна* V, *а в области* $b<r<a$ *равна нулю. Температура поверхности равна нулю.*

$$v=\frac{2V}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi b}{a}-\frac{b}{n\pi}\cos\frac{n\pi b}{a}\right\}\sin\frac{n\pi r}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]. \quad (3.19)$$

Для области $0 < r < b$ можно также написать

$$v = V - \frac{bV}{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Phi^* \left[\frac{2na + b - r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \Phi^* \left[\frac{2na + b + r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] + \Phi^* \left[\frac{(2n+2) a - r - b}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \right.$$

$$\left. - \Phi^* \left[\frac{(2n+2) a + r - b}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] \right\} - \frac{(\varkappa t)^{1/2} V}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{2na + b - r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \right.$$

$$\left. - \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{2na + b + r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{(2n+2) a - b - r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] + \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{(2n+2) a + r - b}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] \right\},$$

а для области $b < r < a$

$$v = \frac{bV}{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Phi^* \left[\frac{2na + r - b}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] + \Phi^* \left[\frac{2na + b + r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \Phi^* \left[\frac{(2n+2) a - r - b}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \right.$$

$$\left. - \Phi^* \left[\frac{(2n+2) a - r + b}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] \right\} - \frac{(\varkappa t)^{1/2} V}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{2na + r - b}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{2na + r + b}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \right.$$

$$\left. - \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{(2n+2) a - b - r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] + \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{(2n+2) a - r + b}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (3.20)$$

Решение для случая, когда в области $0 < r < b$ начальная температура равна нулю, а в области $b < r < a$ постоянна, получается объединением полученного решения с решением для случая постоянной начальной температуры V в области $0 < r < a$. Из этих решений в свою очередь вытекает решение для случая, когда начальная температура в области $b < r < c$ постоянна, а в областях $0 < r < b$ и $c < r < a$ равна нулю.

X. *Начальная температура $f(r)$. Температура поверхности равна нулю.* Решение методом Фурье дается формулой (3.3). Решение, используемое при небольших значениях $\varkappa t/a^2$, имеет вид

$$v = \frac{1}{2r (\pi \varkappa t)^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^a r' f(r') \left\{ \exp \left[- \frac{(2na + r' - r)^2}{4\varkappa t} \right] - \right.$$

$$\left. - \exp \left[- \frac{(2na + r' + r)^2}{4\varkappa t} \right] \right\} dr'. \quad (3.21)$$

XI. *Температура поверхности равна нулю. Начальное распределение температур описывается функцией*

$$f(r) = b_0 + br + cr^2 + dr^3 + \ldots \quad (3.22)$$

$$v = \frac{2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi r}{a} \left\{ \frac{b_0 a^2}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{ba^3}{n^3\pi^3} [(n^2\pi^2 - 2)(-1)^{n+1} - 2] + \right.$$

$$+ \frac{ca^4}{n^4\pi^4} (n^3\pi^3 - 6n\pi)(-1)^{n+1} +$$

$$\left. + \frac{da^5}{n^5\pi^5} [24 - (n^4\pi^4 - 12n^2\pi^2 + 24)(-1)^n] + \ldots \right\} \exp \left[- \frac{\varkappa n^2 \pi^2 t}{a^2} \right]. \quad (3.23)$$

§ 4. Шар $0 \leqslant r < a$. Начальная температура $f(r)$. На поверхности сферы происходит теплообмен

Если на поверхности шара происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то уравнения для v имеют следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad 0 \leqslant r < a, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + hv = 0, \quad \text{когда} \quad r = a, \quad (4.2)$$

и

$$v = f(r), \quad \text{когда} \quad t = 0. \tag{4.3}$$

Пусть $u = vr$; тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \qquad 0 < r < a, \tag{4.4}$$

$$u = 0, \quad \text{когда} \quad r = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \left(h - \frac{1}{a}\right) u = 0, \quad \text{когда} \quad r = a, \tag{4.6}$$

и

$$u = rf(r), \quad \text{когда} \quad t = 0. \tag{4.7}$$

Таким образом, наша задача сводится к задаче о линейном тепловом потоке в пластине, одна поверхность которой поддерживается при нулевой температуре, а на другой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры. Решение этой задачи уже давалось ранее (см. (10.11) гл. III) и нам остается только заменить в нем l на a, x на r и h на $(ah - 1)/a$. Следовательно, решение уравнения (4.1) при условиях (4.2) и (4.3) будет иметь вид *)

$$v = \frac{2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa \alpha_n^2 t} \frac{a^2\alpha_n^2 + (ah-1)^2}{a^2\alpha_n^2 + ah(ah-1)} \sin \alpha_n r \int_0^a r' f(r') \sin \alpha_n r' \, dr', \tag{4.8}$$

где $\pm \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — корни уравнения

$$a\alpha \operatorname{ctg} a\alpha + ah - 1 = 0. \tag{4.9}$$

Уравнение (4.9) аналогично уже рассмотренному выше уравнению (10.7) гл. III, корни которого представлены в таблице приложения 4; единственное различие между ними заключается в том, что параметр ah, который в § 11 гл. III всегда был положительным, заменяется параметром $ah - 1$, который может быть отрицательным. Если $h > 0$, т. е. $ah - 1 > -1$, то замечания в §§ 10 и 11 гл. III справедливы и все корни уравнения (4.9) оказываются действительными **).

Если начальная температура $f(r)$ постоянна и равна V, решение (4.8) принимает вид ***)

$$v = \frac{2hV}{r} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa \alpha_n^2 t} \frac{a^2\alpha_n^2 + (ah-1)^2}{\alpha_n^2 \left[a^2\alpha_n^2 + ah(ah-1)\right]} \sin a\alpha_n \sin r\alpha_n. \tag{4.10}$$

*) Это решение легко получается непосредственным путем [10]. См. также пример II в § 7 гл. XIV.

**) Если $h < 0$, то уравнение (4.9) имеет два мнимых корня. Однако этот случай, как и всегда, исключается по физическим соображениям. Если $h = 0$, т. е. тепловой поток через поверхность отсутствует, то уравнение (4.9) имеет корень, равный нулю, и при $h = 0$ к значению v, определяемому (4.8), следует прибавить член

$$\frac{3}{a^3} \int_0^a r^2 f(r) \, dr.$$

(См. также соотношения (4.6) гл. III и (8.3) гл. VII.)

***) Графики зависимости температуры поверхности и температуры в центре от ah при различных значениях $\varkappa t/a^2$ приводятся в работе [11]; см. также [12].

Если шар имеет нулевую начальную температуру и нагревается в результате теплообмена со средой, температура которой меняется по закону kt, то искомое решение запишется в виде

$$v = k\left\{t + \frac{r^2ah - a^2(2+ah)}{6\varkappa ah}\right\} + \frac{2a^2hk}{\varkappa r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin r\alpha_n}{\alpha_n^2\left\{a^2\alpha_n^2 + ah(ah-1)\right\}\sin a\alpha_n}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{4.11}$$

где α_n — положительные корни уравнения (4.9).

Если шар имеет нулевую начальную температуру и нагревается в результате теплообмена со средой, температура которой меняется по закону $V\sin(\omega t+\varepsilon)$, то искомую температуру можно записать следующим образом:

$$v = \frac{2ah\varkappa V}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(\varkappa\alpha_n^2\sin\varepsilon - \omega\cos\varepsilon)(ah-1)\sin r\alpha_n}{(\varkappa^2\alpha_n^4+\omega^2)\left[a^2\alpha_n^2 + ah(ah-1)\right]\cos a\alpha_n}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} + \frac{a^2hVA_1}{rA_2}\sin(\omega t+\varepsilon+\varphi_1-\varphi_2), \tag{4.12}$$

где

$$A_1e^{i\varphi_1} = \operatorname{sh}\omega' r\cos\omega' r + i\operatorname{ch}\omega' r\sin\omega' r,$$

$$A_2e^{i\varphi_2} = a\omega'(1+i)\operatorname{ch}a\omega'(1+i) + (ah-1)\operatorname{sh}a\omega'(1+i),$$

$$\omega' = \sqrt{\omega/2\varkappa},$$

а α_n — положительные корни уравнения (4.9).

§ 5. Определение коэффициентов теплопроводности плохих проводников

Полученный выше ряд, сумма которого определяет температуру шара, охлаждающегося вследствие теплообмена на границе, настолько быстро сходится, что если после начала процесса прошло достаточно много времени, то можно пренебречь всеми членами кроме первого. Это дает удобное для вычислений выражение, используемое в различных экспериментах, в которых начальная температура шара постоянна.

Пусть, например, шар из исследуемого материала погружают в ванну с постоянной температурой V на время, достаточное для того, чтобы весь шар приобрел температуру ванны. Затем его вынимают из ванны и он охлаждается вследствие теплообмена со средой постоянной температуры. После такого охлаждения в течение некоторого промежутка времени определяют его температуру. В одной серии опытов измеряют температуру в центре шара и на его поверхности. В другой серии опытов измеряют лишь температуру в центре шара.

Используя обозначения § 4 гл. IX, получим в принятом нами приближении

$$v = \frac{2hV\left[a^2\alpha_1^2 + (ah-1)^2\sin a\alpha_1\right.}{r\alpha_1^2\left[a^2\alpha_1^2 + ah(ah-1)\right]}e^{-\varkappa\alpha_1^2 t}\sin r\alpha_1. \tag{5.1}$$

Следовательно, если v_a — температура на поверхности $r=a$ в момент t, а v_0 — температура в точке $r=0$ в момент t, то

$$\frac{v_a}{v_0} = \frac{\sin a\alpha_1}{a\alpha_1}. \tag{5.2}$$

Отсюда, учитывая, что $0 < a\alpha_1 < \pi$, можно найти α_1. Кроме того, $\varkappa\alpha_1^2$ можно найти из уравнения

$$\frac{(v_a)_{t=t_1}}{(v_a)_{t=t_2}} = e^{\varkappa\alpha_1^2(t_2-t_1)}. \tag{5.3}$$

Таким образом, значение $\varkappa$ оказывается известным [13], и тогда h находят из уравнения (4.9) предыдущего параграфа.

Для определения теплопроводности камня был использован другой метод [14].

Воспользовавшись уравнением (4.9) данной главы можно записать температуру в центре, полученную из (5.1), в виде

$$2V\frac{\sin a\alpha_1 - a\alpha_1\cos a\alpha_1}{a\alpha_1 - \sin a\alpha_1\cos a\alpha_1}e^{-\varkappa\alpha_1^2 t} = Ne^{-nt}. \qquad (5.4)$$

Для определения значения n достаточно двух измерений температуры, а зная n, можно найти величину N. Таким образом, по таблице значений

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x\cos x}$$

и по значению N легко найти α_1. Отсюда, учитывая, что $n = \varkappa\alpha_1^2$, можно определить коэффициент теплопроводности $\varkappa$.

§ 6. Случай шара, находящегося в контакте с хорошо перемешиваемой жидкостью

Пусть поверхность $r = a$ шара, имеющего начальную температуру $f(r)$, находится в контакте с массой M' хорошо перемешиваемой жидкости с удельной теплоемкостью c', и пусть в начальный момент времени эта жидкость имеет нулевую температуру. Если жидкость не теряет тепло, то, предполагая, что при $t > 0$ температура жидкости равна температуре поверхности шара, получим следующее граничное условие при $r = a$:

$$-4\pi a^2 K\frac{\partial v}{\partial r} = M'c'\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad r = a, \qquad t > 0. \qquad (6.1)$$

Искомое решение имеет вид [15, 16]*)

$$v = \frac{3}{(k+1)a^3}\int_0^a r^2 f(r)\,dr +$$
$$+\frac{2}{ar}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\frac{k^2a^4\alpha_n^4 + 3(2k+3)a^2\alpha_n^2 + 9}{k^2a^4\alpha_n^4 + 9(k+1)a^2\alpha_n^2}\sin r\alpha_n\int_0^a rf(r)\sin\alpha_n r\,dr, \qquad (6.2)$$

где $\pm\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$ служат корнями уравнения

$$\operatorname{tg} a\alpha = \frac{3a\alpha}{3 + ka^2\alpha^2}, \qquad (6.3)$$

а

$$k = \frac{3M'c'}{4\pi a^3\rho c} \qquad (6.4)$$

является отношением теплоемкостей жидкости и шара.

Если начальная температура шара постоянна и равна V, то решение (6.2) примет вид

$$v = \frac{V}{k+1} - \frac{2kaV}{3r}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\frac{k^2a^4\alpha_n^4 + 3(2k+3)a^2\alpha_n^2 + 9}{k^2a^4\alpha_n^4 + 9(k+1)a^2\alpha_n^2}\sin r\alpha_n\sin a\alpha_n, \qquad (6.5)$$

---

*) Для получения этого решения в работе [15] был использован видоизмененный метод Фурье (функции $\sin r\alpha_n$ не являются ортогональными) и контурное интегрирование [16]. Решение легко получить при помощи преобразования Лапласа. В статье [17] указаны более полные численные данные, чем данные, приведенные на рис. 30.

а температура жидкости будет равна

$$v_a = \frac{V}{k+1} - 6kV \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa \alpha_n^2 t} \frac{1}{k^2 a^2 \alpha_n^2 + 9(k+1)}. \tag{6.6}$$

На рис. 30 приведены графики зависимости $(k+1) v_a/V$ (т. е. отношения температуры жидкости к ее конечной температуре) от $T = \varkappa t/a^2$ для

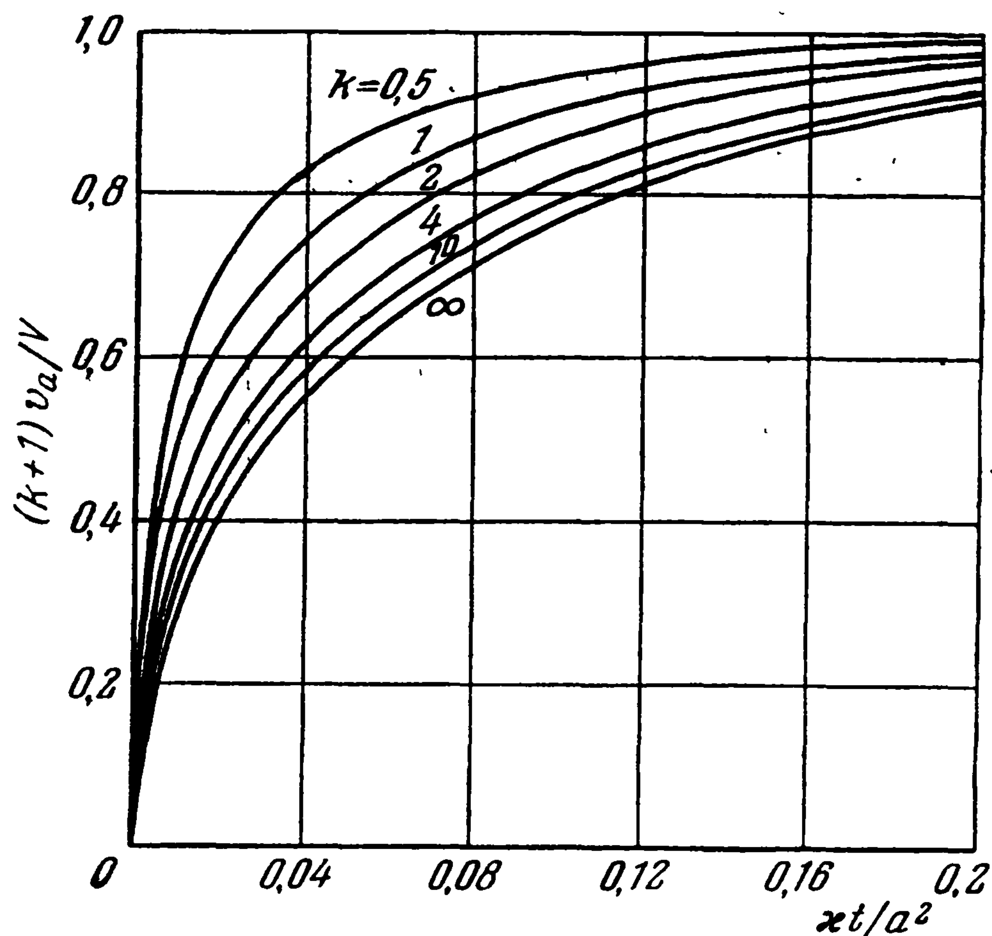


Рис. 30. Изменение температуры жидкости в калориметре при помещении в него сферического твердого тела.

значений k, равных 0,5; 1; 2; 4; 10 и ∞. Эти графики показывают ход возрастания температуры жидкости в калориметре при введении в него сферического твердого тела. Теоретически их можно использовать как для определения $\varkappa$, так и для определения ρc.

Если жидкость теряет тепло в результате теплообмена с окружающей средой нулевой температуры *), условие (6.1) заменяется условием

$$-4\pi a^2 K \frac{\partial v}{\partial r} = M'c' \frac{\partial v}{\partial t} + Hv, \qquad r = a, \tag{6.7}$$

и температура жидкости для случая постоянной начальной температуры шара, равной V, определяется выражением

$$6V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3H' - ka^2\alpha_n^2)}{k^2 a^4 \alpha_n^4 + 3a^2\alpha_n^2 (3 + 3k - 2kH') - 9H'(1 - H')} e^{-\varkappa \alpha_n^2 t}, \tag{6.8}$$

где $H' = (H/4\pi a K)$, k определено (6.4), а $\pm \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — корни уравнения

$$\operatorname{tg} a\alpha = \frac{3a\alpha}{3(1 - H') + ka^2\alpha^2}. \tag{6.9}$$

*) Кроме того, здесь можно использовать граничные условия (9.14)—(9.16) гл. I, которые более точно описывают условия в калориметре. В статье [18] рассмотрен случай идеально проводящего твердого тела.

§ 7. Шар с заданным тепловым потоком на поверхности

В случае нулевой начальной температуры и постоянного теплового потока F_0 в шар температура v равна

$$v = \frac{3F_0 t}{\rho c a} + \frac{F_0 (5r^2 - 3a^2)}{10Ka} - \frac{2F_0 a^2}{Kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(r\alpha_n/a)}{\alpha_n^2 \sin \alpha_n} \exp\left[-\frac{\varkappa \alpha_n^2 t}{a^2}\right], \tag{7.1}$$

где α_n, $n = 1, 2, \ldots$, — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha. \tag{7.2}$$

На рис. 31 приведены графики функций $(K/aF_0)[v - (3F_0 t/\rho c a)]$ при различных значениях $T = \varkappa t/a^2$.

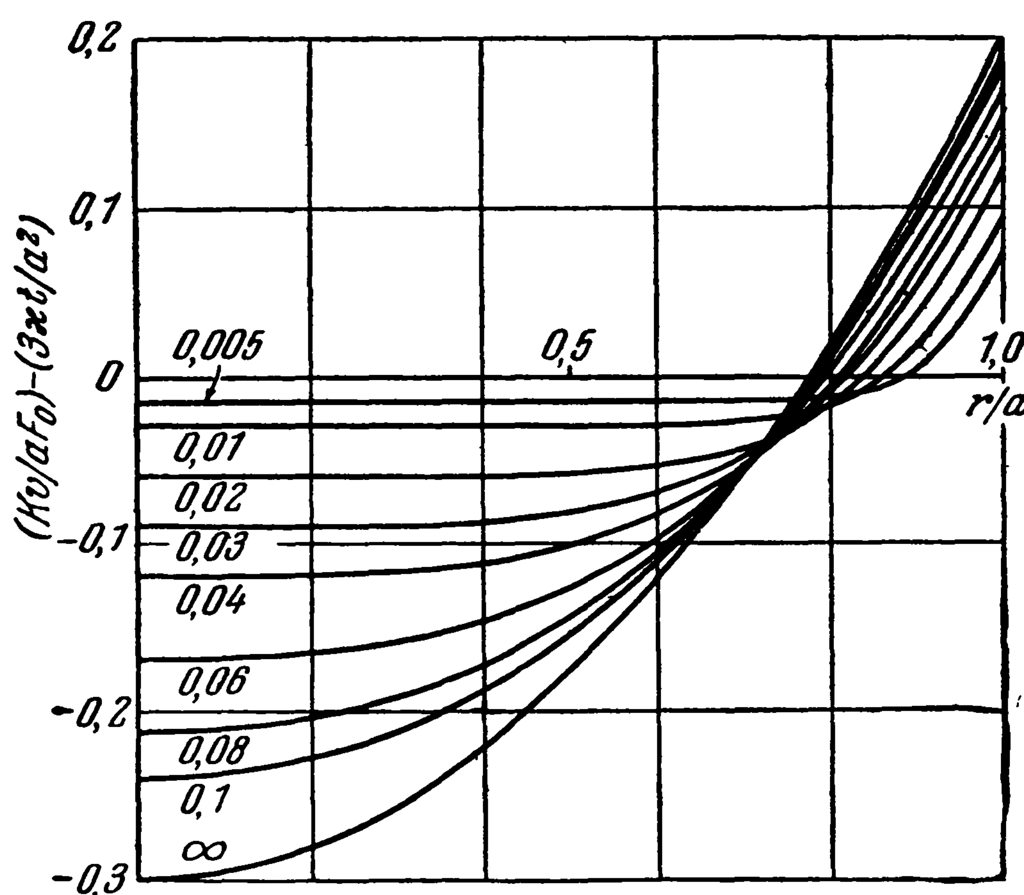


Рис. 31. Распределение температуры в шаре $0 \leqslant r < a$, обусловленное постоянным тепловым потоком F_0 на поверхности.

Числа у кривых указывают величины $\varkappa t/a^2$.

§ 8. Шар $0 \leqslant r < a$, внутри которого выделяется тепло

Если в единицу времени на единицу объема количество выделяемого тепла постоянно и равно A_0, то дифференциальное уравнение (6.7) гл. I принимает вид

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{A_0}{K}. \tag{8.1}$$

Обычная подстановка $u = vr$ дает

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{A_0 r}{K}. \tag{8.2}$$

Рассмотрим теперь ряд частных случаев.

I. *Количество тепла, выделяемое в единицу времени на единицу объема, равно постоянной величине A_0. Начальная температура и температура поверхности равны нулю.*

Полагая

$$u = w - \frac{A_0 r^3}{6K},$$

мы получим в качестве уравнения для w уравнение линейного теплового потока в пластине

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad 0 < r < a, \tag{8.3}$$

с $w=0$ при $r=0$.

Если начальная и поверхностная температуры шара равны нулю, то следует решать уравнение (8.3) при условиях

$$w=\frac{A_0 r^3}{6K}, \text{ когда } t=0, \quad 0<r<a, \tag{8.4}$$

и

$$w=\frac{A_0 a^3}{6K}, \text{ когда } r=a, \quad t>0. \tag{8.5}$$

Значение w находим из (4.1) гл. III, и окончательно получаем

$$v=\frac{A_0}{6K}(a^2-r^2)+\frac{2A_0a^3}{K\pi^3 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi r}{a}\times \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]. \tag{8.6}$$

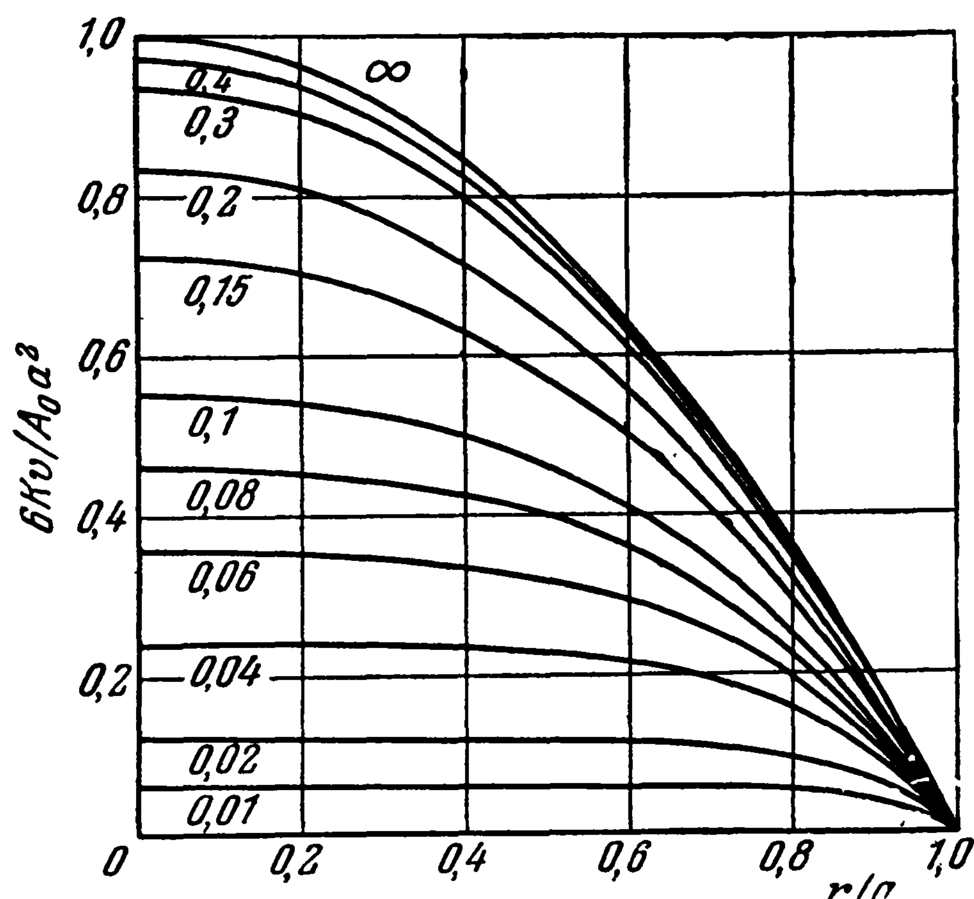


Рис. 32. Распределение температуры в шаре $0 \leqslant r < a$, если при $t>0$ температура поверхности равна нулю и мощность источников равна постоянной A_0.

Числа у кривых указывают величины $\varkappa t/a^2$.

Другая форма решения, полезная для небольших значений $\varkappa t/a^2$, имеет вид

$$v=\frac{\varkappa A_0 t}{K}-\frac{4\varkappa A_0 a t}{Kr}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ i^2\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]-i^2\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a+r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}. \tag{8.7}$$

Несколько кривых, описывающих распределение температур для различных значений $\varkappa t/a^2$, показано на рис. 32.

II. *Количество тепла, выделяемое в единицу времени, равно* $A_0(a-r)/a$. *Начальная температура и температура поверхности равны нулю.*

$$v=\frac{A_0(a^3-2ar^2+r^3)}{12aK}-\frac{8a^3A_0}{Kr\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{a^2}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi r}{a}, \tag{8.8}$$

или

$$v=\frac{\varkappa A_0(a-r)t}{Ka}-\frac{A_0\varkappa^2t^2}{Kar}+\frac{32A_0\varkappa^2t^2}{Kar}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{ i^4\Phi^*\left[\frac{na+r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]+i^4\Phi^*\left[\frac{(n+1)a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}. \tag{8.9}$$

III. *Количество тепла, выделяемого в единицу времени, равно* $A_0(a^2-r^2)/a^2$. *Начальная температура и температура поверхности равны нулю.*

$$v=\frac{A_0(a^2-r^2)(7a^2-3r^2)}{60Ka^2}-\frac{12A_0a^3}{rK\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^5}\sin\frac{n\pi r}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right], \tag{8.10}$$

или

$$v = \frac{A_0 (a^2 - r^2)\varkappa t}{Ka^2} - \frac{3A_0\varkappa^2 t^2}{Ka^2} + \frac{96A_0\varkappa^2 t^2}{Kar}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ i^4\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] - i^4\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a+r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}. \quad (8.11)$$

IV. *Количество тепла, выделяемого в единицу времени, равно* $(A_0/r)\sin(\pi r/a)$. *Начальная температура и температура поверхности равны нулю* *).

$$v = \frac{A_0 a^2}{\pi^2 rK}(1 - e^{-\varkappa\pi^2 t/a^2})\sin\frac{\pi r}{a}. \quad (8.12)$$

V. *Количество тепла, выделяемого в единицу времени, равно* $A_0 e^{\alpha(r-a)}$. *Начальная температура и температура поверхности равны нулю* **).

$$v = \frac{A_0}{K\alpha^2}\left\{1 - \frac{2}{a\alpha} - \left(1 - \frac{2}{r\alpha}\right)e^{\alpha(r-a)} - \frac{2(a-r)}{\alpha ar}e^{-\alpha a}\right\} - \frac{2A_0 a^3}{\pi Kr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2\pi^2+\alpha^2 a^2)}\sin\frac{n\pi r}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\times$$
$$\times[(-1)^n(2\alpha a - n^2\pi^2 - \alpha^2 a^2) - 2\alpha a e^{-\alpha a}]. \quad (8.13)$$

VI. *Количество тепла, выделяемого в единицу времени, равно* $A_0 e^{-\lambda t}$. *Начальная температура и температура поверхности равны нулю.*

$$v = \frac{\varkappa A_0}{K\lambda}e^{-\lambda t}\left\{\frac{a\sin r(\lambda/\varkappa)^{1/2}}{r\sin a(\lambda/\varkappa)^{1/2}} - 1\right\} + \frac{2a^3 A_0}{r\pi^3 K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n^2 - \lambda a^2/\varkappa\pi^2)}\sin\frac{n\pi r}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right], \quad (8.14)$$

или

$$v = \frac{\varkappa A_0}{K\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) - \frac{\varkappa A_0 a}{K\lambda r}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a-r}{2\sqrt{\varkappa t}}\right] - e^{-\lambda t}\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left[i((2n+1)a-r)\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}\right]\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a-r}{2\sqrt{\varkappa t}} - i(\lambda t)^{1/2}\right]\right\}\right\} +$$
$$+ \frac{\varkappa A_0 a}{K\lambda r}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a+r}{2\sqrt{\varkappa t}}\right] - e^{-\lambda t}\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left[i((2n+1)a+r)\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}\right]\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a+r}{2\sqrt{\varkappa t}} - i\sqrt{\lambda t}\right]\right\}\right\}. \quad (8.15)$$

VII. *Количество тепла, выделяемого в единицу времени в области* $b < r < a$, *равно* $A_0 e^{-\lambda t}$ [22]; *в области* $0 < r < b$ *тепло не выделяется. Начальная температура и температура поверхности равны нулю.*

---

*) В статье [19] приведены значения простых результатов этого типа для случая, когда изменение интенсивности выделения тепла в зависимости от r известно недостаточно хорошо. Там же рассмотрены случаи выделения тепла с постоянной интенсивностью и выделения тепла в слое, вне которого тепло не выделяется.

**) Эта задача рассмотрена в статье [20], где получена отличная от этой форма решения. Численные значения приведены в статье [9]. Полученный результат был распространен на случай учета усадки [21].

Если $b < r < a$, то

$$v = \frac{\varkappa A_0 a}{K\lambda r} e^{-\lambda t} \left\{ \frac{\sin r (\lambda/\varkappa)^{1/2}}{\sin a (\lambda/\varkappa)^{1/2}} - \frac{r}{a} \right\} +$$

$$+ \frac{\varkappa A_0 a}{K\lambda r} e^{-\lambda t} \frac{\sin (a-r) (\lambda/\varkappa)^{1/2}}{\sin a (\lambda/\varkappa)^{1/2}} \left\{ \frac{b \cos b (\lambda/\varkappa)^{1/2}}{a} - \frac{\sin b (\lambda/\varkappa)^{1/2}}{a (\lambda/\varkappa)^{1/2}} \right\} +$$

$$+ \frac{2a^3 A_0}{\pi r K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2\pi^2 - a^2\lambda/\varkappa)} \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi b}{a} - \frac{b}{an} \cos \frac{n\pi b}{a} \right\} \times$$

$$\times \sin \frac{n\pi r}{a} \exp \left[- \frac{\varkappa n^2 \pi^2 t}{a^2} \right]. \quad (8.16)$$

Соотношение типа (8.15) можно также вывести и обычным путем.

VIII. *В области $0 < r < a$ выделение тепла определяется функцией $f(r)$. Начальная температура и температура поверхности равны нулю.*

$$v = -\frac{2a}{\pi^2 r K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[- \frac{\varkappa n^2 \pi^2 t}{a^2} \right] \sin \frac{n\pi r}{a} \int_0^a r' \sin \frac{n\pi r'}{a} f(r')\, dr' +$$

$$+ \frac{1}{K} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 f(r')\, dr' + \int_r^a r' f(r')\, dr' - \frac{1}{a} \int_0^a r'^2 f(r')\, dr' \right\}, \quad (8.17)$$

или

$$v = \frac{(\varkappa t)^{1/2}}{Kr} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a r' f(r')\, dr' \left\{ \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{2na + r' - r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{2na + r' + r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] - \right.$$

$$\left. - \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{(2n+2) a - r' - r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] + \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{(2n+2) a - r' + r}{2 (\varkappa t)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (8.18)$$

IX. *Нулевая начальная температура. Количество тепла, выделяемого в единицу времени, равно постоянной A_0. Теплообмен на поверхности со средой нулевой температуры.*

$$v = \frac{A_0}{6hK} \{ h (a^2 - r^2) + 2a \} - \frac{2ha^2 A_0}{rK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin r\alpha_n e^{-\varkappa \alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2 \left[a^2 \alpha_n^2 + ah (ah - 1) \right] \sin a\alpha_n}, \quad (8.19)$$

где $\pm \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — корни уравнения

$$a\alpha \operatorname{ctg} a\alpha = 1 - ah. \quad (8.20)$$

X. *Если начальная температура* [23] *равна*

$$\frac{A_0 (a^2 - r^2)}{6K}$$

(т. е. равна установившейся температуре в случае нулевой температуры поверхности) и при $r = a$ для $t > 0$ происходит теплообмен со средой температуры V, то

$$v = \frac{(a^2 - r^2) A_0}{6K} + \left(V + \frac{aA_0}{3hK} \right) \left[1 - \frac{2a^2 h}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin r\alpha_n}{\{ a^2 \alpha_n^2 + ah (ah - 1) \} \sin a\alpha_n} e^{-\varkappa \alpha_n^2 t} \right],$$

где α_n — положительные корни уравнения (8.20).

§ 9. Полый шар*) $a < r < b$

Если начальная температура шара равна $f(r)$ и при $t > 0$ поверхности $r = a$ и $r = b$ поддерживаются при постоянных температурах v_1 и v_2, то решение **), получаемое из (4.1) гл. III, имеет следующий вид:

$$v = \frac{av_1}{r} + \frac{(bv_2 - av_1)(r-a)}{r(b-a)} + \frac{2}{r\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{bv_2 \cos n\pi - av_1}{n} \sin\frac{n\pi(r-a)}{(b-a)} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{(b-a)^2}\right] + \frac{2}{r(b-a)}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi(r-a)}{b-a} \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{(b-a)^2}\right] \int_a^b r' f(r') \sin\frac{n\pi(r'-a)}{b-a}\,dr'. \quad (9.1)$$

Если температуры поверхностей равны $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ соответственно, то решение получается из (5.2) гл. III совершенно аналогичным образом.

Если на поверхностях $r = a$ и $r = b$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры и граничные условия имеют вид

$$k_1 \frac{\partial v}{\partial r} - h_1 v = 0, \qquad r = a,$$

и

$$k_2 \frac{\partial v}{\partial r} + h_2 v = 0, \qquad r = b,$$

то решение запишется следующим образом:

$$v = \frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} R_n(r) \int_a^b r' R_n(r') f(r')\,dr', \quad (9.2)$$

где

$$G = ah_1 + k_1, \qquad H = bh_2 - k_2,$$

$$R_n(r) = \frac{\left(H^2 + b^2k_2^2\alpha_n^2\right)^{1/2} \left\{G\sin(r-a)\alpha_n + ak_1\alpha_n\cos(r-a)\alpha_n\right\}}{\left\{(b-a)\left(a^2k_1^2\alpha_n^2 + G^2\right)\left(b^2k_2^2\alpha_n^2 + H^2\right) + (Hak_1 + Gbk_2)\left(GH + abk_1k_2\alpha_n^2\right)\right\}^{1/2}}$$

и $\pm\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — корни уравнения

$$(GH - abk_1k_2\alpha^2)\sin(b-a)\alpha + \alpha(ak_1H + bk_2G)\cos(b-a)\alpha = 0.$$

Везде выше k_1, k_2, h_1 и h_2 должны равняться положительным величинам или нулю. Поэтому соотношение (9.2) служит решением для различных случаев, в которых поверхность либо имеет нулевую температуру, либо на ней происходит теплообмен, либо тепловой поток через поверхность равен нулю. Если $h_1 = h_2 = 0$, т. е. теплоотдачи на поверхности нет, то к (9.2) следует добавить член

$$\frac{3}{(b^3 - a^3)}\int_a^b r^2 f(r)\,dr.$$

Распространение решения на случай теплообмена на поверхностях $r = a$ и $r = b$ со средами с различными температурами, производится так же, как это было сделано в конце § 9 гл. III.

---

*) Ряд результатов, а также некоторые их практические приложения приведены в статье [24].

**) Эти решения, конечно, применимы также и для радиального потока в конической области. В статье [25] рассмотрен случай слегка суживающейся трубки.

Если область $a < r < b$ находится вначале при нулевой температуре, а при $t > 0$ на поверхности $r = a$ тепловой поток равен постоянной величине F_0, а поверхность $r = b$ поддерживается при нулевой температуре, то

$$v = \frac{a^2(b-r)F_0}{Kbr} + \frac{2a^2F_0}{Kr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+a^2\alpha_n^2\right)^{1/2}\sin\alpha_n(b-r)}{\alpha_n\left[b+a^2(b-a)\alpha_n^2\right]}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \qquad (9.3)$$

где α_n, $n = 1, 2, \ldots$, — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}(b-a)\alpha + a\alpha = 0.$$

§ 10. Область, ограниченная изнутри сферической поверхностью $r = a$

Пусть начальная температура описывается функцией $f(r)$, а температура поверхности — функцией $\varphi(t)$.

Произведем, как обычно, подстановку $u = vr$; тогда нам нужно решить уравнение (3.2) в области $r > a$ с $u = a\varphi(t)$ на поверхности $r = a$ и $u = rf(r)$ для начального момента времени. Решение, вытекающее из соотношений (4.1) и (5.1) гл. II имеет вид

$$v = \frac{1}{2r\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_a^{\infty} r'f(r')\left\{\exp\left[-\frac{(r-r')^2}{4\varkappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(r+r'-2a)^2}{4\varkappa t}\right]\right\}dr' +$$
$$+ \frac{2a}{r\sqrt{\pi}}\int_{(r-a)/2\sqrt{\varkappa t}}^{\infty}\varphi\left[t - \frac{(r-a)^2}{4\varkappa\mu^2}\right]e^{-\mu^2}d\mu. \qquad (10.1)$$

В частности, при нулевой начальной температуре и постоянной температуре поверхности V решение имеет следующий вид:

$$v = \frac{aV}{r}\Phi^*\left[\frac{r-a}{2\sqrt{\varkappa t}}\right]. \qquad (10.2)$$

Если начальная температура равна нулю и на поверхности происходит теплообмен со средой температуры V, то граничное условие для v имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial r} = h(v - V), \qquad r = a,$$

а граничное условие для $u = rv$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u\left(h + \frac{1}{a}\right) - hVa, \qquad r = a.$$

Отсюда, записывая $h' = h + (1/a)$, находим из (7.5) гл. II

$$v = \frac{ha^2V}{r(ah+1)}\left\{\Phi^*\left[\frac{r-a}{2\sqrt{\varkappa t}}\right] - \exp\left[h'(r-a) + h'^2\varkappa t\right]\Phi^*\left[\frac{r-a}{2\sqrt{\varkappa t}} + h'\sqrt{\varkappa t}\right]\right\}. \qquad (10.3)$$

Решение для области $r > a$ с начальной температурой V, охлаждающейся в результате теплообмена на поверхности $r = a$ со средой нулевой температуры, получается путем вычитания соотношения (10.3) из V. Решение для произвольной начальной температуры вытекает из (7.15) гл. XIV.

Если начальная температура равна нулю и на поверхности $r = a$ тепловой поток имеет постоянную величину F_0 [26—28], то решение имеет вид

$$v = \frac{a^2F_0}{Kr}\left\{\Phi^*\left[\frac{r-a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] - \exp\left[\frac{r-a}{a} + \frac{\varkappa t}{a^2}\right]\Phi^*\left[\frac{r-a}{2(\varkappa t)^{1/2}} + \frac{(\varkappa t)^{1/2}}{a}\right]\right\}. \qquad (10.4)$$

§ 11. Шар с начальной температурой $f(r,\ \theta,\ \varphi)$. Температура поверхности $r=a$ равна нулю

В этом случае дифференциальные уравнения для v имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varkappa\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right\}, \tag{11.1}$$

$$v=f(r,\ \theta,\ \varphi) \quad \text{при} \quad t=0, \tag{11.2}$$

$$v=0 \quad \text{при} \quad r=a. \tag{11.3}$$

Положим $v=e^{-\varkappa\alpha^2 t}u$, где u — функция только r, θ и φ, и положим $\mu=\cos\theta$. Тогда из (11.1) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\alpha^2 u=0. \tag{11.4}$$

Полином Лежандра степени n, $P_n(\mu)$, где n — целое и положительное число, служит коэффициентом при h^n в разложении $(1-2\mu h+h^2)^{-1/2}$ и удовлетворяет уравнению Лежандра

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right\}+n(n+1)P_n=0.$$

Таким же образом присоединенная функция Лежандра [29—33]

$$P_n^m(\mu)=(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{d\mu^m}P_n(\mu) \tag{11.5}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_n^m}{d\mu}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}P_n^m=0. \tag{11.6}$$

Отсюда следует, что выражение *)

$$R_n(r)P_n^m(\mu)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \tag{11.7}$$

удовлетворяет уравнению (11.4) при условии, что $R_n(r)$ зависит только от r и что

$$\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR_n}{dr}+\left[\alpha^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]R_n=0. \tag{11.8}$$

Это приводит нас к выражению **)

$$R_n=(\alpha r)^{-1/2}J_{(n+1/2)}(\alpha r),$$

причем решение $J_{-(n+1/2)}(\alpha r)$ неприемлемо, поскольку при $r\to 0$ R_n стремится к бесконечности.

Таким образом, мы приходим к следующему решению уравнения (11.1):

$$e^{-\varkappa\alpha^2 t}(\alpha r)^{-1/2}J_{(n+1/2)}(\alpha r)P_n^m(\mu)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi, \tag{11.9}$$

где m и n — целые положительные числа.

Условия на границе удовлетворяются выражением (11.9), если α служит корнем уравнения

$$J_{(n+1/2)}(a\alpha)=0. \tag{11.10}$$

---

*) При $\theta=\pi$ второе решение уравнения (11.6) обращается в бесконечность и поэтому неприемлемо.

**) Эти функции можно выразить через тригонометрические [34]. В цитируемой книге приведены некоторые численные результаты.

Если, как и выше, принять, что функцию $f(r, \theta, \varphi)$ можно разложить в ряд, члены которого имеют вид

$$(\alpha r)^{-1/2} J_{(n+1/2)}(\alpha r) P_n^m(\mu) \frac{\cos}{\sin} m\varphi,$$

и что этот ряд можно почленно интегрировать, то легко найти коэффициенты разложения.

Пусть, например,

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha r)^{-1/2} J_{(n+1/2)}(\alpha r) \cdot P_n^m(\mu) \{A_{n,m,\alpha} \cos m\varphi + B_{n,m,\alpha} \sin m\varphi\},$$

и суммирование по α происходит по положительным корням уравнения (11.10).

Тогда

$$\int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) \cos m\varphi \, d\varphi = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha} (\alpha r)^{-1/2} J_{(n+1/2)}(\alpha r) P_n^m(\mu) \cdot A_{n,m,\alpha}.$$

Кроме того, мы знаем, что [29, 30, 32]

$$\int_{-1}^{1} [P_n^m(\mu)]^2 d\mu = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \tag{11.11}$$

и

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = 0, \qquad n \neq n'. \tag{11.12}$$

Отсюда

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(\mu) d\mu \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) \cos m\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \sum_{\alpha} A_{n,m,\alpha} (\alpha r)^{-1/2} J_{(n+1/2)}(\alpha r).$$

Наконец, из (5.2) гл. VII получаем

$$\int_0^a r^{3/2} J_{(n+1/2)}(\alpha r) dr \int_{-1}^{1} P_n^m(\mu) d\mu \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) \cos m\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi a^2 \alpha^{-1/2} [J'_{(n+1/2)}(a\alpha)]^2 (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} A_{n,m,\alpha}. \tag{11.13}$$

Если $m = 0$, то в этих формулах π следует заменить на 2π.

Коэффициент $B_{n,m,\alpha}$ можно найти аналогичным путем.

Итак, мы получаем решение нашей задачи в виде

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \sum_{m=0}^{n} e^{-\varkappa \alpha^2 t} (\alpha r)^{-\frac{1}{2}} J_{(n+1/2)}(\alpha r) P_n^m(\mu) \{A_{n,m,\alpha} \cos m\varphi + B_{n,m,\alpha} \sin m\varphi\}.$$

Здесь коэффициенты $A_{n,m,\alpha}$ и $B_{n,m,\alpha}$ определены выше, а суммирование по α происходит по положительным корням уравнения $J_{(n+1/2)}(a\alpha) = 0$. При наличии теплообмена на поверхности или при отсутствии через нее теплового потока задачи решают тем же путем, используя соответствующим образом измененное уравнение (11.10).

§ 12. Поверхность шара $r = a$ поддерживается при температуре $F(\theta, \varphi)$

Как и в предыдущем параграфе, разлагаем $F(\theta, \varphi)$ в ряд вида

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\mu)\{A_{n,m}\cos m\varphi + B_{n,m}\sin m\varphi\}, \tag{12.1}$$

где

$$A_{n,m} = \frac{(2n+1)}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1} P_n^m(\mu)\,d\mu \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi)\cos m\varphi\,d\varphi, \tag{12.2}$$

$$B_{n,m} = \frac{(2n+1)}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1} P_n^m(\mu)\,d\mu \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi)\sin m\varphi\,d\varphi, \tag{12.3}$$

и при $m = 0$ π, как и выше, следует заменить на 2π.

При установившейся температуре мы ищем решение уравнения

$$\nabla^2 v = 0,$$

которое при $r = a$ принимает вид (12.1). Такое решение имеет вид *)

$$v = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\mu)\{A_{n,m}\cos m\varphi + B_{n,m}\sin m\varphi\}. \tag{12.4}$$

Если температура поверхности является функцией только θ, например

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\mu), \tag{12.5}$$

то установившаяся температура определяется суммой

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\mu). \tag{12.6}$$

Такую форму будет иметь выражение для распределения температур земной коры, обусловленное уменьшением средней температуры от тропиков к полюсам.

Для шара с начальной температурой $f(r, \theta, \varphi)$ и температурой поверхности $F(\theta, \varphi)$ мы примем, как в § 14 гл. I,

$$v = u + w,$$

где u — решение приведенной выше задачи для случая установившейся температуры, а w — решение задачи, разобранной в предыдущем параграфе для случая начальной температуры $f(r, \theta, \varphi) - u$.

§ 13. Часть шара, вырезаемая конусом $\theta = \theta_0$. Температура поверхности равна нулю, начальная температура равна $f(r, \theta, \varphi)$

В данном случае дифференциальное уравнение для v имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial \mu}\right\} + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}, \tag{13.1}$$

где $\mu = \cos\theta$. Его следует решать при условиях

$$v = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \tag{13.2}$$

$$v = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0 \tag{13.3}$$

*) При $a = 0$ член, содержащий r, должен удовлетворять уравнению (11.8) предыдущего параграфа. Следовательно, он должен иметь вид r^n или r^{-n-1}, причем член r^{-n-1} неприемлем в области, содержащей начало координат.

и

$$v = f(r, \theta, \varphi) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Поступая так же, как и в § 11 данной главы, находим, что уравнение (13.1) удовлетворяется функцией

$$e^{-\varkappa\alpha^2 t} (\alpha r)^{-1/2} J_{n+1/2}(\alpha r) P_n^{-m}(\mu) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi, \tag{13.4}$$

где $P_n^{-m}(\mu)$ — обобщенная функция Лежандра (см. [29] или [35]), определяемая формулой

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{1}{\Gamma(1+m)} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left\{-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1}{2}(1-\mu)\right\}. \tag{13.5}$$

Здесь F — гипергеометрическая функция Гаусса. В функции (13.4) m должно равняться нулю или целому положительному числу, а n должно быть больше *) чем $-1/2$, но не должно быть целым числом. Функция (13.5) при нецелом n имеет особую точку при $\mu = -1$. Таким образом, она не была бы приемлемой в задаче для сплошного шара, разобранной в § 11 данной главы.

Если мы положим $\mu_0 = \cos\theta_0$, то из условия (13.3) найдем

$$P_n^{-m}(\mu_0) = 0, \tag{13.6}$$

и следовательно, n должно быть корнем этого уравнения **), превышающим $-1/2$.

Наконец, условие (13.2) требует, чтобы α было положительным корнем уравнения

$$J_{(n+1/2)}(\alpha a) = 0. \tag{13.7}$$

При таком выборе n и α выражение (13.4) удовлетворяет граничным условиям и не обращается в бесконечность внутри исследуемого тела.

Если, как и выше, предположить, что функцию $f(r, \theta, \varphi)$ можно разложить в ряд

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \sum_{n} (\alpha r)^{-1/2} J_{(n+1/2)}(\alpha r) P_n^{-m}(\mu) \left\{A_{m,\alpha,n} \cos m\varphi + B_{m,\alpha,n} \sin m\varphi\right\} \tag{13.8}$$

и что этот ряд можно почленно интегрировать, то, как и в § 11 данной главы, можно найти коэффициенты ряда. Единственное отличие здесь заключается в том, что в данном случае вместо соотношений (11.11) и (11.12) этой главы нужно использовать следующий результат: если m — любое положительное число или нуль, а n и n' — два различных, больших $-1/2$ корня уравнения $P_n^{-m}(\mu_0) = 0$, то

$$\int_{\mu_0}^{1} P_n^{-m}(\mu) P_{n'}^{-m}(\mu)\, d\mu = 0 \tag{13.9}$$

и

$$\int_{\mu_0}^{1} \left[P_n^{-m}(\mu)\right]^2 d\mu = -\frac{(1-\mu_0^2)}{2n+1} \frac{d}{dn} P_n^{-m}(\mu_0) \frac{d}{d\mu_0} P_n^{-m}(\mu_0). \tag{13.10}$$

Это доказывается в конце настоящего параграфа. Тогда найдем, как и в § 11 данной главы,

$$-A_{m,\alpha,n} \frac{\pi a^2 \alpha^{-1/2}(1-\mu_0^2)}{2(2n+1)} \frac{d}{dn} P_n^{-m}(\mu_0) \frac{d}{d\mu_0} P_n^{-m}(\mu_0) \left[J'_{(n+1/2)}(\alpha a)\right]^2 =$$

$$= \int_0^a r^{3/2} J_{(n+1/2)}(\alpha r)\, dr \int_{\mu_0}^{1} P_n^{-m}(\mu)\, d\mu \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) \cos m\varphi\, d\varphi. \tag{13.11}$$

---

*) Поскольку из (13.5) следует, что $P_{-n-1}^{-m}(\mu) = P_n^{-m}(\mu)$, эта функция симметрична относительно $n = -1/2$.

**) Численные значения приведены в [36].

Если $m = 0$, то в этих формулах π следует заменить на 2π. Коэффициенты $B_{m,\alpha,n}$ можно найти аналогичным путем. Таким образом, мы получим решение задачи в следующем виде:

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \sum_{n} e^{-\varkappa\alpha^2 t} (\alpha r)^{-1/2} J_{(n+1/2)}(\alpha r) P_n^{-m}(\mu) \{A_{m,\alpha,n} \cos m\varphi + B_{m,\alpha,n} \sin m\varphi\}, \quad (13.12)$$

где коэффициенты определяются так же, как и выше.

Если твердое тело является частью шара радиуса $r = a$, вырезанной конусом $\theta = \theta_0$ и плоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$, а температура его поверхностей равна нулю, то так же, как это делалось выше, следует разложить функцию $f(r, \theta, \varphi)$ в ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha} \sum_{n} A_{\alpha,m,n} (\alpha r)^{-1/2} J_{(n+1/2)}(\alpha r) P_n^{-m\pi/\varphi_0}(\mu) \sin \frac{m\pi\varphi}{\varphi_0}.$$

Аналогичный метод применим к телам, ограниченным другими поверхностями, записанными в полярных координатах.

Решение для конуса $\theta = \theta_0$ можно получить путем перехода к пределу решения (13.12) при $a \to \infty$. Это будет сделано в § 17 гл. XIV.

Остается еще доказать справедливость использованных выше соотношений (13.9) и (13.10).

Пусть

$$u = P_n^{-m}(\mu) \quad \text{и} \quad u' = P_{n'}^{-m}(\mu).$$

Тогда

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)u = 0,$$

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{du'}{d\mu}\right) + \left(n'(n'+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)u' = 0.$$

Следовательно,

$$(n'-n)(n'+n+1)\int_{\mu_0}^{1} uu'\,d\mu =$$

$$= \int_{\mu_0}^{1} \left\{u' \frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right) - u\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{du'}{d\mu}\right)\right\} d\mu =$$

$$= \left[(1-\mu^2)\left\{u'\frac{du}{d\mu} - u\frac{du'}{d\mu}\right\}\right]_{\mu_0}^{1}.$$

Отсюда следует, что если n и n' — два различных, больших чем $-1/2$ корня уравнения $P_n^{-m}(\mu_0) = 0$, то

$$\int_{\mu_0}^{1} P_n^{-m}(\mu) P_{n'}^{-m}(\mu)\,d\mu = 0.$$

Точно так же, когда $P_n^{-m}(\mu_0) = 0$, то

$$\int_{\mu_0}^{1} \{P_n^{-m}(\mu)\}^2 d\mu = -\frac{(1-\mu_0^2)}{2n+1} \lim_{n' \to n} \frac{1}{(n'-n)} \left[P_{n'}^{-m}(\mu_0)\frac{d}{d\mu_0}P_n^{-m}(\mu_0)\right] =$$

$$= -\frac{(1-\mu_0^2)}{2n+1}\frac{d}{dn}P_n^{-m}(\mu_0)\frac{d}{d\mu_0}P_n^{-m}(\mu_0).$$

§ 14. Температура внутри Земли

Знание температуры внутри Земли существенно для понимания многих геофизических явлений, например для понимания природы магнитного поля Земли, пластических свойств вещества Земли, а также для выяснения происхождения и причин вулканизма и тектонических движений. Однако если

другие величины, такие, как давление, плотность и упругие свойства, известны настолько хорошо, что спор может идти лишь о различиях в их оценке, составляющих несколько процентов, оценки температур сильно отличаются друг от друга. До сих пор нет достаточно надежного метода определения температуры на основании наблюдений, и поэтому в настоящее время для оценки внутренней температуры приходится прибегать к теоретическим расчетам, основанным на известной величине теплового потока у поверхности, принятом распределении радиоактивных материалов и принятом начальном распределении температур. Такие расчеты произведены в предположении постоянства температуропроводности *), хотя решения для «двухслойной» Земли были получены еще Хевисайдом (см. § 8 гл. XII).

В настоящее время придерживаются двух предположений относительно начальной температуры Земли: 1) вначале холодная Земля образовалась в результате слипания твердых частиц и 2) вначале горячая Земля находилась в газообразном состоянии и, постепенно охлаждаясь, перешла в жидкое состояние. «Холодная» Земля должна была бы иметь равномерно распределенную радиоактивность и постоянную начальную температуру и должна была бы разогреться, вероятно, до температуры плавления [39, 40]. При плавлении происходило бы перераспределение радиоактивных материалов, и последующие условия оказались бы очень похожими на условия в первоначально «горячей» Земле. В случае первоначально «горячей» Земли рассмотрение начинается с момента, когда вся она стала жидкой и быстро охлаждалась в результате излучения с поверхности, теплообмен в жидкой внутренней области осуществлялся бы конвекцией и градиент температуры равнялся бы адиабатическому градиенту **), примерно равному 0,2° С/*км*. В этом случае затвердевание началось бы в точке, в которой температура раньше упала до температуры плавления. Поскольку повышение температуры плавления с глубиной (обусловленное повышением давления) примерно равно 2° С/*км*, температура плавления будет сперва достигаться в некоторой точке внутренней области, вероятно, на границе между ядром Земли и ее оболочкой [42]. Далее затвердевание будет распространяться по направлению к поверхности. Таким образом, в данной задаче начальная температура Земли определяется кривой зависимости точки плавления от глубины; для описания этой кривой были предложены различные теоретические формулы [37, 41] ***).

После оценки начальной температуры и распределения радиоактивности расчет последующих температур по существу сводится к интегрированию соотношения (7.7) гл. XIV для случая сферического поверхностного источника. Тот факт, что значительная часть некоторых радиоактивных элементов успела уже распасться, вносит дополнительное усложнение, не учитывавшееся первыми исследователями. В ряде работ приведены численные расчеты, основанные на различных представлениях о внутреннем строении Земли [38, 43].

Следует отметить, что, принимая $\varkappa = 0{,}007$, радиус Земли $a = 6{,}4 \cdot 10^8$ *см* и $t = 1{,}26 \cdot 10^{17}$ *сек* ($4 \cdot 10^9$ лет), получим, что параметр $\varkappa t/a^2$ равен 0,0022. Данный случай является, таким образом, идеальным для использования

*) Хотя известно, что (в принципе) K может сильно меняться с глубиной, есть основания предполагать, что $\varkappa$ может оказаться достаточно постоянной величиной, равной в коре примерно 0,007 (см. [37]).

**) Общее изложение этого вопроса можно найти в [37, 40, 41].

***) В работе [43] отмечается, что кривые зависимости точки плавления от глубины могут быть такими, что затвердевание должно начинаться в центре Земли, переходить на внутреннюю часть ядра, а затем на границу между ядром и оболочкой, оставляя ядро жидким. Следует отметить, что расчеты указывают на весьма малое падение температуры в ядре за 10^9 лет.

решения, приведенного в § 5 гл. XII, для «малых промежутков времени», что установили еще Хевисайд и Джеффриз. Несмотря на это, многие авторы работали с обычным медленно сходящимся рядом, в котором зачастую необходимо использовать большое число членов. Ряд результатов приведен в §§ 3 и 8 гл. IX.

ЛИТЕРАТУРА

1. Laws, Bishop, McJunkin, Proc. Am. Acad. Arts Sci. **41**, 457 (1906).
2. Müller, Ann. Phys. und Chem. **60**, 82 (1897).
3. Green, Proc. Phys. Soc. **44**, 295 (1932).
4. Evans, Phil. Mag, **22**, 833—837 (1936).
5. Bromwich, Phil. Mag. **37**, 407—419 (1919).
6. McLeod, Phil. Mag. **37**, 134—144 (1919).
7. Jeffreys, Operational Methods in Mathematical Physics, ed. **2**, 1931, § 6, 4.
8. Evans, Proc. Phys. Soc. **50**, 242—256 (1947).
9. Van Orstrand, Geophysics **5**, 57—79 (1940).
10. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, Macmillan, ed. 2, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1947.)
11. Schack, Stahl u. Eisen **50**, 1290 (1930).
12. Heisler, Trans. ASME **69**, 227—236 (1947).
13. Weber, Vjschr. naturf. Ges. Zürich **23**, 209 (1878).
14. Ayrton, Perry, Phil. Mag. **5**, **241** (1878).
15. Peddie, Proc. Edin. Math. Soc. **19**, 34 (1901).
16. Dongall, Proc. Edin. Math. Soc. **19**, 50 (1901).
17. Paterson, Proc. Phys. Soc. **59**, 50—58 (1947).
18. Hoare, Phil. Mag. **29**, 52 (1940).
19. Slichter, Bull. Geol. Soc. Am. **52**, 561—600 (1941).
20. Lowan, Phys. Rev. **44**, 769—775 (1933).
21. Lowan, Am. J. Math. **57**, 174—182 (1935).
22. Allen, Am. Math. Monthly **63**, 315—323 (1956).
23. Awbery, Phil. Mag. **4**, 629 (1927).
24. Barrer, Phil. Mag. **35**, 802 (1944).
25. Talbot, Kitchener, Brit. J. Appl. Phys. **7**, 96—97 (1956).
26. Holm, J. Appl. Phys. **19**, 361—366 (1948).
27. Ingersoll, Adler, Plass, Ingersoll, Heat. Pip. Air Condit. 22, 113—122 (1950).
28. Von Bertele, Brit. J. Appl. Phys. **3**, 127—132 (1952).
29. Bateman, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, 1932.
30. Whittaker, Watson, Modern Analysis, Cambridge, ed. 3, 1920, Ch. XV. (Э. Уиттекер и Г. Ватсон, Курс современного анализа, ГТТИ, М., 1933.)
31. MacRobert, Spherical Harmonics, Methuen, 1927.
32. Byerly, Fourier's Series and Spherical Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics, Boston, 1893.
33. Hobson, Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge, 1931, Ch. III.
34. Watson, A Treatise on the theory of Bessel Functions, Cambridge, ed. 2, 1944. (Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.)
35. Barnes, Quart. J. Math. **39**, 97 (1908).
36. Pal, Bull. Calcutta Math. Soc. **9**, 85 (1917); **10**, 187 (1918).
37. Jacobs, Encycl. of Phys., Vol. 47 (Geophysics), p. 391.
38. Urry, Trans. Am. Geophys. Union **30**, 171 (1949).
39. Birch, J. Geophys. Res. **56**, 107 (1951).
40. Jeffreys, The Earth, Cambridge, ed. 3, 1952.
41. Bullard, см. сб. The Earth as a Planet, Ed. Kuiper, Univ. of Chicago Press, 1954.
42. Adams, J. Wash. Acad. Sci. **14**, 459—472 (1924).
43. Jacobs, Trans. Am. Geophys. Union **35**, 161—163 (1954).

ГЛАВА X

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ К ЗАДАЧАМ С НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ТЕМПЕРАТУРОЙ

§ 1. Введение

Представление о *мгновенном точечном источнике тепла*, т. е. о конечном количестве тепла, мгновенно выделяемом в определенный момент времени в заданной точке неограниченного тела, оказалось в теории теплопроводности чрезвычайно плодотворным [1]. Одно из больших преимуществ этого метода заключается в том, что он основан на очень простом физическом представлении, что дает возможность получить решение большого числа важных задач, исходя непосредственно из ряда фундаментальных положений. С теоретической точки зрения всегда признавалось, что в случае точечного источника получается фундаментальное решение $(1/r)$, встречающееся в теории потенциала, и что полная разработка теории теплопроводности для ограниченных областей может быть достигнута путем построения функций Грина, аналогичных этим функциям в теории потенциала *).

Будем называть решение для случая мгновенного точечного источника фундаментальным. Интегрируя по времени, мы получим решение для *непрерывного точечного источника*, что соответствует случаю выделения заданного количества тепла в данной точке в единицу времени, равного $\varphi(t)$. Если $\varphi(t)$ равно постоянной величине Q и выделение тепла продолжается достаточно долго, то в пределе решение совпадает с решением для *стационарного точечного источника* и соответствует хорошо известным фундаментальным решениям гидродинамики. Задачи со стационарными источниками рассматриваются в гл. XVI.

Интегрируя решения для точечных источников по соответствующим координатам, мы получим решения для мгновенных и непрерывных линейных, плоских, сферических и цилиндрических поверхностных источников, причем каждое имеет свою собственную простую физическую интерпретацию.

Применяя для конечных областей эти решения или соответствующие решения гл. XIX, можно сразу же получить решения многих задач в виде определенных интегралов.

§ 2. Мгновенный точечный источник

Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.1}$$

*) Среди основных работ, посвященных этому вопросу, укажем статьи [27—30, 33, 39]. См. также литературу к § 1 гл. XIV.

удовлетворяется функцией

$$v = \frac{Q}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4\varkappa t}\right\}. \tag{2.2}$$

Если $t \to 0$, это выражение стремится к нулю везде, кроме точки (x', y', z'), где оно обращается в бесконечность.

Общее количество тепла в неограниченной области равно

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho c v \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{Q\rho c}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right] dx \int_{\infty-}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\varkappa t}\right] dy \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\varkappa t}\right] dz = Q\rho c. \tag{2.3}$$

Таким образом, решение (2.2) можно интерпретировать как распределение температур в неограниченном теле, обусловленное мгновенным выделением в момент времени $t=0$ в точке (x, y, z) количества тепла $Q\rho c$. Это фундаментальное решение, соответствующее мгновенному точечному источнику мощностью Q в момент $t=0$ в точке (x', y', z') *).

Следует отметить, что температура в точке, находящейся на расстоянии r от источника, достигает максимальной величины в момент времени $t = r^2/6\varkappa$. Точно так же квадрат расстояния точек максимума температуры от источника в момент t равен $6\varkappa t$.

Так как температуру в неограниченном теле с начальной температурой $f(x, y, z)$ можно рассматривать как результат выделения в объеме тела при $t=0$ количества тепла, равного

$$\rho c f(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz' \tag{2.4}$$

в элементарном объеме $dx'\, dy'\, dz'$, имеющем координаты (x', y', z'), то температуру в любой момент времени t можно определить интегрированием по объему тела; она равна

$$\frac{1}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x', y', z') \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4\varkappa t}\right\} dx'\, dy'\, dz' \tag{2.5}$$

(см. также (2.8) гл. II).

Интересно получить решение (2.2) как предел действительного случая, когда в бесконечно малом объеме выделяется конечное количество тепла. Предположим, что мы берем этот объем в виде шара радиуса a и рассмотрим неограниченную среду для случая, когда начальная температура шара $0 \leqslant r < a$ равна V, а в области $r > a$ она равна нулю. Если, как и в § I гл. IX, положить $u = vr$, то уравнение для u

*) Мощность источника численно равна, таким образом, температуре, на которую выделяемое количество тепла повышало бы температуру единицы объема материала. Это определение обладает тем преимуществом, что начальное распределение температуры $f(x, y, z)$ можно считать вызванным действием распределенных мгновенных источников мощностью $f(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'$ в элементе объема $dx'\, dy'\, dz'$ в точке (x', y', z'), как и в выражении (2.4). Однако при рассмотрении количества выделяемого источником тепла, всегда следует помнить, что оно равно ρc, умноженному на мощность источника.

примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},\qquad r>0,$$

при условиях

$$u=Vr \quad \text{при} \quad t=0,\quad 0<r<a,$$
$$u=0 \quad \text{при} \quad t=0,\quad r>a,$$
$$u=0 \quad \text{при} \quad r=0.$$

В этом случае решение вытекает из соотношения (4.1) гл. II и имеет вид *)

$$v=\frac{V}{2r(\pi\varkappa t)^{1/2}}\int_0^a r'\left\{\exp\left[-\frac{(r-r')^2}{4\varkappa t}\right]-\exp\left[-\frac{(r+r')^2}{4\varkappa t}\right]\right\}dr'=$$
$$=\frac{V}{2r(\pi\varkappa t)^{1/2}}\exp\left[-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right]\int_0^a r'\exp\left[-\frac{r'^2}{4\varkappa t}\right]\left\{\exp\left[\frac{rr'}{2\varkappa t}\right]-\exp\left[-\frac{rr'}{2\varkappa t}\right]\right\}dr',$$

т. е.

$$v=\frac{1}{2}V\left\{\Phi\frac{r+a}{2(\varkappa t)^{1/2}}-\Phi\frac{r-a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right\}-\frac{2(\varkappa t)^{1/2}}{r\pi^{1/2}}\left\{\exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4\varkappa t}-\exp\left[-\frac{(r+a)^2}{4\varkappa t}\right]\right\}\right.. \tag{2.6}$$

Разлагая подынтегральную функцию в ряд по степеням r и предполагая, что a мало, получим приближенное решение

$$v=\frac{Q}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}}\exp\left[-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right]\left\{1+\left(\frac{r^2}{\varkappa t}-6\right)\frac{a^2}{40\varkappa t}\right\}, \tag{2.7}$$

где $Q=4\pi a^3V/3$.

Пусть теперь радиус шара стремится к нулю, но Q остается постоянным. Тогда решение (2.7) примет вид

$$v=\frac{Q}{8(\pi kt)^{3/2}}\exp\left[-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right].$$

Это решение для случая выделения тепла в начале координат совпадает с решением (2.2).

Наконец, приведем результаты некоторых обобщений метода мгновенного точечного источника на более сложные системы.

I. *Для анизотропного материала* с главными коэффициентами теплопроводности K_1, K_2, K_3 в направлении осей x, y и z, решение (2.2) следует заменить на

$$\frac{Q(\rho c)^{3/2}}{8(\pi^3t^3K_1K_2K_3)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{\rho c}{4t}\left[\frac{(x-x')^2}{K_1}+\frac{(y-y')^2}{K_2}+\frac{(z-z')^2}{K_3}\right]\right\}. \tag{2.8}$$

II. *Мгновенный тепловой источник в тонком стержне.*

Предположим, что на поверхности стержня с площадью поперечного сечения ω и периметром сечения p происходит теплообмен со средой нулевой температуры. Пусть коэффициент теплоотдачи равен H. Тогда функция

$$v=\frac{Q'}{2\omega\rho c(\pi\varkappa t)^{1/2}}\exp\left[-\nu t-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right], \tag{2.9}$$

где $\nu=Hp/\rho c\omega$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2) гл. IV и соответствует количеству тепла Q', выделяемому в момент $t=0$ в точке $x=x'$.

III. *Мгновенный тепловой источник в тонкой пластине.*

Пусть пластина толщиной D располагается в плоскости $z=0$ и на обеих ее сторонах происходит теплообмен со средой нулевой температуры, причем коэффициент теплоотдачи равен H. Дифференциальным уравнением для этой задачи служит уравнение (4.1) гл. V. Тогда функция

$$v=\frac{Q'}{4\pi KDt}\exp\left[-\varkappa k^2t-\frac{x^2+y^2}{4\varkappa t}\right] \tag{2.10}$$

(где $k^2=2H/KD$) удовлетворяет дифференциальному уравнению и соответствует количеству тепла Q', выделяемому в момент $t=0$ в начале координат.

---

*) Решение (2.6) было использовано в работе [2] при изучении охлаждения больших сферических масс горных пород (лакколит). Численные результаты для этого случая приведены на рис. 4, *в*.

§ 3. Мгновенные источники; линейный, плоский и поверхностные цилиндрический и сферический источники

Температуры в этих случаях проще всего получить интегрированием фундаментального решения (2.2) данной главы; их можно найти также непосредственно, воспользовавшись любым из способов, рассмотренных в предыдущем параграфе.

I. *Мгновенный линейный источник мощностью Q, действующий в момент времени $t=0$ и расположенный на прямой, параллельной оси z и проходящей через точку (x', y').*

Рассмотрим распределение мгновенных точечных источников мощностью $Q\,dz'$ в точках z' вдоль прямой. Температура, получающаяся интегрированием соотношения (2.2) предыдущего параграфа, равна

$$v=\frac{Q}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\exp\left\{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4\varkappa t}\right\}=\frac{Q}{4\pi\varkappa t}\exp\left[-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4\varkappa t}\right]. \quad (3.1)$$

В данном случае количество тепла, выделяемое на единице длины этой прямой, равно $Q\rho c$.

Если (r, θ) и (r', θ') — полярные координаты соответственно точек (x, y) и (x', y'), то расстояние между ними определяется выражением

$$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta'). \quad (3.2)$$

В таких обозначениях решение (3.1) принимает вид

$$v=\frac{Q}{4\pi\varkappa t}e^{-R^2/4\varkappa t}=\frac{Q}{2\pi}\int_0^{\infty}\lambda e^{-\varkappa\lambda^2 t}J_0(\lambda R)\,d\lambda; \quad (3.3)$$

оно вытекает из первого интеграла Вебера [3].

II. *Мгновенный плоский источник мощностью Q, действующий в момент времени $t=0$, расположенный в плоскости, параллельной плоскости $x=0$ и проходящей через точку x'.*

В данном случае распределим линейные источники мощностью $Q\,dy'$ вдоль прямой $x=x'$. Интегрируя (3.1), получим

$$v=\frac{Q}{4\pi\varkappa t}\int_{-\infty}^{\infty}dy'\exp\left\{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4\varkappa t}\right\}=\frac{Q}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]. \quad (3.4)$$

Количество тепла, выделяемое на единице площади этой плоскости, равно $Q\rho c$.

III. *Мгновенный цилиндрический поверхностный источник мощностью Q' и радиусом r', действующий в момент времени $t=0$. Ось источника совпадает с осью z.*

Здесь распределим линейные источники мощностью $Qr'\,d\theta'$ по окружности радиуса r'. В таком случае температура в точке (r, θ) будет равна

следующей величине:

$$\frac{Qr'}{4\pi\varkappa t}\int\limits_0^{2\pi}\exp\left[-\frac{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}{4\varkappa t}\right]d\theta'=$$

$$=\frac{Qr'}{4\pi\varkappa t}\exp\left[-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right]\int\limits_0^{2\pi}\exp\frac{rr'\cos\theta'}{2\varkappa t}\,d\theta'=\frac{Q'}{4\pi\varkappa t}\exp\left[-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right]I_0\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right), \tag{3.5}$$

где $Q'=2\pi r'Q$. Решение получается из соотношения (9), приведенного в § 3, 71 книги [3]. Количество тепла, выделяемое на единицу длины цилиндра, равно $\rho cQ'$.

IV. *Мгновенный сферический поверхностный источник мощностью Q' и радиусом r', действующий в момент времени $t=0$.*

В данном случае, используя сферические координаты, мы рассмотрим точечный источник мощностью $Qr'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$, действующий в точке шара (r', θ', φ).

Тогда температура в точке $(r, 0, 0)$ равна следующей величине:

$$\frac{2\pi Qr'^2}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}}\int\limits_0^{\pi}\exp\left[-\frac{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}{4\varkappa t}\right]\sin\theta'\,d\theta'=$$

$$=\frac{Qr'^2}{4\pi^{1/2}(\varkappa t)^{3/2}}\exp\left[-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right]\int\limits_0^{\pi}\exp\left[\frac{rr'\cos\theta'}{2\varkappa t}\right]\sin\theta'\,d\theta'=$$

$$=\frac{Qr'^2}{4\pi^{1/2}(\varkappa t)^{3/2}}\exp\left[-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right]\int\limits_{-1}^{+1}\exp\left[\frac{rr'\mu}{2\varkappa t}\right]d\mu=$$

$$=\frac{Q'}{8\pi rr'(\pi\varkappa t)^{1/2}}\left\{\exp\left[-\frac{(r-r')^2}{4\varkappa t}\right]-\exp\left[-\frac{(r+r')^2}{4\varkappa t}\right]\right\}, \tag{3.6}$$

где $Q'=4\pi r'^2Q$. Количество тепла, выделяемое на поверхности шара, равно $Q'\rho c$.

V. *Мгновенный источник мощностью Q' в виде окружности радиуса r', действующий в плоскости $z'=0$ в момент времени $t=0$.*

Если мгновенные точечные источники мощностью $Qr'\,d\theta'$ расположены на окружности $r=r'$ в плоскости $z'=0$, то температура в момент времени $t=0$ в точке с координатами (r, θ, z') равна

$$\frac{Qr'}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}}\int\limits_0^{2\pi}\exp\left[-\frac{r^2+z^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}{4\varkappa t}\right]d\theta'=$$

$$=\frac{Q'}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}}\exp\left[-\frac{r^2+r'^2+z^2}{4\varkappa t}\right]I_0\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right), \tag{3.7}$$

где $Q'=2\pi r'Q$, а полное количество выделяемого тепла равно $\rho cQ'$.

VI. *Мгновенный источник в виде диска радиуса a, действующий в плоскости $z=0$ в момент времени $t=0$.*

Положим в выражении (3.7) $Q'=2\pi r'q\,dr'$ и проинтегрируем по r' от 0 до a; тогда, если на диске радиуса a мгновенно выделяется количество тепла $\pi a^2q\rho c$, то

мы получим для температуры выражение

$$\frac{q}{4(\pi\varkappa^3 t^3)^{1/2}} \int_0^a \exp\left[-\frac{r^2+r'^2+z^2}{4\varkappa t}\right] I_0\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right) r'\,dr' = \tag{3.8}$$

$$= \frac{qa}{2(\pi\varkappa t)^{1/2}} e^{-z^2/4\varkappa t} \int_0^\infty e^{-\varkappa t\lambda^2} J_0(\lambda r) J_1(\lambda a)\,d\lambda. \tag{3.9}$$

За исключением случая, когда $r = a$, этот интеграл нельзя выразить через табличные функции. При $r = a$ мы получаем

$$\frac{q}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} [1 - e^{-a^2/4\varkappa t}] e^{-z^2/4\varkappa t}. \tag{3.10}$$

VII. *Неограниченная область с начальной температурой, заданной функцией $f(r)$ в цилиндрических координатах.*

Из соотношения (3.5) следует, что температура v в момент времени t записывается в виде

$$v = \frac{1}{2\varkappa t} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right] I_0\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right) f(r')\, r'\,dr'. \tag{3.11}$$

Если

$$f(r) = V = \text{const}, \quad 0 < r < a,$$
$$f(r) = 0, \quad r > 0,$$

то выражение (3.11) принимает вид

$$v = \frac{V}{2\varkappa t} e^{-r^2/4\varkappa t} \int_0^a e^{-r'^2/4\varkappa t} I_0\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right) r'\,dr'. \tag{3.12}$$

Этот интеграл следует определять численным методом *), за исключением случая $r = 0$, когда он равен

$$V(1 - e^{-a^2/4\varkappa t}). \tag{3.13}$$

Некоторые значения v/V, рассчитанные по уравнению (3.12), приведены на рис. 4, *б*.

§ 4. Непрерывные и периодические источники **)

I. *Непрерывный точечный источник.*

Если в точке (x', y', z') в интервале времени от $t = 0$ до $t = t$ выделяется в единицу времени количество тепла $\varphi(t)\rho c$, то температура в точке (x, y, z) в момент времени t, полученная интегрированием соотношения (2.2) данной главы, будет равна

$$\frac{1}{8(\pi\varkappa)^{3/2}} \int_0^t \varphi(t') \exp\left[-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t')}\right] \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}, \tag{4.1}$$

где

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Говорят, что такое распределение температур обусловливается действием с момента времени $t = 0$ постоянного точечного источника мощностью $\varphi(t)$.

---

*) Этот интеграл называется P-функцией. Таблица его значений приведена в статье [4].

**) Под непрерывным или периодическим источником автор понимает источник, мощность которого описывается непрерывной или периодической функцией соответственно. (*Прим. ред.*)

Если мощность источника $\varphi(t)$ постоянна и равна q, то мы получим, положив $\tau=(t-t')^{-1/2}$,

$$v=\frac{q}{4(\pi\varkappa)^{3/2}}\int_{1/\sqrt{t}}^{\infty}\exp\left[-\frac{r^2\tau}{4\varkappa}\right]d\tau=\frac{q}{4\pi\varkappa r}\,\Phi^*\left[\frac{r}{\sqrt{4\varkappa t}}\right]. \qquad (4.2)$$

При $t=\infty$ это выражение сводится к $v=q/4\pi\varkappa r$, т. е. дает установившееся распределение температуры для случая распространения тепла в неограниченном теле от точки (x', y', z'), в которой осуществляется постоянный подвод тепла.

II. *Непрерывный линейный источник.*

Предположим, что на единицу длины линии, параллельной оси z и проходящей через точку (x', y'), в единицу времени выделяется количество тепла, равное $\rho c\varphi(t)$. Если подвод тепла начинается в момент времени $t=0$, когда тело имеет нулевую температуру, то, согласно (3.1) данной главы, температура в момент $t=0$ будет равна

$$\frac{1}{4\pi\varkappa}\int_0^t \varphi(t')\exp\left[-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t')}\right]\frac{dt'}{t-t'}, \qquad (4.3)$$

где $r^2=(x-x')^2+(y-y')^2$.

Если $\varphi(t)=q=\text{const}$, мы получим

$$v=\frac{q}{4\pi\varkappa}\int_{r^2/4\varkappa t}^{\infty}\frac{e^{-u}\,du}{u} \qquad (4.4)$$

$$v=-\frac{q}{4\pi\varkappa}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right), \qquad (4.5)$$

где *)

$$-\mathrm{Ei}(-x)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du$$

является интегральной показательной функцией. Численные значения этой функции можно найти в работе [5].

Для малых значений x

$$\mathrm{Ei}(-x)=\gamma+\ln x-x+\frac{1}{4}x^2+O(x^3),$$

где $\gamma=0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера. Таким образом, для больших значений t приближенно имеем

$$v=\frac{q}{4\pi\varkappa}\ln\frac{4\varkappa t}{r^2}-\frac{\gamma q}{4\pi\varkappa}. \qquad (4.6)$$

Часть выражения (4.6), содержащая r, т. е. $(q/2\pi\varkappa)\ln(1/r)$, дает температуру, обусловленную постоянным подводом тепла, количество которого в единицу времени на единицу длины равно $q\rho c$. Это решение имеет очень

---

*) $-\mathrm{Ei}(-x)=\gamma+\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n\cdot n!}$ см. СМБ, Операционное исчисление, Физматгиз, 1961. (*Прим. ред.*)

большое значение. Оно определяет распределение температур в неограниченном теле, нагреваемом вдоль какой-либо линии (например, нагрев бесконечно тонкой проволокой, по которой пропускается электрический ток), и следовательно, является приближенным решением для случая нагревания неограниченного тела проволокой, по которой идет ток *).

Влияние конечного диаметра проволоки будет рассмотрено в § 7 гл. XIII.

Если полуограниченное тело, поверхность которого поддерживается при нулевой температуре, нагревается линейным источником, расположенным параллельно поверхности тела на расстоянии a от нее, то искомое решение можно получить методом изображений, описанным в § 10 данной главы. Это решение имеет вид

$$v = -\frac{q}{4\pi\varkappa}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_1^2}{4\varkappa t}\right)\right], \tag{4.7}$$

где r и r_1 — расстояния точки до линейного источника и до его зеркального изображения относительно поверхности соответственно.

III. *Непрерывный цилиндрический поверхностный источник.*

Искомое решение получается из соотношения (3.5) предыдущего параграфа. Его нельзя выразить через табличные функции **).

IV. *Непрерывный плоский источник.*

Предположим, что, начиная с момента $t = 0$, в плоскости x' начинает выделяться количество тепла, равное в единицу времени на единицу площади $\rho c \varphi(t)$. Тогда, согласно (3.4), температура в момент времени t будет равна

$$v = \frac{1}{2(\pi\varkappa)^{1/2}} \int_0^t \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa(t-t')}\right] \frac{\varphi(t')\,dt'}{(t-t')^{1/2}}. \tag{4.8}$$

Если $\varphi(t) = q = \mathrm{const}$, решение принимает вид

$$v = q\left(\frac{t}{\pi\varkappa}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right] - \frac{q\,|x-x'|}{2\varkappa}\,\Phi^*\left[\frac{|x-x'|}{2\sqrt{\varkappa t}}\right]. \tag{4.9}$$

V. *Непрерывный сферический поверхностный источник.*

Если на шаровой поверхности радиуса r', начиная с момента $t = 0$, выделяется количество тепла, равное в единицу времени на единицу площади $\rho c \varphi(t)$, то температура в точке r в момент времени t запишется в виде

$$v = \frac{1}{8\pi r r' (\pi\varkappa)^{1/2}} \int_0^t \left\{\exp\left[-\frac{(r-r')^2}{4\varkappa(t-t')}\right] - \exp\left[-\frac{(r+r')^2}{4\varkappa(t-t')}\right]\right\} \frac{\varphi(t')\,dt'}{(t-t')^{1/2}}. \tag{4.10}$$

Если $\varphi(t) = q = \mathrm{const}$, то решение принимает вид

$$v = \frac{q}{8\pi\varkappa r r'}\left\{2(\varkappa t/\pi)^{1/2}\left\{\exp\left[-\frac{(r-r')^2}{4\varkappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(r+r')^2}{4\varkappa t}\right]\right\} - \right.$$
$$\left. - |r-r'|\,\Phi^*\left[\frac{|r-r'|}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] + (r+r')\,\Phi^*\left[\frac{r+r'}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}. \tag{4.11}$$

VI. *Периодический* ***) *точечный источник.*

Если, начиная с момента времени $t = -\infty$ до $t = t$, в единицу времени выделяется количество тепла $\rho c e^{i\omega t}$, т. е. имеют место установившиеся периодические

---

*) Этим решением часто пользуются для определения теплопроводности [6,7].

**) В работе [40] это решение используется как приближенное решение при исследовании нагревания грунта проложенным в нем электрическим кабелем.

***) Движущиеся периодические источники рассматривались в [8, 9].

условия, то, как и в случае I, получим

$$v=\frac{1}{8(\pi\varkappa)^{3/2}}\int_{-\infty}^{t}\exp\left[i\omega t'-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t')}\right]\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}=\frac{1}{4\pi\varkappa r}\exp\left[-k^*r+i(\omega t-k^*r)\right], \quad (4.12)$$

где

$$k^*=(\omega/2\varkappa)^{1/2}.$$

Таким же образом можно рассматривать и периодический плоский источник. Соответствующие решения приведены в § 6 гл. II.

VII. *Периодический линейный источник.*

Если, начиная с момента времени $t=-\infty$ до $t=t$, в единицу времени на единицу длины выделяется количество тепла $\rho c e^{i\omega t}$, то

$$v=\frac{1}{4\pi\varkappa}\int_{-\infty}^{t}\exp\left[i\omega t'-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t')}\right]\frac{dt'}{t-t'}=\frac{1}{2\pi\varkappa}e^{i\omega t}K_0\left[\left(\frac{i\omega}{\varkappa}\right)^{1/2}r\right], \quad (4.13)$$

где r — расстояние до линейного источника.

§ 5. Поверхностный нагрев полуограниченной области

Задачи, в которых область $z>0$ нагревается постоянным тепловым потоком, поступающим через участок ее поверхности, имеют большое значение, например, при рассмотрении высокочастотного индукционного нагрева. Их можно достаточно просто решить интегрированием решений, приведенных в предыдущем параграфе для непрерывных источников. Во всех исследуемых ниже случаях мы будем считать, что область $z>0$ имеет нулевую начальную температуру и что тепловой поток через другие участки поверхности равен нулю.

I. *При $t>0$ тепловой поток q подводится к телу через полуплоскость $x<0$, $-\infty<y<\infty$, $z=0$.*

Температура v в точке x поверхности в момент времени t равна

$$v=\frac{q}{2\pi K}\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]dx'=\frac{q\varkappa^{1/2}}{2K\pi^{1/2}}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}\Phi^*\left[\frac{x}{2\varkappa^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\right],$$

или

$$v=\frac{2q}{K}\left(\frac{\varkappa t}{\pi}\right)^{1/2}\left\{\frac{1}{2}\Phi^*\left[\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]+\frac{x}{4(\pi\varkappa t)^{1/2}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{x^2}{4\varkappa t}\right)\right\}. \quad (5.1)$$

Сравнивая соотношение (5.1) с (9.8) гл. II, легко увидеть, что первое из них состоит из множителя $2q(\varkappa t)^{1/2}/K\pi^{1/2}$, представляющего нагревание тела через неограниченную плоскость, и множителя, содержащего x.

Можно показать, что количество тепла, прошедшее через полуограниченную полосу $z>0$ единичной ширины в плоскости $x=0$ от нулевого момента времени до t, равно

$$2q\varkappa^{1/2}t^{3/2}/3\pi^{1/2}. \quad (5.2)$$

Эта величина дает количество тепла, которое теряется областью, расположенной ниже нагреваемого участка поверхности.

II. *При $t>0$ тепловой поток q подводится к телу через бесконечную полосу $-a<x<a$, $-\infty<y<\infty$, $z=0$.*

Температура v в точке x поверхности *) в момент t равна

$$v=\frac{qaT^{1/2}}{K\pi^{1/2}}\left\{\Phi\left[\frac{a+x}{2aT^{1/2}}\right]+\Phi\left[\frac{a-x}{2aT^{1/2}}\right]-\frac{a+x}{2a(\pi T)^{1/2}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{(a+x)^2}{4a^2T}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{(a-x)}{2a(\pi T)^{1/2}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{(a-x)^2}{4a^2T}\right)\right\}, \quad (5.3)$$

*) Некоторые численные результаты приведены в статье [10].

где $T = \varkappa t/a^2$. Несколько графиков распределения $K\pi^{1/2}v/2qaT^{1/2}$, т. е. отношения температуры поверхности к температуре полуограниченного тела с потоком через поверхность, равным q, показано на рис. 33.

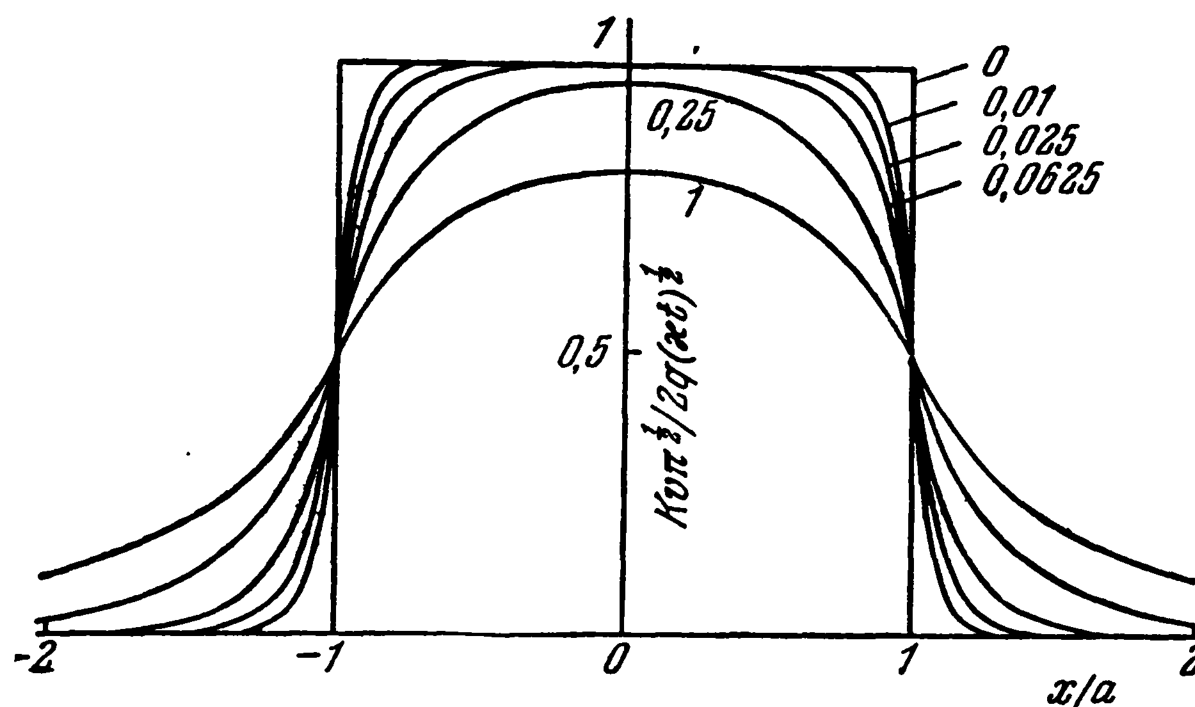


Рис. 33. Распределение температур на поверхности полуограниченного твердого тела, обусловленное нагреванием полосы шириной $2a$.

Числа у кривых указывают значения $\varkappa t/a^2$.

III. *При $t > 0$ тепловой поток q подводится через круг $x^2 + y^2 < a^2$, $z = 0$* [11, 12].

Температура в точке с цилиндрическими координатами (r, θ, z) записывается следующим образом:

$$\frac{aq}{2K} \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda a) \left\{ e^{-\lambda z} \Phi^* \left[\frac{z}{2(\varkappa t)^{1/2}} - \lambda (\varkappa t)^{1/2} \right] - e^{\lambda z} \Phi^* \left[\frac{z}{2(\varkappa t)^{1/2}} + \lambda (\varkappa t)^{1/2} \right] \right\} \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (5.4)$$

Это выражение служит обобщением решения (2.7) гл. VIII. Температура в точке $(0, 0, z)$ равняется

$$\frac{2q(\varkappa t)^{1/2}}{K} \left\{ \mathrm{i}\,\Phi^* \left[\frac{z}{2(\varkappa t)^{1/2}} \right] - \mathrm{i}\,\Phi^* \left[\frac{(z^2 + a^2)^{1/2}}{2(\varkappa t)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (5.5)$$

IV. *При $t > 0$ установившийся тепловой поток q подводится через прямоугольный участок $-l < x < l$, $-a < y < a$ поверхности $z = 0$* *).

Максимальная $v_{\text{макс}}$ и средняя $v_{\text{ср}}$ температуры в прямоугольном участке равны следующим величинам **):

$$v_{\text{макс}} = \frac{2q}{K\pi} \left\{ a \operatorname{Arsh} \frac{l}{a} + l \operatorname{Arsh} \frac{a}{l} \right\}, \quad (5.6)$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{2q}{K\pi a l} \left\{ la^2 \operatorname{Arsh} \frac{l}{a} + al^2 \operatorname{Arsh} \frac{a}{l} + \frac{1}{3} \left[a^3 + l^3 - (l^2 + a^2)^{3/2} \right] \right\}. \quad (5.7)$$

§ 6. Выделение тепла в неограниченной среде

Задачи о выделении известного количества тепла в неограниченной среде можно решить соответствующим интегрированием решений, приведенных в §§ 2 и 3 настоящей главы. Таким путем, например, можно получить решения, найденные в § 11 гл. II. В качестве следующего примера, определим *температуру в начале координат*

*) Решения задач такого типа часто используются при изучении температур в режущих инструментах и ползунах [41, 42].

**) $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{i} \arcsin(ix)$; см. СМБ, Операционое исчисление, гл. VI, Физматгиз, 1961. (*Прим. ред.*)

в неограниченном теле с нулевой начальной температурой при условии, что при $t>0$ в цилиндрической области этого тела $0<r<a$, $-b<z<b$ количество тепла, выделяемого на единицу объема в единицу времени, равно постоянной величине A.

Согласно (2.2) данной главы температура в начале координат в момент времени t, обусловленная выделением в точке (r', θ', z') в момент t' количества тепла, равного $Ar'dr'd\theta'dz'dt'$, записывается в виде

$$\frac{Ar'\,dr'\,d\theta'\,dz'\,dt'}{8\rho c\,\{\pi\varkappa\,(t-t')\}^{3/2}}\exp\left[-\frac{r'^2+z'^2}{4\varkappa\,(t-t')}\right].$$

Интегрируя по t' от 0 до t и по области $0<r'<a$, $-b<z'<b$, получим решение

$$v=\frac{A}{2\rho c\pi^{1/2}\varkappa^{3/2}}\int\limits_0^t\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}\int\limits_0^b\exp\left[-\frac{z'^2}{4\varkappa\,(t-t')}\right]dz'\int\limits_0^a\exp\left[-\frac{r'^2}{4\varkappa\,(t-t')}\right]r'dr'=$$

$$=\frac{A}{\rho c}\int\limits_0^t\left[1-e^{-a^2/4\varkappa u}\right]\Phi\left[\frac{b}{\sqrt{4\varkappa u}}\right]du. \tag{6.1}$$

Этот интеграл легко вычислить численным методом. Если $b=\infty$, т. е. тепло выделяется в неограниченном цилиндре радиуса a, то из соотношения (6.1) получаем для температуры на его оси выражение

$$\frac{A}{\rho c}\int\limits_0^t\left[1-e^{-a^2/4\varkappa u}\right]du=\frac{At}{\rho c}\left[1-e^{-a^2/4\varkappa t}\right]-\frac{Aa^2}{4K}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{a^2}{4\varkappa t}\right). \tag{6.2}$$

§ 7. Движущиеся источники тепла

Интегрированием решений для мгновенных источников решается ряд задач, которые можно рассматривать либо как задачи о движении источников в неподвижной среде, либо как случаи выделения тепла в фиксированной точке, мимо которой равномерно движется среда *). В данном параграфе мы рассмотрим в основном неограниченную среду. Аналогичным образом можно применить и функцию Грина (см. гл. XIV) при решении соответствующих задач для случая ограниченной среды **) (см. ниже пример VI).

I. *Движущийся точечный источник.*

Предположим, что при $t>0$ в начале координат начинает выделяться в единицу времени количество тепла, равное q, и что неограниченная среда равномерно движется относительно начала координат в направлении оси x со скоростью U. Рассчитаем температуру в фиксированной точке (x, y, z) в момент времени t.

В начале координат за элементарный промежуток времени dt' в момент t' выделяется количество тепла $q\,dt'$; кроме того, точка среды, имеющая в момент времени t координаты (x, y, z), в момент времени t' имела координаты

$$\{x-U(t-t'),\ y,\ z\}.$$

---

*) Кроме того, можно решить дифференциальное уравнение теплопроводности в движущейся среде (7.2) гл. I с соответствующими граничными условиями. В работе [13] даны примеры использования обоих методов; один такой пример приведен в § 11 гл. VII. Если в соотношении (7.2) гл. I положить $\partial v/\partial t=0$, то мы получим установившееся состояние, при котором приводимые ниже решения (7.2) и (7.3) отвечают соответственно непрерывному точечному и линейному источникам. См. также работу [14], где дается много приложений этих решений, и статью [15].

**) Задачу о линейном источнике, движущемся на поверхности цилиндра, а также различные технические ее приложения см. [16, 17]. Задача об источнике, движущемся вдоль оси цилиндра, разобрана в статье [18].

Таким образом, из соотношения (2.2) данной главы следует, что температура в точке (x, y, z) в момент t, обусловленная выделением в момент t' количества тепла $q\,dt'$, равна

$$\frac{q\,dt'}{8\rho c\,[\pi\varkappa(t-t')]^{3/2}}\exp\left[-\frac{\{x-U(t-t')\}^2+y^2+z^2}{4\varkappa(t-t')}\right].$$

Температура в момент времени t, обусловленная выделением того же количества тепла в начале координат за время от 0 до t, равна

$$\frac{q}{8\rho c\,(\pi\varkappa)^{3/2}}\int\limits_0^t \frac{\exp\left\{-\dfrac{[x-U(t-t')]^2+y^2+z^2}{4\varkappa(t-t')}\right\}}{(t-t')^{3/2}}\,dt' =$$

$$= \frac{q}{2RK\pi^{3/2}}\exp\frac{Ux}{2\varkappa}\int\limits_{R/2\sqrt{\varkappa t}}^{\infty}\exp\left[-\xi^2-\frac{U^2R^2}{16\varkappa^2\xi^2}\right]d\xi, \qquad (7.1)$$

где $R^2 = x^2+y^2+z^2$.

Полученное соотношение служит решением для случая выделения тепла в течение конечного промежутка времени t. Если $t\to\infty$, то устанавливается стационарный тепловой режим, и температура в точке (x, y, z) будет равна

$$\frac{q}{4\pi KR}\exp\left[-\frac{U(R-x)}{2\varkappa}\right]. \qquad (7.2)$$

II. *Движущийся линейный источник; стационарные условия.*

Если вдоль оси y количество тепла, выделяемого в единицу времени на единицу длины, равно q', то температуру в точке (x, y, z) при установившемся состоянии находят интегрированием выражения (7.2)

$$\frac{q'}{4\pi K}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy'}{[x^2+z^2+y'^2]^{1/2}}\exp\left\{-\frac{U[(x^2+z^2+y'^2)^{1/2}-x]}{2\varkappa}\right\} =$$

$$= \frac{q'}{2\pi K}\exp\left[\frac{Ux}{2\varkappa}\right]K_0\left[\frac{U(x^2+z^2)^{1/2}}{2\varkappa}\right], \qquad (7.3)$$

где $K_0(x)$ — бесселева функция второго рода *) нулевого порядка от мнимого аргумента.

Соотношение (7.3) определяет температуру в неограниченной среде, которая протекает со скоростью U мимо нагретой проволоки. В работе [43] решения (7.2) и (7.3) использованы в качестве приближенных выражений для распределения дыма в среде, текущей мимо точечного или линейного источника дыма.

III. *Движущийся плоский источник; стационарные условия.*

Если в плоскости $x=0$ количество тепла, выделяемого в единицу времени на единицу поверхности, равно q'' и в направлении оси x через эту плоскость движется среда со скоростью U, то установившаяся температура в точке x записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &q''/\rho cU, && \text{если } x>0,\\ &(q''/\rho cU)\,e^{Ux/\varkappa}, && \text{если } x<0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

IV. *Движущийся точечный источник в стержне, охлаждающемся в результате теплообмена.*

---

*) См. приложение 3. Если положить $y'=(x^2+z^2)^{1/2}\,\mathrm{sh}\,u$, то интеграл в соотношении (7.3) превратится в интеграл (34) (см. [19]) или в (7) § 6, 22 (см. [3]).

Если в начале координат в единицу времени выделяется количество тепла, равное q, а стержень движется вдоль оси x со скоростью U, то, используя соотношение (2.9) данной главы и принятые в нем обозначения, найдем для установившейся температуры в точке x выражение

$$\frac{q}{\omega\rho c\,[U^2+4\varkappa\nu]^{1/2}}\exp\left\{\frac{Ux}{2\varkappa}-\frac{|x|\,(U^2+4\varkappa\nu)^{1/2}}{2\varkappa}\right\}. \tag{7.5}$$

V. *Движущийся точечный источник в тонкой пластине, охлаждающейся в результате теплообмена.*

Пусть пластина расположена в плоскости x, y и движется со скоростью U в направлении оси x. Тогда используя выражение (2.10) и обозначения, принятые в § 2 данной главы, найдем, что установившаяся температура в точке x, y, обусловленная выделением в начале координат количества тепла, равного в единицу времени q', записывается в виде

$$\frac{q'}{2\pi KD}\,e^{Ux/2\varkappa}K_0\left\{\frac{R\,(U^2+4\varkappa^2k^2)^{1/2}}{2\varkappa}\right\}, \tag{7.6}$$

где $R^2=x^2+y^2$.

VI. *Точечный источник, движущийся на поверхности пластины.*

Рассмотрим пластину $0<z<l$, движущуюся со скоростью U параллельно оси x. Пусть в начале координат имеется точечный тепловой источник, выделяющий в единицу времени количество тепла, равное q, и пусть потери тепла с поверхности пластины отсутствуют. Данная задача аналогична задаче I, за исключением того, что здесь толщина пластины конечна; поэтому единственное изменение заключается в том, что вместо решения (2.2) настоящей главы следует использовать соответствующее решение (10.18) гл. XIV для источника в области $0<z<l$. Тогда вместо (7.1) мы получим

$$\frac{q}{4\pi\rho c l\varkappa}\int_0^t\frac{dt'}{(t-t')}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2\,(t-t')}{l^2}\right]\cos\frac{n\pi z}{l}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{[x-U\,(t-t')]^2+y^2}{4\varkappa\,(t-t')}\right\}.$$

Отсюда, при $t\to\infty$, когда превалируют стационарные условия, найдем, используя соотношение (30) приложения 3,

$$\frac{q}{2\pi Kl}\left\{K_0\left(\frac{Ur}{2\varkappa}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}K_0\left[\frac{Ur}{2\varkappa}\left(1+\frac{4\varkappa^2n^2\pi^2}{U^2l^2}\right)^{1/2}\right]\cos\frac{n\pi z}{l}\right\}e^{Ux/2\varkappa}, \tag{7.7}$$

где $r^2=x^2+y^2$.

Соответствующее решение *) для линейного источника, расположенного вдоль оси x и выделяющего на единицу длины в единицу времени количество тепла q', имеет вид

$$\frac{q'}{\rho c l U}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\,(n\pi z/l)}{[1+4\varkappa^2n^2\pi^2/U^2l^2]^{1/2}}\exp\frac{Ux}{2\varkappa}\left[1-\left(1+\frac{4\varkappa^2n^2\pi^2}{U^2l^2}\right)^{1/2}\right]\right\}. \tag{7.8}$$

Эти решения являются фундаментальными для расчета температур во многих практических случаях (нагревание трением, шлифовка, механическая обработка, поверхностный нагрев движущихся объектов, автогенная резка и сварка и т. д.). Тепло всегда подводится не к точке, а к ограниченной площадке, для которой решения (7.1) и (7.3) неприменимы, поскольку при приближении точки к этой площадке они стремятся к бесконечности; отсюда вытекает, что следует пользоваться интегральными решениями для источников, соответствующими подводу тепла к небольшой площадке. Во многих случаях форма площадки неизвестна; однако влияние формы на максималь-

---

*) Применение этих решений, а также ряд других можно найти в статье [14].

ные температуры оказывается несущественным. Поэтому обычно исследуют площадки такой формы, для которой легче всего производить расчеты (а именно, прямоугольники и неограниченные полосы), поскольку решения для этих случаев имеют вид простых интегралов, легко вычисляемых численным методом.

VII. *Источник в виде бесконечной полосы* $-b < x < b$, $-\infty < y < < \infty$, *расположенной в плоскости* $z = 0$. *Количество тепла, выделяемого в единицу времени на единицу площади полосы, равно* Q. *Окружающая среда движется мимо полосы в направлении оси* x *со скоростью* U.

Интегрируя (7.3), получаем для температуры

$$v = \frac{Q}{2\pi K} \int_{-b}^{b} \exp\left[\frac{U(x-x')}{2\varkappa}\right] K_0\left\{U \frac{[(x-x')^2+z^2]^{1/2}}{2\varkappa}\right\} dx'.$$

Отсюда, вводя безразмерные величины

$$X = \frac{Ux}{2\varkappa}, \qquad Z = \frac{Uz}{2\varkappa}, \qquad B = \frac{Ub}{2\varkappa}, \tag{7.9}$$

получим

$$v = \frac{\varkappa Q}{\pi K U} \int_{X-B}^{X+B} e^u K_0 (Z^2 + u^2)^{1/2} du. \tag{7.10}$$

Выражение (7.10) легко найти численным методом. Для поверхности $Z = 0$ результат можно записать через интегралы [20]

$$\int_0^a e^{\pm u} K_0(u)\, du = $$
$$= ae^{\pm a}\{K_0(a) \pm K_1(a)\} \mp 1. \tag{7.11}$$

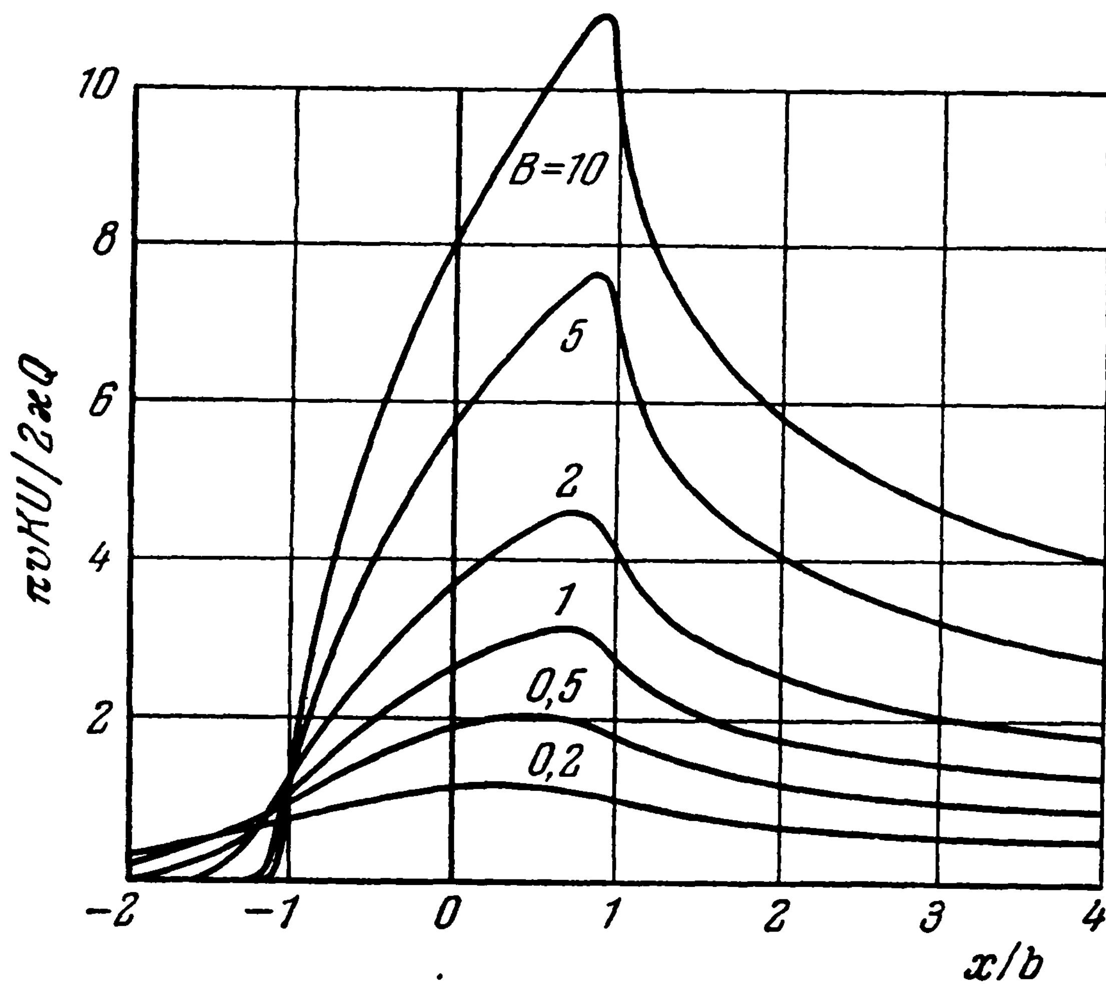


Рис. 34. Распределение температуры на поверхности полуограниченного твердого тела, обусловленное выделением тепла при трении тела о полосу шириной $2b$, относительно которой оно движется со скоростью U.

Следует отметить, что для больших значений B температура максимальна при $X = B$ и приближенно равна $Qb/K(\pi B)^{1/2}$, т. е. величине (9.8) гл. II, найденной для температуры в конце промежутка времени $2b/U$ при выделении в единицу времени на плоскости в неограниченном теле количества тепла Q.

Температура в полуограниченном теле, обусловленная выделением тепла при трении *) тела о поверхность, по которой оно скользит со скоростью U, и при отсутствии теплопередачи равна удвоенному значению температуры, определяемому (7.10). Некоторые значения температуры поверхности при различных значениях X и B приведены на рис. 34.

*) Эта задача подробно разобрана в [21, 22]. В последней работе приведены численные данные для источников в виде полос и прямоугольников. Эквивалентная задача о поверхностной температуре при шлифовке рассмотрена в [23].

VIII. *Источник в виде бесконечной полосы, как и в предыдущей задаче, но ее плоскость образует с осью x угол θ* *).

Температура в точке полосы, находящейся на расстоянии a от ее оси, равна следующей величине:

$$\frac{\varkappa Q}{\pi K U} \int\limits_{A-B}^{A+B} e^{u \cos \theta} K_0(|u|)\, du, \tag{7.12}$$

где $A = Ua/2\varkappa$.

IX. *Источник прямоугольного сечения $-b < x < b$, $-l < y < l$, лежащий в плоскости $z = 0$. Количество тепла, выделяемого в единицу времени на единицу площади, равно Q.*

$$v = \frac{Q\varkappa}{4KU(2\pi)^{1/2}} \int\limits_0^\infty e^{-Z^2/2u} \left\{ \Phi\left[\frac{Y+L}{(2u)^{1/2}}\right] - \Phi\left[\frac{Y-L}{(2u)^{1/2}}\right] \right\} \times$$
$$\times \left\{ \Phi\left[\frac{X+B+u}{(2u)^{1/2}}\right] - \Phi\left[\frac{X-B+u}{(2u)^{1/2}}\right] \right\} \frac{du}{u^{1/2}}, \tag{7.13}$$

где

$$X = Ux/2\varkappa, \quad Y = Uy/2\varkappa, \quad Z = Uz/2\varkappa, \quad L = Ul/2\varkappa, \quad B = Ub/2\varkappa. \tag{7.14}$$

§ 8. Дублеты

В § 2 настоящей главы мы видели, что выражение

$$v = \frac{Q}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right], \tag{8.1}$$

где

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2, \tag{8.2}$$

служит решением уравнения теплопроводности.

Отсюда следует, что

$$-\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{или} \quad \frac{Q(x-x')}{16\pi^{3/2}\varkappa^{5/2}t^{5/2}} \exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right] \tag{8.3}$$

также будет его решением.

Это решение можно получить, комбинируя источник мощностью Q' в точке $(x'+dx', y', z')$ и сток **) мощностью $-Q'$ в точке (x', y', z') и переходя к пределу при $dx' \to 0$. При этом надо положить, что $\lim(Q'\,dx') = Q$ при $dx' \to 0$.

Если воспользоваться соотношением (8.2), то температура в точке (x, y, z), обусловленная совместным действием источника и стока, запишется в виде

$$v = \frac{Q'}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-x'-dx')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\varkappa t}\right\} - \exp\left(-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right)\right] =$$
$$= \frac{Q'}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \left[\exp\frac{2(x-x')\,dx' - (dx')^2}{4\varkappa t} - 1\right] \exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right] =$$
$$= \frac{Q'(x-x')\,dx'}{16\pi^{3/2}\varkappa^{5/2}t^{5/2}} \exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right] + \text{члены с более высокими степенями } dx'.$$

---

*) Эта задача возникает при расчете температур в плоскости среза при обработке металла резанием. Ее решение, а также несколько численных значений интегралов (7.12) приведены в статье [24].

**) Если мощность источника, определенная в § 2 данной главы, отрицательна, источник называют стоком.

Переходя к пределу, получим решение (8.3). Такое распределение температуры называют распределением, обусловленным действием *мгновенного точечного дублета мощности* Q, *помещенного в точке* (x', y', z'), *ось которого параллельна оси* x. Аналогичным образом, дифференцируя (8.1) по y или z, мы приходим к точечным дублетам с осями, параллельными этим направлениям; частные производные более высоких порядков дают также решения уравнения теплопроводности.

Точно так же, исходя из мгновенного линейного источника (см. (3.1) данной главы), мы получаем для температуры, обусловленной действием мгновенного линейного дублета, находящегося в точке (x', y') с осью, параллельной оси x, соотношение

$$v = \frac{Q(x-x')}{8\pi\varkappa^2 t^2} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4\varkappa t}\right\}. \tag{8.4}$$

Согласно (3.4) данной главы, в случае линейного теплового потока температура, обусловленная действием *мгновенного дублета, помещенного в точке* x', записывается в виде

$$v = \frac{Q(x-x')}{4\pi^{1/2}\varkappa^{3/2}t^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]. \tag{8.5}$$

Теперь легко перейти к рассмотрению *непрерывного дублета* переменной или постоянной мощности. Например, в случае линейного теплового потока температура, обусловленная действием непрерывного дублета мощностью $\varphi(t)$, находящегося в точке x', определяется формулой

$$v = \frac{(x-x')}{4\pi^{1/2}\varkappa^{3/2}} \int_0^t \frac{\varphi(t')\,dt'}{(t-t')^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa(t-t')}\right]. \tag{8.6}$$

Вводя подстановку $x - x' = 2\varkappa^{1/2}(t-t')^{1/2}\alpha$, получим

$$v = \frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} \int_{(x-x')/2\sqrt{(\varkappa t)}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\varphi\left(t - \frac{(x-x')^2}{4\varkappa\alpha^2}\right) d\alpha \quad \text{при} \quad x > x'$$

и

$$v = \frac{1}{\varkappa\sqrt{\pi}} \int_{(x-x')/2\sqrt{(\varkappa t)}}^{-\infty} e^{-\alpha^2}\varphi\left(t - \frac{(x-x')^2}{4\varkappa\alpha^2}\right) d\alpha \quad \text{при} \quad x < x'.$$

Таким образом,

$$v_{x'+0} = \frac{\varphi(t)}{\varkappa\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\varphi(t)}{2\varkappa}$$

и

$$v_{x'-0} = -\frac{\varphi(t)}{2\varkappa}.$$

Отсюда следует, что в точке x' имеет место разрыв температуры величиной $\varphi(t)/\varkappa$. Поэтому в случае линейного потока в полуограниченном твердом теле $x > 0$ температуру плоскости $x = 0$ при $t > 0$ можно поддерживать равной $\varphi(t)$, помещая на эту плоскость непрерывный дублет мощностью $2\varkappa\varphi(t)$ (см. соотношение (5.1) гл. I).

Решение двумерной задачи, когда плоскость $x = 0$ находится при температуре $f(y, t)$, можно получить, поместив непрерывный дублет с осью,

параллельной оси x, и мощностью $2\varkappa f(y', t)\,dy'$ в точку $(y', 0)$ и интегрируя вдоль оси y. Соответствующий результат легко получить и для трехмерной задачи, когда температура плоскости $x=0$ поддерживается равной $f(y', z', t)$ (см. соотношение (9.3) гл. XIV).

§ 9. Метод последовательных волн

Согласно (6.6) гл. II, функция

$$e^{-x(\omega/2\varkappa)^{1/2}}\cos\left\{\omega t - x\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}+\varepsilon\right\} \tag{9.1}$$

служит решением уравнения теплопроводности для линейного теплового потока. Это решение можно рассматривать как волну, движущуюся вправо. Тогда интеграл

$$\int\limits_0^\infty f(\omega)\,e^{-x(\omega/2\varkappa)^{1/2}}\cos\left\{\omega t - x\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}+\varepsilon\right\}d\omega \tag{9.2}$$

служит общим решением уравнения теплопроводности, которое можно рассматривать как комбинацию таких последовательных волн. При изменении знака при x мы получим последовательные волны, движущиеся влево.

Легко показать, что при $x>0$

$$\frac{1}{2\pi\varkappa^{1/2}}\int\limits_0^\infty e^{-x(\omega/2\varkappa)^{1/2}}\cos\left\{\omega t - x\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}-\frac{1}{4}\pi\right\}\frac{d\omega}{\omega^{1/2}}=\frac{1}{2(\pi\varkappa t)^{1/2}}\,e^{-x^2/4\varkappa t} \tag{9.3}$$

и

$$\frac{1}{2\pi\varkappa}\int\limits_0^\infty e^{-x(\omega/2\varkappa)^{1/2}}\cos\left\{\omega t - x\left(\frac{\omega}{2\varkappa}\right)^{1/2}\right\}d\omega=\frac{x}{4(\pi\varkappa^3t^3)^{1/2}}\,e^{-x^2/4\varkappa t}. \tag{9.4}$$

Следовательно, (9.3) и (9.4) представляют соответственно разложения единичного мгновенного точечного источника и единичного мгновенного точечного дублета в начале координат на плоские волны.

Грин [25], а затем Робертсон [26], использовав (9.2), разработали метод решения широкого круга задач с линейным потоком и затем распространили его на задачи в сферических и цилиндрических координатах. Главная особенность этого метода заключается в принятии в качестве частного решения для ограниченной области такой комбинации волн типа (9.1), которая удовлетворяла бы условиям непрерывности на границах. Подобный метод хорошо известен в учении о волновом движении. Источники и дублеты вводят, используя комбинации частных решений (9.3) и (9.4). Таким методом можно получить многие решения, приведенные в гл. XIV.

§ 10. Метод изображений. Линейный тепловой поток

Метод изображений, играющий столь важную роль в математической теории электричества, целиком применим и к решению задач теплопроводности, если твердое тело ограничено плоскостями, находящимися при нулевой температуре *). Мысленно продолжим твердое тело неограниченно во все стороны и методом изображений найдем распределение источников и стоков, обеспечивающее нулевую температуру на границах тела. Аналогичный метод применим и тогда, когда тепловой поток через граничные плоскости отсутствует.

В гл. XIV мы увидим, что особую важность при решении общей задачи теплопроводности для такого твердого тела имеет функция Грина, т. е.

---

*) Теоретическая электростатика была впервые изложена в книге Максвелла [27]. В работе [28] исследовалась теплопроводность прямоугольного параллелепипеда, правильной треугольной призмы и различных тетраэдров. Решения основных задач для областей с плоскими границами (в том числе задач с учетом теплообмена на границах) приведены в [29].

функция, описывающая распределение температуры, вызванное единственным источником, в теле с заданными граничными условиями. Для некоторых задач метод изображений служит одним из методов определения функции Грина.

Положение изображений не зависит от того, рассматриваются ли точечные, линейные или плоские источники, параллельные отображающей граничной плоскости. В данном параграфе будут рассмотрены плоские источники; аналогичные формулы для точечных источников будут приведены в § 10 гл. XIV.

I. *Полуограниченное тело* $x > 0$. *Начальная температура равна* $f(x)$. *Температура на границе* $x = 0$ *равна нулю.*

Рассмотрим на плоскости x' источник мощностью $f(x')\,dx'$. Будем считать, что начальная температура тела обусловлена распределением таких источников вдоль положительной части оси x.

К источнику мощностью $f(x')\,dx'$ на плоскости x' мы присоединяем сток мощностью $-f(x')\,dx'$, помещенный в $-x'$. Тогда оба они дадут на плоскости $x = 0$ нулевую температуру. Следовательно,

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} \int_0^\infty f(x')\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa t}\right]\right\} dx'. \quad (10.1)$$

II. *Твердое тело ограничено плоскостями* $x = 0$ *и* $x = a$. *Начальная температура* $f(x)$. *Граничные плоскости поддерживаются при нулевой температуре.*

Рассматривая на плоскости x' источник мощностью $f(x')\,dx'$, мы должны взять его изображения от плоскости $x = 0$ и $x = a$ и комбинировать источники и стоки так, чтобы граничные плоскости находились при нулевой температуре. Таким образом, мы получим источники в точках $x' + 2na$ и стоки в точках $-x' + 2na$, где n — любое положительное или отрицательное целое число или нуль. Тогда окончательно получим

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} \int_0^a f(x')\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x'-2na)^2}{4\varkappa t}\right] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x+x'-2na)^2}{4\varkappa t}\right] dx'\right\}. \quad (10.2)$$

В § 3 (см. (3.5) гл. III) в подобном же случае мы получили для v другое выражение, а именно

$$\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{a}\, e^{-\varkappa n^2\pi^2 t/a^2} \int_0^a f(x') \sin\frac{n\pi x'}{a}\, dx'.$$

При $t > 0$ это последнее можно записать в виде

$$\frac{2}{a}\int_0^a f(x') \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x'}{a}\, e^{-\varkappa n^2\pi^2 t/a^2}\, dx'. \quad (10.3)$$

(См. подстрочное примечание на стр. 99.)

Тождественность этих решений может быть доказана несколькими путями: 1) использованием свойств тэта-функций [30, 31]; 2) с помощью преобразования Лапласа; в этом случае решения типа (10.3) получаются в результате применения теоремы обращения, а решения типа (10.2) — в результате разложения изображения в ряд по отрицательным степеням показательных функ-

ций (см. § 10, гл. XIV, где этот результат получен при рассмотрении точечного источника между параллельными плоскостями); 3) с помощью следующей теоремы:

Если $f(x)$ — четная функция x, которую можно разложить так же, как и функцию $f(x \pm 2na)$, в ряд Фурье по косинусам углов, кратных углу $\pi x/a$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2na) = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} f(x)\,dx + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^{\infty} f(x')\cos\frac{n\pi x'}{a}\,dx',$$

при условии, что интегралы и ряд сходятся.

Так как

$$f(x) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x')\,dx' + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x')\cos\frac{n\pi x'}{a}\,dx'$$

и

$$f(x+2na) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x'+2na)\,dx' + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x'+2na)\cos\frac{n\pi x'}{a}\,dx' =$$

$$= \frac{1}{a}\int_{2na}^{(2n+1)a} f(x')\,dx' + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{a}\int_{2na}^{(2n+1)a} f(x')\cos\frac{n\pi x'}{a}\,dx'$$

и

$$f(x-2na) = \frac{1}{a}\int_{(2n-1)a}^{2na} f(x')\,dx' + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{a}\int_{(2n-1)a}^{2na} f(x')\cos\frac{n\pi x'}{a}\,dx',$$

то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2na) = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} f(x')\,dx' + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^{\infty} f(x')\cos\frac{n\pi x'}{a}\,dx'.$$

Пусть $f(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa t}\right]$; тогда *)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x+2na)^2}{4\varkappa t}\right] = \frac{1}{a}\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{x'^2}{4\varkappa t}\right]dx' +$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{x'^2}{4\varkappa t}\right]\cos\frac{n\pi x'}{a}\,dx' =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi\varkappa t}}{a}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\right].$$

Отсюда **)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-x'+2na)^2}{4\varkappa t}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi\varkappa t}}{a}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi(x-x')}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\right\} \qquad (10.4)$$

*) Искомые интегралы приведены в § 2 гл. II; см. также [32].

**) Это — формула Пуассона.

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x+x'+2na)^2}{4\varkappa t}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi\varkappa t}}{a}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi(x+x')}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\right\}. \quad (10.5)$$

Принимая во внимание (10.4) и (10.5), получим решение уравнения (10.2) в виде

$$v = \frac{2}{a}\int_0^a f(x')\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x'}{a}\,dx'.$$

III. *То же тело. Начальная температура равна нулю. Граница $x=0$ поддерживается при температуре $\varphi_1(x)$, граница $x=a$ — при температуре, равной нулю.*

Поместим в плоскости $x=0$ непрерывный дублет мощностью $2\varkappa\varphi_1(t)$ (см. (8.6) данной главы). Если бы тело было неограниченным, то при наличии такого дублета плоскость $x=0$ поддерживалась бы при температуре $\varphi_1(t)$. Для того чтобы плоскость $x=a$ находилась при нулевой температуре, необходимо поместить дублет той же мощности в плоскости $x=2a$, и т. д.

Таким образом, в точках $2na$ располагаются дублеты мощностью $2\varkappa\varphi_1(t)$, где n — нуль или любое положительное или отрицательное целое число.

Следовательно,

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa}}\int_0^t \frac{\varphi_1(t')}{(t-t')^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x+2na)\exp\left[-\frac{(x+2na)^2}{4\varkappa(t-t')}\right]dt'. \quad (10.6)$$

Соответствующий результат можно получить и для случая, когда граница $x=0$ находится при нулевой температуре, а граница $x=a$ — при температуре $\varphi_2(t)$. Складывая эти решения, приходим к иной форме решения задачи, приведенной в § 5 гл. III.

IV. *Полуограниченное твердое тело $x>0$. Начальная температура $f(x)$. На границе $x=0$ тепловой поток отсутствует.*

Поступим здесь, как и в примере I, но, принимая во внимание отсутствие теплового потока при $x=0$, рассмотрим совместно источник мощностью $f(x')\,dx'$ в точке $-x'$ и источник той же мощности в точке x'.

Тогда

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_0^{\infty} f(x')\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa t}\right]\right\}dx'. \quad (10.7)$$

V. *Твердое тело, ограниченное плоскостями $x=0$ и $x=a$. Начальная температура равна $f(x)$. На границе $x=0$ тепловой поток равен нулю. Плоскость $x=a$ поддерживается при нулевой температуре.*

Поступая здесь так же, как и в примере II, рассмотрим источники в плоскостях $\pm 4na \pm x'$ и стоки в плоскостях

$$\pm(4n+2)a \pm x'.$$

В результате получим

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_0^a f(x')\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left\{\exp\left[-\frac{(x-x'-2na)^2}{4\varkappa t}\right]+\right.$$

$$\left.+\exp\left[-\frac{(x+x'-2na)^2}{4\varkappa t}\right]\right\}dx'. \quad (10.8)$$

§ 11. Применение метода изображений к двумерным и трехмерным задачам

I. *Полуограниченное твердое тело $x > 0$. Начальная температура $f(x, y)$. Граница $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре.*

Помещая линейный источник мощностью $f(x', y')\,dx'\,dy'$ в точку (x', y'), мы должны взять равный ему по мощности сток в точке $(-x', y')$, что позволит удовлетворить условиям на границе. Тогда

$$v = \frac{1}{4\pi\varkappa t}\int_0^\infty dx' \int_{-\infty}^\infty f(x', y')\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4\varkappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x')^2+(y-y')^2}{4\varkappa t}\right]\right\}dy'.$$

II. *Полуограниченное твердое тело $x > 0$. Начальная температура $f(x, y, z)$. Граница $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре.*

Помещаем точечный источник мощностью $f(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'$ в точку (x', y', z') и равный ему по мощности сток в точку $(-x', y', z')$; это обеспечивает на границе $x = 0$ температуру, равную нулю. Тогда мы получим

$$v = \frac{1}{\{2\sqrt{\pi\varkappa t}\}^3}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x', y', z')\left\{e^{-R^2/4\varkappa t} - e^{-R'^2/4\varkappa t}\right\}dx'\,dy'\,dz',$$

где

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

и

$$R'^2 = (x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

III. *Клин с углом раствора π/m, где m — любое положительное целое число.*

Двумерные и трехмерные задачи, рассмотренные в примерах I и II, являются частными случаями общей задачи для клина с углом раствора π/m, где m — любое целое положительное число. Рассматривая эту задачу, мы ограничимся случаем двух измерений, т. е. рассмотрением линейного источника в точке (x', y'), причем ребро клина совпадает с осью z. Решение трехмерной задачи с точечным источником в точке (x', y', z') и распространение полученного решения на более общий случай любой начальной температуры не представляют трудностей.

Возьмем цилиндрические координаты. Границами клина служат плоскости $\theta = 0$ и $\theta = \pi/m$, температуры которых должны равняться нулю.

Внутри клина $0 < \theta < \pi/m$.

Пусть источник находится в точке P_0 с координатами (a, α).

Пусть окружность, проходящая через точку P_0 и имеющая центром начало координат, пересекает плоскости $\theta = 0$ и $\theta = \pi/m$ в точках A и B (рис. 35).

Тогда углы AOP_0, P_0OB и AOB будут равны α, β и γ, где $\beta = \pi/m - \alpha$, а $\gamma = \pi/m$.

Поместим источник единичной мощности в точке P_0.

Чтобы получить нулевую температуру на линии OA, поместим *сток* единичной мощности в точку P_1, которая является изображением*) точки P_0 относительно OA. Это значит, что угол AOP_1 равен $-\alpha$.

*) Иными словами, P_1 симметрична P_0 относительно прямой OA. (*Прим. ред.*)

Чтобы уравновесить сток, находящийся в точке P_1, поместим *источник* в точку P_2, которая является изображением точки P_1 относительно OB. Это значит, что угол AOP_2 равен $(\alpha+2\gamma)$.

Чтобы уравновесить источник, находящийся в точке P_2 на линии OA, поместим *сток* в точку P_3, которая является изображением P_2 относительно OA. Это значит, что угол AOP_3 равен $-(\alpha+2\gamma)$ и т. д.

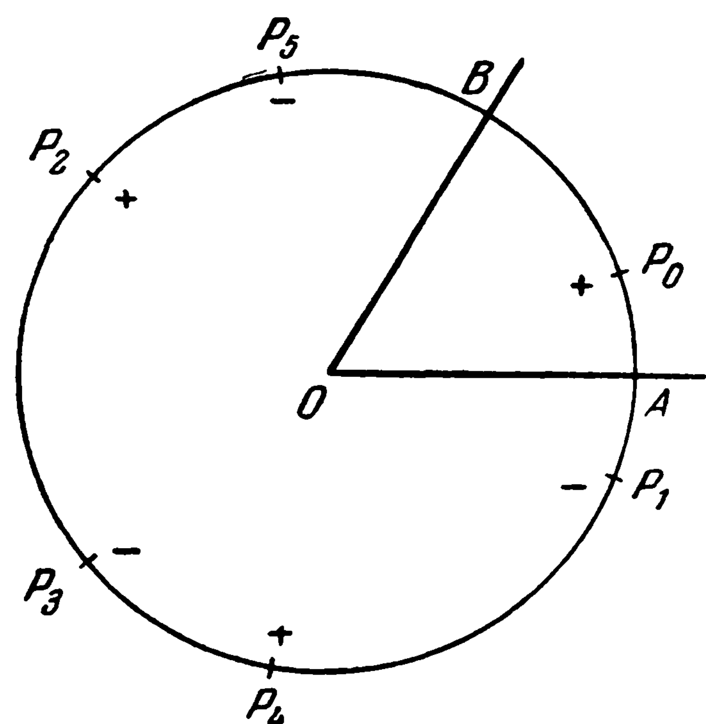


Рис. 35.

Таким путем мы получим ряд изображений $P_1, P_2, \ldots$, причем

$$\angle P_0OP_2 = \angle P_2OP_4 = \ldots = 2\gamma,$$
$$\angle P_1OP_3 = \angle P_3OP_5 = \ldots = 2\gamma.$$

Следовательно, угол AOP_{2m-1} равен

$$-\{\alpha+2(m+1)\gamma\}.$$

Тогда

$$\angle P_0OP_{2m-1}+2\beta = \\ = 2\alpha+2(m-1)\gamma+2\beta = 2\pi.$$

Таким образом, точка P_{2m-1} совпадает с изображением точки P_0 относительно OB; поэтому ряд изображений конечен, и последней точкой будет P_{2m-1}.

Следовательно, все такие источники и стоки вместе с источником P_0 дадут нулевую температуру на плоскостях $\theta=0$ и $\theta=\pi/m$.

Температура в точке (r, θ), полученная в результате действия этой системы источников и стоков, записывается в виде

$$v=\sum_{s=0}^{2m-1}(-1)^s v_s, \qquad (11.1)$$

где v_s — температура, полученная в результате действия источника единичной мощности, помещенного в точке P_s неограниченного твердого тела.

Однако выше (см. (3.3) данной главы) мы видели, что температура в точке (r, θ), обусловленная источником единичной мощности, помещенным в точке (r', θ'), равна

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \lambda e^{-\varkappa\lambda^2 t} J_0(\lambda R)\, d\lambda,$$

где $R^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')$.

Пользуясь разложением Неймана [3, 19]

$$J_0(\lambda R)=J_0(\lambda r)J_0(\lambda r')+2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(\lambda r)J_n(\lambda r')\cos n(\theta-\theta'),$$

получим для температуры

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \lambda e^{-\varkappa\lambda^2 t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda r)J_n(\lambda r')\cos n(\theta-\theta')\, d\lambda,$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\cos n(\theta-\theta')\int_0^\infty \lambda e^{-\varkappa\lambda^2 t}J_n(\lambda r)J_n(\lambda r')\, d\lambda.$$

Тогда из соотношения (11.1) следует, что

$$v = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{m-1} [\cos n(\theta - \alpha - 2s\gamma) - \\ - \cos n(\theta + \alpha + 2s\gamma)] \int_0^{\infty} \lambda e^{-\varkappa\lambda^2 t} J_n(\lambda r) J_n(\lambda a)\, d\lambda. \quad (11.2)$$

Когда n не кратно m, сумма по s равна нулю. Когда же n кратно m, сумма по s равна

$$2m \sin n\theta \sin n\alpha.$$

Таким образом, из соотношения (11.2) получаем решение нашей задачи о температуре в клине $\theta = 0$, $\theta = \pi/m$, обусловленной источником единичной мощности, помещенным в точке (a, α), в виде

$$v = \frac{2}{\gamma} \sum_{p=1}^{\infty} \sin \frac{p\pi\theta}{\gamma} \sin \frac{p\pi\alpha}{\gamma} \int^{\infty} \lambda e^{-\varkappa\lambda^2 t} J_{\frac{p\pi}{\gamma}}(\lambda r) J_{\frac{p\pi}{\gamma}}(\lambda a)\, d\lambda, \quad (11.3)$$

где, как и выше, мы писали γ вместо π/m.

Решая трехмерную задачу, мы исходим из выражения

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi\varkappa t})^3} \exp\left[-\frac{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta') + (z - z')^2}{4\varkappa t}\right],$$

соответствующего источнику единичной мощности, находящемуся в точке (r', θ', z').

Поступая так же, как и выше, получаем решение нашей задачи в виде

$$v = \frac{\exp\left[-\frac{(z - z')^2}{4\varkappa t}\right]}{\gamma\sqrt{\pi\varkappa t}} \sum_{p=1}^{\infty} \sin \frac{p\pi\theta}{\gamma} \sin \frac{p\pi\alpha}{\gamma} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\varkappa\lambda^2 t} J_{\frac{p\pi}{\gamma}}(\lambda r) J_{\frac{p\pi}{\gamma}}(\lambda r')\, d\lambda.$$

§ 12. Обобщение метода изображений Зоммерфельдом

Метод изображений, примененный выше к клину с углом раствора π/m, где m — положительное целое число, неприменим к клину с углом раствора $n\pi/m$, где m и n положительные взаимно простые целые числа.

Например, пусть угол раствора равен прямому углу и в точке $P_0(r', \theta')$ находится заданный источник, причем $0 < \theta' < \frac{1}{2}\pi$; тогда мы получим следующие изображения:

сток в точке $P_1(r', -\theta')$, источник в точке $P_2(r', \pi + \theta')$

и

сток в точке $P_3(r', -\pi - \theta')$.

В этом случае при решении задачи трудности не возникают (рис. 36).

Если же угол равен $2\pi/3$ и заданный источник находится в точке $P_0(r', \theta')$, причем $0 < \theta' < 2\pi/3$, то мы получим следующие изображения (рис. 37):

сток в точке $P_1(r', -\theta')$, источник в точке $P_2\left(r', \frac{4\pi}{3} + \theta'\right)$;

сток в точке $P_3\left(r', -\frac{4\pi}{3} - \theta'\right)$, источник в точке $P_4\left(r', \frac{8\pi}{3} + \theta'\right)$;

и

сток в точке $P_5\left(r', -\frac{8\pi}{3} - \theta'\right)$.

Так как выражение для температуры, обусловленной действием источника, имеет периодический характер с периодом 2π, а сток в точке P_3 дает особую точку, соответствующую стоку в точке $(r', 2\pi/3 - \theta')$, т. е. в точке, расположенной между граничными плоскостями, данный метод оказывается непригодным.

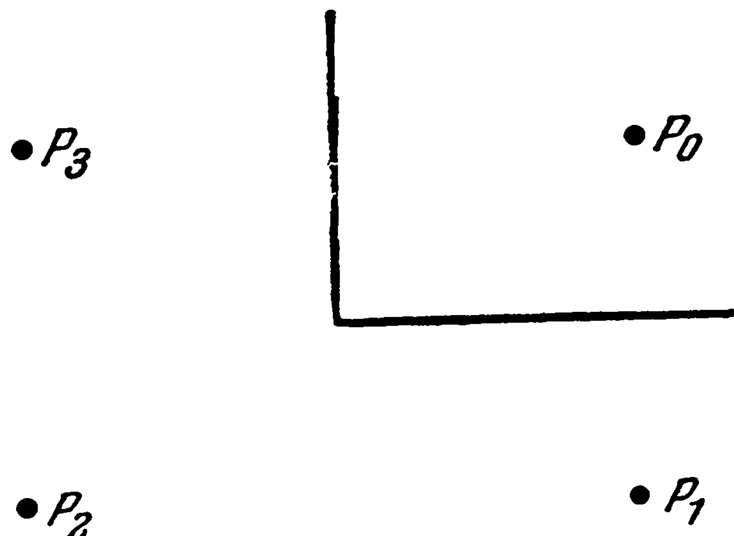


Рис. 36.

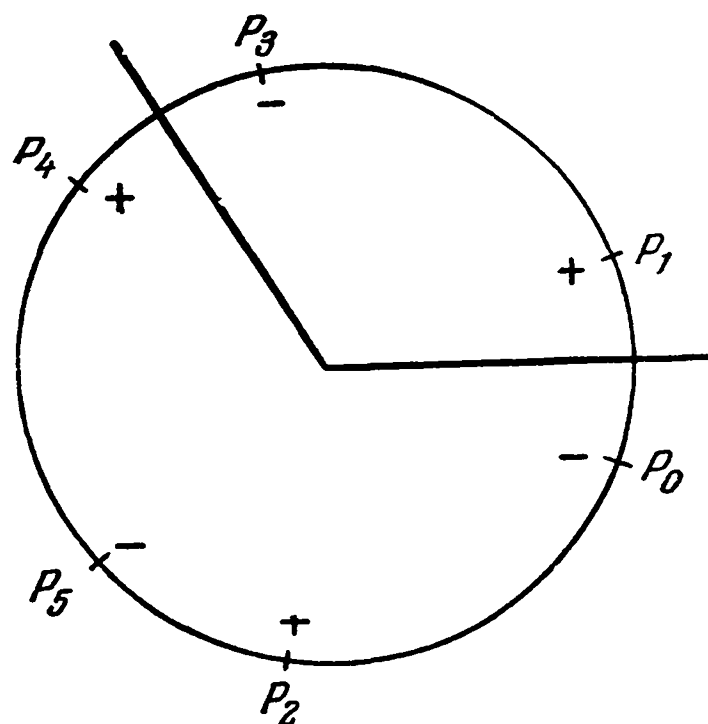


Рис. 37.

Однако для полного представления нам нужна только область $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$, занимаемая твердым телом, и если мы можем найти решение уравнения теплопроводности, имеющее период 4π и только одну особую точку при $r = 0$ и $t = 0$ в указанной области, причем функция близ этой точки имеет простой вид

$$\frac{e^{-r^2/4\varkappa t}}{4\pi\varkappa t} \quad \text{или} \quad \frac{e^{-r^2/4\varkappa t}}{\{2\sqrt{\pi\varkappa t}\}^3},$$

то мы можем использовать его так же, как и обыкновенное выражение для температуры, обусловленной источником, и взять изображения в точках, указанных выше.

Этот метод, впервые разработанный Зоммерфельдом, позволяет непосредственно исследовать решение уравнения теплопроводности на соответствующей римановой поверхности (или в римановом пространстве). При угле раствора $n\pi/m$ риманова поверхность (или пространство) оказывается n-листной, и решение будет иметь период $2n\pi$. Этот метод интересен в историческом отношении, так как после его применения к задаче распространения тепла от источника в теле, ограниченном плоскостями $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$, Зоммерфельду удалось с его помощью дать первое точное решение задачи дифракции волн на полуограниченной плоскости (например, на плоскости $\theta = 0$). В настоящее время развит более простой метод решения этих задач, пригодный как для уравнений теплопроводности, так и для других дифференциальных уравнений математической физики в частных производных. Поэтому здесь достаточно только упомянуть о работах Зоммерфельда, а также о других работах, в которых используется идея римановой поверхности [33—36].

Мы возвратимся к задаче с клином в § 14, гл. XIV и покажем, что решение (11.3) предыдущего параграфа для угла π/m справедливо для клина с любым углом раствора *).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kelvin, Compendium of the Fourier mathematics for the conduction of heat in solids and the mathematically allied physical subjects of diffusion of fluids and transmission of electric signals through submarine cables, статья «Heat» в Encycl. Britt. (1880) или Math. and Phys. Papers, **2**, p. 41.
2. Lovering, Bull. Geol. Soc. Am. **46**, 69—93 (1935).
3. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, ed. 2, 1944. (Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.)

*) Другое решение, полученное с помощью контурного интеграла, приведено в [37]; см. также [38].

4. Masters, J. Chem. Phys. **23**, 1865—1874 (1955).
5. Jahnke—Emde, Tables of Functions, Teubner, ed. 3, 1933, p. 83. (Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1948).
6. Fischer, Ann. Physik **34**, 669 (1939).
7. Albrecht, Met. Z. **49**, 294 (1932).
8. Podolsky, J. Appl. Phys. **22**, 581 (1951).
9. Ritchie, J. Appl. Phys. **22**, 1389 (1951).
10. Jaeger, Aust. J. Sci. Res. **A5**, 1—9 (1952).
11. Oosterkamp, Philips Res. Rep. **3**, 49 (1948).
12. Oosterkamp, J. Appl. Phys. **19**, 1180 (1948).
13. Wilson, Proc. Camb. Phil. Soc. **12**, 406 (1904).
14. Rosenthal, Trans. ASME **68**, 849—866 (1946).
15. Grosh, Trabant, Hawkins, Quart. Appl. Math. **13**, 161—167 (1955).
16. Jaeger, Phil. Mag. **35**, 169 (1944).
17. Müller, Proc. Roy. Soc. **A125**, 507 (1929).
18. Rosenthal, Cameron, Trans. ASME **69**, 961 (1947).
19. Gray, Mathews, Treatise on Bessel Functions, Macmillan, ed. 2, 1922. (Э. Грей, Г. Мэттьюз, Функции Бесселя и их применение в физике и механике, ИЛ, М., 1953.)
20. Luke, J. Math. Phys. **29**, 27—30 (1950).
21. Blok, Inst. Mech. Engrs, General Discussion on Lubrication **2**, 222 (1937).
22. Jaeger, J. Proc. Roy. Soc. N. S. W. **76**, 203—224 (1943).
23. Outwater, Shaw, Trans. ASME **74**, 73—86 (1952).
24. Chao, Trigger, Trans. ASME **75**, 109—120 (1953).
25. Green, Phil. Mag. **3**, 784 (1927); **5**, 701—720 (1928); **9**, 241—260 (1930); **12**, 233—255 (1931); **18**, 625—640 (1934); **38**, 97—115 (1947).
26. Robertson, Phil. Mag. **15**, 937—957 (1933); **18**, 165—176 (1934); **18**, 1009—1022 (1934).
27. Maxwell, Electricity and Magnetism, ed. 1, 1873.
28. Lamé, Leçons sur la théorie de la chaleur, Paris, 1861.
29. Hobson, Proc. Lond. Math. Soc. **19**, 279 (1887).
30. Poincaré, Théorie de la propagation de la chaleur, p. 91.
31. Whittaker, Watson, Modern Analysis, Cambridge, ed. 3. (Э. Уиттекер и Г. Ватсон, Курс современного анализа, ГТТИ, М., 1933).
32. Carslaw, Fourier's Series and Integrals Macmillan, ed. 3, 1930.
33. Sommerfeld, Math. Ann. **45**, 263 (1894); **47**, 317 (1896); Proc. Lond. Math. Soc. **28**, 395 (1897).
34. Schwarzschild, Math. Ann. **55**, 177 (1902).
35. Carslaw, Proc. Lond. Math. Soc. **30**, 121 (1899); Rep. Brit. Ass. 644 (1900).
36. Hobson, Trans. Camb. Phil. Soc. **18**, 277 (1900).
37. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Slides, Macmillan, ed. 2, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1947.)
38. Carslaw, Proc. Lond. Math. Soc. **8**, 365 (1910), **18**, 291 (1920).
39. Rayleigh, Phil. Mag. **22**, 381—396 (1911).
40. Whitehead, Electrician **99**, 225 (1927).
41. Loewen, Shaw, Trans. ASME **76**, 217—231 (1954).
42. Trigger, Shaw, Trans. ASME **73**, 57—68 (1951).
43. Roberts, Proc. Roy. Soc. **A104**, 640 (1923).

ГЛАВА XI

ИЗМЕНЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

§ 1. Введение

Особый интерес представляет весьма важный класс задач, в которых исследуемое вещество претерпевает превращения, в результате чего оно переходит из одной фазы в другую с выделением или поглощением тепла. Такого рода задачи возникают во многих случаях, из которых важнейшими и наиболее распространенными являются случаи плавления и затвердевания. Поэтому для определенности большинство рассматриваемых здесь задач будет формулироваться именно в такой форме. Первой опубликованной работой, в которой рассматривались подобные задачи, является, по-видимому, работа Стефана [1], посвященная изучению толщины полярных льдов *). Поэтому задачу о промерзании часто называют «задачей Стефана».

Существенно новой чертой таких задач является наличие движущейся поверхности раздела между двумя фазами, причем приходится определять закон движения этой поверхности. На ней происходит поглощение или выделение тепла; в данном случае термические свойства фаз по обеим сторонам движущейся поверхности могут оказаться различными, и поэтому такая задача весьма трудна. Ниже будет показано, что она нелинейна, и, следовательно, необходимо определять специальные решения, не обладающие к тому же свойством наложения (т. е. их комбинации не будут служить решениями).

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных решений, желательно показать, какие точные решения уже получены и какими методами мы сейчас располагаем. Наиболее важно точное решение Неймана для случая полуограниченной области $x > 0$, находящейся в начальный момент времени при постоянной температуре V, превышающей температуру плавления, с поверхностью $x = 0$, температура которой во все последующие моменты времени поддерживается равной нулю. Для других важных граничных условий при $x = 0$ (например, постоянство теплового потока или граничные условия третьего рода), замкнутых решений **) нет, хотя для различных заданных значений температуры поверхности существует несколько решений, не представляющих, однако, сколько-нибудь существенного физического интереса. Часто применяемое приближение заключается в пренебрежении теплоемкостью исследуемого материала между поверхностью $x = 0$ и поверхностью раздела, т. е. в предположении, что тепловой поток через эту область является установившимся.

---

*) Стефан получил формулы (2.18) и (2.21) данной главы, которые приводятся ниже. Более общий результат, известный как решение Неймана, был дан Францем Нейманом в его лекциях 1860 г. (см. [2]).

**) То есть решений в виде интегралов от элементарных или специальных функций. (*Прим. ред.*)

Можно указать также точные решения ряда задач для неограниченной области, в которой в начальный момент времени при $x < 0$ вещество находится в твердом состоянии и имеет постоянную температуру, а при $x > 0$ вещество находится в жидком состоянии и также имеет постоянную температуру. Эти решения легко обобщить на случай нескольких критических температур и на случай, когда вместо фиксированной точки плавления мы имеем интервал температур плавления.

Для других областей, таких, как пластина [3] $-a < x < a$ с поверхностью, поддерживаемой при нулевой температуре, или для области, в которой в начальный момент времени участок $-a < x < a$ представляет собой жидкость, а участок $|x| > a$ — твердое тело, точные решения отсутствуют.

Что касается задач о радиальном потоке тепла в цилиндрических или сферических координатах, то здесь положение оказывается еще худшим. Простое точное решение в цилиндрических координатах известно только для задачи о выделении или поглощении тепла непрерывным линейным источником. Для области, ограниченной изнутри или снаружи круговым цилиндром с постоянной температурой поверхности, имеется только приближенное решение.

Не считая нескольких задач, имеющих точные решения, все остальные задачи приходится решать численными методами. Для этой цели используются цифровые методы, а также дифференциальный анализатор и устройство, основанное на методе электрической аналогии и названное термическим анализатором. В таких случаях (ср. § 5 гл. XVIII) упомянутые выше точные решения часто полезны как нулевые приближения к решениям. Систематическое использование численных методов [4, 5] имеет то преимущество, что с их помощью можно учесть изменение термических свойств материала с температурой, которое в интервалах температур, встречающихся в задачах о плавлении и затвердевании, часто оказывается значительным.

Применение полученных результатов представляет значительный практический интерес. Задача об образовании льда [6, 7] имеет чрезвычайно большое значение как в геофизике, так и при производстве льда. В последнее время большое внимание уделяется вопросу затвердевания отливок [8]. Изучение охлаждения больших масс изверженных горных пород имеет большое значение в геологии [9]. Часто приходится встречаться также с задачами о диффузии, в результате которой появляются аналогичные уравнения и граничные условия [10—12].

§ 2. Одномерные случаи плавления и затвердевания. Решение Неймана и его обобщение

Термические коэффициенты материала в твердой фазе мы будем обозначать в данной главе через ρ, c_1, K_1, $\varkappa_1$, а его температуру через v_1; соответствующие величины в жидкой фазе мы будем обозначать через ρ, c_2, K_2, $\varkappa_2$ и v_2. Изменением объема при затвердевании мы везде (кроме примера VIII данного параграфа) будем пренебрегать, и следовательно, плотность ρ как твердой, так и жидкой фаз окажется одинаковой.

Пусть скрытая теплота плавления исследуемого вещества (*кал/г*) равна L, а температура плавления — T_1. Тогда, если поверхность раздела между твердой и жидкой фазами определяется координатой $X(t)$, одно из граничных условий, которое должно удовлетворяться на этой поверхности, запишется в виде

$$v_1 = v_2 = T_1, \quad \text{когда} \quad x = X(t). \tag{2.1}$$

Второе граничное условие касается поглощения или выделения скрытой теплоты на этой поверхности. Для определенности предположим, что в области $x > X(t)$ находится жидкость при температуре $v_2(x, t)$, а в области $x < X(t)$ — твердое вещество при температуре $v_1(x, t)$. В таком случае, если поверхность раздела перемещается на расстояние dX, то в элементе вещества выделяется и должно быть отведено в результате теплопроводности количество тепла, равное в пересчете на единицу поверхности $L\rho\, dX$. Иными словами,

$$K_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - K_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = L\rho \frac{dX}{dt}. \tag{2.2}$$

Условия (2.1) и (2.2) являются граничными условиями, которые в данном случае должны удовлетворяться на поверхности раздела. Легко видеть, что если в области $x < X$ будет находится жидкость с температурой $v_2(x, t)$, а в области $x > X$ — твердое вещество с температурой $v_1(x, t)$, то условие (2.2) также будет выполняться.

Условие (2.2) можно записать и в другой форме; для этого рассмотрим в плоскости (x, t) две кривые постоянной температуры $v_1(x, t) = T_1 = v_2(x, t)$ (см. (2.1)). В таком случае получаем

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} dx + \frac{\partial v_1}{\partial t} dt = 0 = \frac{\partial v_2}{\partial x} dx + \frac{\partial v_2}{\partial t} dt;$$

отсюда условие (2.2) можно записать в следующем виде:

$$K_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - K_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = -L\rho \frac{\dfrac{\partial v_1}{\partial t}}{\dfrac{\partial v_1}{\partial x}} = -L\rho \frac{\dfrac{\partial v_2}{\partial t}}{\dfrac{\partial v_2}{\partial x}}. \tag{2.3}$$

В этой форме нелинейность задачи становится очевидной. В трехмерном случае граничное условие (2.3) принимает вид

$$K_1 |\operatorname{grad} v_1| - K_2 |\operatorname{grad} v_2| = \pm L\rho \frac{\dfrac{\partial v_1}{\partial t}}{|\operatorname{grad} v_1|} = \pm L\rho \frac{\dfrac{\partial v_2}{\partial t}}{|\operatorname{grad} v_2|}, \tag{2.4}$$

где знаки должны быть выбраны так, чтобы они соответствовали рассматриваемой задаче.

В случае линейного теплового потока температуры v_1 и v_2 в твердой и жидкой областях должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa_1} \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa_2} \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0. \tag{2.6}$$

Помимо условий (2.1), (2.2), (2.5) и (2.6), должны выполняться еще условия на неподвижных границах рассматриваемой области. Ниже приводятся решения нескольких важных задач в случае линейного теплового потока [13; 14].

I. *Решение Неймана для полуограниченной области $x > 0$, представляющей собой в начальный момент времени жидкость с постоянной температурой V. При $t > 0$ поверхность $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре.*

В данном случае должны удовлетворяться условия (2.1), (2.2), (2.5) и (2.6), а также дополнительные граничные условия

$$v_2 \to V \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{2.7}$$

$$v_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{2.8}$$

Из (1.4) гл. II следует, что

$$v_1 = A\Phi \frac{x}{2(\varkappa_1 t)^{1/2}}, \tag{2.9}$$

где A — постоянная, удовлетворяющая (2.5) и (2.8). Кроме того, если B — постоянная величина, то

$$v_2 = V - B\Phi^* \frac{x}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}} \tag{2.10}$$

удовлетворяет условиям (2.6) и (2.7). Тогда из условия (2.1) следует, что

$$A\Phi \frac{X}{2(\varkappa_1 t)^{1/2}} = V - B\Phi^* \frac{X}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}} = T_1. \tag{2.11}$$

Поскольку соотношение (2.11) должно оставаться справедливым во все моменты времени, X должно быть пропорциональным $t^{1/2}$; например, должно быть справедливым соотношение

$$X = 2\lambda(\varkappa_1 t)^{1/2}, \tag{2.12}$$

где λ — численный множитель, который следует определять из остающегося условия (2.2). Воспользовавшись (2.9), (2.10) и (2.12), получим

$$K_1 A e^{-\lambda^2} - K_2 B \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{\varkappa_1 \lambda^2}{\varkappa_2}\right] = \lambda L \varkappa_1 \rho \pi^{1/2}, \tag{2.13}$$

или, используя (2.11) и (2.12),

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\Phi(\lambda)} - \frac{K_2 \varkappa_1^{1/2}(V - T_1)\exp\left[-\frac{\varkappa_1 \lambda^2}{\varkappa_2}\right]}{K_1 \varkappa_2^{1/2} T_1 \Phi^*\left[\lambda\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^{1/2}\right]} = \frac{\lambda L \pi^{1/2}}{c_1 T_1}. \tag{2.14}$$

После того как из (2.14) мы найдем λ, из (2.9) — (2.12) можно определить v_1 и v_2. Выражения для них записываются в виде

$$v_1 = \frac{T_1}{\Phi(\lambda)} \Phi\left[\frac{x}{2(\varkappa_1 t)^{1/2}}\right] \tag{2.15}$$

и

$$v_2 = V - \frac{V - T_1}{\Phi^*[\lambda(\varkappa_1/\varkappa_2)^{1/2}]} \Phi^*\left[\frac{x}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}}\right]. \tag{2.16}$$

Полученное выше решение является частным решением дифференциального уравнения (2.6) с граничным условием (2.7); оно удовлетворяет начальным условиям, вытекающим из (2.12) и (2.16). Они имеют вид

$$X = 0, \quad v_2 = V \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{2.17}$$

т. е. вся область $x > 0$ занята жидкостью с температурой V.

Численно решение уравнения (2.14) легко найти при помощи таблиц функции ошибок. Несколько значений его корней для воды ($K_2 = \varkappa_2 = 0{,}00144$)

и льда ($K_1 = 0{,}0053$, $\varkappa_1 = 0{,}0115$, $L\rho = 73{,}6$) при различных значениях начальной температуры ($V - T_1$) воды, а также температуры (T_1) при $x = 0$ указаны ниже.

Значения λ, удовлетворяющие (2.14)

T_1 \ $V-T_1$	0	1	2	3	4	5
1	0,056	0,054	0,053	0,051	0,050	0,049
2	0,079	0,077	0,076	0,074	0,073	0,071
3	0,097	0,095	0,093	0,091	0,090	0,088
4	0,111	0,110	0,108	0,106	0,104	0,103
5	0,124	0,123	0,121	0,119	0,117	0,115

В очень важном частном случае, когда в начальный момент времени температура жидкости равна температуре плавления, т. е. $V = T_1$, уравнение (2.14) принимает вид

$$\lambda e^{\lambda^2} \Phi(\lambda) = \frac{c_1 T_1}{L\pi^{1/2}}. \tag{2.18}$$

Корни этого уравнения можно найти из графика функции $\lambda e^{\lambda^2}\Phi(\lambda)$ (рис. 38, кривая *I*). Отметим, что для ряда материалов, например для горных пород или металлов с высокой температурой плавления, поверхности которых поддерживаются приблизительно при комнатной температуре, величина $c_1 T_1 / L\pi^{1/2}$ примерно равна единице. Вместе с тем в случае замерзания воды при отводе тепла в область с температурой на несколько градусов ниже нуля величина $c_1 T_1 / L\pi^{1/2}$ мала. В данном случае подстановка в уравнение (2.18) первого члена соотношения (4) из приложения 2 приближенно дает

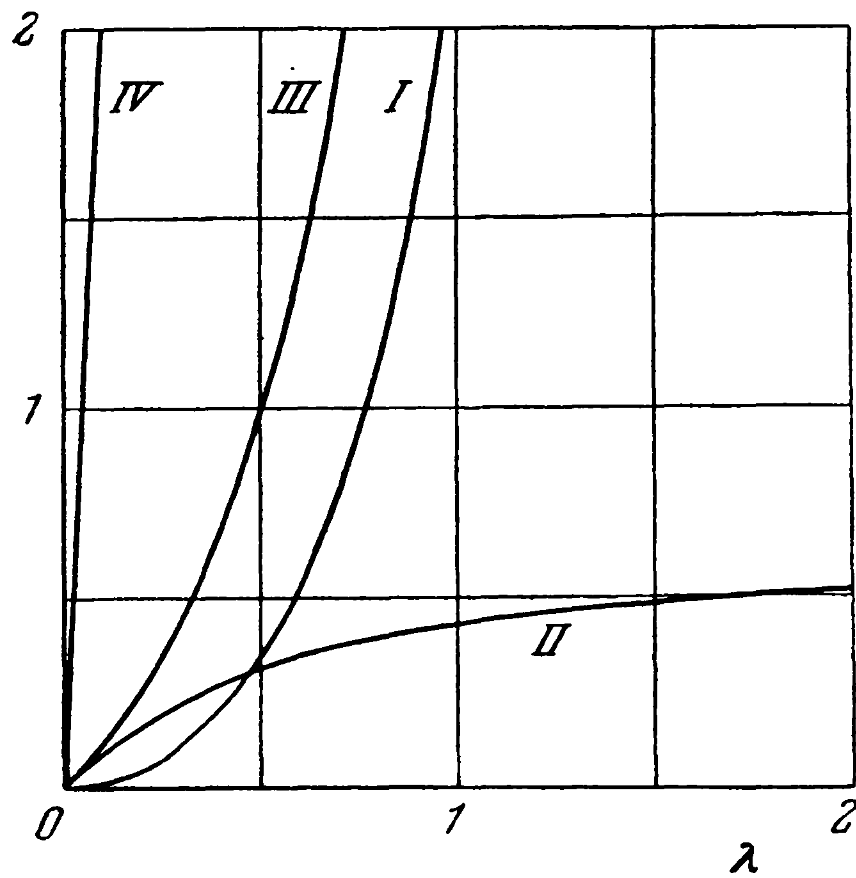


Рис. 38. Графики функций $\lambda e^{\lambda^2}\Phi(\lambda)$ (*I*), $\lambda e^{\lambda^2}\Phi^*(\lambda)$ (*II*), $\lambda e^{\lambda^2}[1 + \Phi(\lambda)]$ (*III*) и $\lambda e^{\lambda^2}[20 + \Phi(\lambda)]$ (*IV*).

$$\lambda^2 = \frac{c_1 T_1}{2L}. \tag{2.19}$$

Этот результат можно получить также при помощи интересного физического приближения, а именно предположив, что распределение температур в твердой фазе примерно совпадает с распределением, соответствующим установившемуся тепловому потоку, причем поверхность $x = X$ имеет температуру T_1, т. е. что

$$v_1 = \frac{xT_1}{X}. \tag{2.20}$$

Подстановка в условие (2.2) дает

$$K_1 T_1 = L\rho X \frac{dX}{dt}.$$

Отсюда

$$X^2 = \frac{2K_1 T_1 t}{L\rho}, \tag{2.21}$$

что эквивалентно (2.19).

II. *Случай переохлажденной жидкости.*

Пусть температура плавления твердого тела равна T_1, область $x > 0$ в начальный момент времени представляет собой жидкость с температурой $V < T_1$, а ее затвердевание начинается на плоскости $x = 0$ и распространяется вправо. Тепло от затвердевающего материала не отводится, и поэтому его температура будет иметь везде постоянное значение T_1.

Если $x = X(t)$ — поверхность раздела между твердой и жидкой фазами, то мы ищем решение в виде

$$X = 2\lambda(\varkappa_2 t)^{1/2}, \tag{2.22}$$

$$v_1 = T_1, \quad x < X,$$

$$v_2 = V + A\Phi^* \frac{x}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}}.$$

Тогда граничные условия при $x = X$ дают

$$V + A\Phi^*(\lambda) = T_1,$$

$$Ae^{-\lambda^2} = \lambda L\pi^{1/2}/c_2.$$

Отсюда следует, что λ служит корнем уравнения

$$\lambda e^{\lambda^2}\Phi^*(\lambda) = (T_1 - V)\, c_2/L\pi^{1/2}, \tag{2.23}$$

который можно найти по кривой *II* рис. 38.

III. *Плавление в области* $x > 0$.

Рассмотрим теперь задачу, в которой в начальный момент времени область $x > 0$ является твердым телом с нулевой температурой, а при $t > 0$ плоскость $x = 0$ поддерживается при постоянной температуре $V > T_1$. В этом случае, использовав, как и прежде, для твердой фазы обозначения K_1, $\varkappa_1$, ρ, c_1, v_1, а для жидкой фазы — K_2, $\varkappa_2$, ρ, c_2, v_2, мы получим для положения плоскости плавления выражение

$$X = 2\lambda(\varkappa_2 t)^{1/2}, \tag{2.24}$$

где λ — корень уравнения *)

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\Phi(\lambda)} - \frac{K_1\varkappa_2^{1/2}T_1\exp\left[-\frac{\lambda^2\varkappa_2}{\varkappa_1}\right]}{K_2\varkappa_1^{1/2}(V - T_1)\,\Phi^*\left[\lambda\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^{1/2}\right]} = \frac{\lambda L\pi^{1/2}}{c_2(V - T_1)}. \tag{2.25}$$

Тогда температуры твердой и жидкой фаз равны соответственно

$$v_2 = V - \frac{V - T_1}{\Phi(\lambda)}\,\Phi\frac{x}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}} \tag{2.26}$$

и

$$v_1 = \frac{T_1}{\Phi^*\left[\lambda\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^{1/2}\right]}\,\Phi^*\frac{x}{2(\varkappa_1 t)^{1/2}}. \tag{2.27}$$

Уравнения (2.25) и (2.14) отличаются друг от друга только тем, что здесь переставлены местами термические коэффициенты твердой и жидкой фаз и величины T_1 и $(V - T_1)$.

IV. *В начальный момент времени область* $x > 0$ *представляет собой жидкость, а область* $x < 0$ — *твердое тело.*

Предположим, что в начальный момент времени область $x < 0$ является твердым телом с термическими коэффициентами K_0, ρ_0, c_0, $\varkappa_0$ и нулевой температурой, а область $x > 0$ — жидкостью с термическими коэффициентами K_2, ρ, c_2, $\varkappa_2$ и постоянной температурой V. Термические коэффициенты K_1, ρ, c_1, $\varkappa_1$ затвердевшей жидкости могут отличаться от термических коэффициентов твердого тела в области $x < 0$.

Применяемый здесь метод является тривиальным обобщением использованного выше метода. Обозначая через v_0, v_1 и v_2 температуры в областях $x < 0$, $0 < x < X$

*) Такое решение с $T_1 = 0$, а также другие решения, не имеющие аналогии в задачах теплопроводности, появляются при изучении диффузии кислорода в мышцу, в каждой точке которой должно произойти восстановление до того, как кислород сможет проникнуть дальше [12].

и $x > X$ соответственно, где X — координата, определяющая положение поверхности раздела между твердой и жидкой фазами, примем

$$v_0 = A\left(1 + \Phi\left[\frac{x}{2(\varkappa_0 t)^{1/2}}\right]\right) \tag{2.28}$$

$$v_1 = B + C\Phi\frac{x}{2(\varkappa_1 t)^{1/2}}, \tag{2.29}$$

$$v_2 = V - D\Phi^*\frac{x}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}}. \tag{2.30}$$

В этом случае при $x \to \infty$ $v_0 \to 0$. A, B и C связаны условиями непрерывности при $x = 0$, которые дают

$$A = B \quad \text{и} \quad K_0 A \varkappa_1^{1/2} = K_1 C \varkappa_0^{1/2}. \tag{2.31}$$

Поступая здесь так же, как и выше, найдем

$$X = 2\lambda(\varkappa_1 t), \tag{2.32}$$

где λ теперь служит корнем уравнения

$$\frac{K_0 \varkappa_1^{1/2} e^{-\lambda^2}}{K_1 \varkappa_0^{1/2} + K_0 \varkappa_1^{1/2}\Phi(\lambda)} - \frac{K_2 \varkappa_1^{1/2}(V - T_1)\exp\left[-\frac{\varkappa_1 \lambda^2}{\varkappa_2}\right]}{K_1 \varkappa_2^{1/2} T_1 \Phi^*\left[\lambda\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^{1/2}\right]} = \frac{\lambda L \pi^{1/2}}{c_1 T_1}. \tag{2.33}$$

После нахождения λ мы получим для v_0, v_1 и v_2 соотношения

$$v_0 = \frac{K_1 \varkappa_0^{1/2} T_1}{K_1 \varkappa_0^{1/2} + K_0 \varkappa_1^{1/2}\Phi(\lambda)}\left\{1 + \Phi\frac{x}{2(\varkappa_0 t)^{1/2}}\right\}, \tag{2.34}$$

$$v_1 = \frac{T_1}{K_1 \varkappa_0^{1/2} + K_0 \varkappa_1^{1/2}\Phi(\lambda)}\left\{K_1 \varkappa_0^{1/2} + K_0 \varkappa_1^{1/2}\Phi\frac{x}{2(\varkappa_1 t)^{1/2}}\right\}, \tag{2.35}$$

$$v_2 = V - \frac{(V - T_1)}{\Phi^*\left[\lambda\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^{1/2}\right]}\Phi^*\frac{x}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}}. \tag{2.36}$$

Это решение было введено Шварцом [15, 16] в качестве лучшего, чем (2.14) — (2.16), приближения для задачи о затвердевании металла, залитого в форму, поскольку термические свойства затвердевшего металла и материала формы сильно отличаются друг от друга. Такое решение может также рассматриваться как фундаментальное решение задачи об охлаждении интрузивных изверженных пород, но в этом случае, поскольку термические свойства горных пород мало отличаются друг от друга, обычно можно считать, что $K_0 = K_1$, $\varkappa_0 = \varkappa_1$ и использовать несколько упрощенные результаты.

Если в начальный момент времени температура жидкости совпадает с температурой ее плавления, т. е. $V = T_1$, уравнение (2.33) принимает вид

$$\lambda e^{\lambda^2}\left\{\frac{K_1 \varkappa_0^{1/2}}{K_0 \varkappa_1^{1/2}} + \Phi\lambda\right\} = \frac{c_1 T_1}{L \pi^{1/2}}. \tag{2.37}$$

Как отмечалось выше, для горных пород отношение $\left(K_1 \varkappa_0^{1/2} / K_0 \varkappa_1^{1/2}\right)$ приблизительно равно единице, тогда как для чугуна в песке оно примерно достигает 25. Некоторые значения функции, записанной в левой части (2.37), показаны на рис. 38 (кривые *III* и *IV*). Если

$$V - T_1 > \frac{K_0 \varkappa_2^{1/2}}{K_2 \varkappa_0^{1/2}} T_1, \tag{2.38}$$

то корень уравнения (2.33) становится отрицательным, что соответствует плавлению твердого тела в области $x < 0$ горячей жидкостью. Если в этой области и в области $x > 0$ материалы одинаковы, то полученное выше решение правильно; если же они

различны, то решение должно быть переписано, с тем, чтобы соответствовать рассматриваемому случаю.

V. *Плавление* *) *в области* $x > 0$, *обусловленное контактом с горячим твердым телом в области* $x < 0$.

В этом случае область $x < 0$ в начальный момент представляет собой твердое тело с термическими коэффициентами K_0, ρ_0, c_0, $\varkappa_0$ и температурой $V > T_1$; область $x > 0$ — твердое тело с термическими коэффициентами K_1, ρ, c_1, $\varkappa_1$ и температурой, равной нулю. Термические коэффициенты этого материала в жидком состоянии равны K_2, ρ, c_2, $\varkappa_2$.

Если $X = 2\lambda(\varkappa_2 t)^{1/2}$ — координата, определяющая положение поверхности раздела, то λ служит корнем уравнения

$$\frac{K_0\varkappa_2^{1/2}(V - T_1)e^{-\lambda^2}}{K_2\varkappa_0^{1/2} + K_0\varkappa_2^{1/2}\Phi(\lambda)} - \frac{K_1\varkappa_2^{1/2}T_1 \exp\left[-\frac{\varkappa_2\lambda^2}{\varkappa_1}\right]}{K_2\varkappa_1^{1/2}\Phi^*\lambda\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^{1/2}} = \frac{\lambda L\pi^{1/2}}{c^2}. \tag{2.39}$$

VI. *Случай интервала температур плавления.*

Горные породы и сплавы не имеют фиксированных точек плавления, а плавятся в некотором интервале температур, например в интервале от T_2 до T_1, в котором выделяется скрытая теплота затвердевания L. Если эта теплота выделяется в интервале $T_2 - T_1$ равномерно, то ее влияние можно выразить, добавив к собственно теплоемкости жидкости в этом интервале c_2' величину $L/(T_2 - T_1)$. Иными словами, влияние скрытой теплоты затвердевания в интервале (T_2, T_1) можно приближенно учесть, используя в этом интервале выражение для удельной теплоемкости в виде

$$c_2 = c_2' + \frac{L}{T_2 - T_1}. \tag{2.40}$$

Таким образом, наша задача сводится к задаче, в которой не нужно рассматривать скрытую теплоту, но удельная теплоемкость оказывается переменной.

Подобные задачи, вообще говоря, можно решать так же, как и пример VII, однако результаты для наиболее важного частного случая, а именно для случая точного совпадения **) начальной температуры жидкости и температуры T_2 (т. е. наибольшей температуры интервала температур плавления), можно написать непосредственно, положив в соотношениях (2.14) и (2.33) $L = 0$. При этом подразумевается, что c_2 есть величина, определяемая (2.40).

Таким образом, для области $x > 0$, представляющей собой в начальный момент жидкость с температурой T_2, с поверхностью $x = 0$, поддерживаемой при $t > 0$ при нулевой температуре, уравнение (2.14) дает

$$\frac{\exp\left[(\varkappa_1 - \varkappa_2)\lambda^2/\varkappa_2\right]\Phi^*\left[\lambda(\varkappa_1/\varkappa_2)^{1/2}\right]}{\Phi(\lambda)} = \frac{(T_2 - T_1)K_2\varkappa_1^{1/2}}{T_1 K_1 \varkappa_2^{1/2}}. \tag{2.41}$$

Если в начальный момент область $x > 0$ представляет собой жидкость с температурой T_2, а область $x < 0$ — твердое тело, как в случае IV, то уравнение (2.33) принимает вид

$$\frac{K_0\varkappa^{1/2}\exp\left[(\varkappa_1 - \varkappa_2)\lambda^2/\varkappa_2\right]\Phi^*\left[\lambda(\varkappa_1/\varkappa_2)^{1/2}\right]}{K_1\varkappa_0^{1/2} + K_0\varkappa_1^{1/2}\Phi(\lambda)} = \frac{(T_2 - T_1)K_2\varkappa_1^{1/2}}{T_1 K_1\varkappa_2^{1/2}}. \tag{2.42}$$

VII. *Многофазные случаи.*

Проведенный выше анализ легко обобщить на случай вещества с несколькими температурами превращений или с несколькими интервалами температур, в которых выделяется скрытая теплота превращения. В качестве иллюстрации рассмотрим обобщение примера I на случай двух температур превращений.

Пусть в начальный момент времени в области $x > 0$ температура постоянна и равна V и при $t > 0$ поверхность $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре.

---

*) Например, случай плавления припоя нагретым железом. Система твердое тело — пар — вода рассмотрена в [17] в связи с проблемами закалки.

**) По-видимому, это имеет место для большинства магматических интрузий (включений). Численные результаты для охлаждения интрузивной оболочки приведены в работе Егера [18].

Предположим также, что исследуемый материал имеет две температуры превращения T_2 и T_1 $(V > T_2 > T_1 > 0)$, при которых выделяются скрытые теплоты превращений L_2 и L_1. Пренебрегая изменением объема при фазовом переходе будем считать, что все фазы имеют одинаковую плотность ρ. При описании фаз в температурных интервалах $(0, T_1)$, (T_1, T_2) и (T_2, V) мы будем пользоваться соответственно индексами 1, 2 и 3.

Между фазами 1 и 2 будет существовать поверхность раздела $x = X_1(t)$, а между фазами 2 и 3 — поверхность раздела $x = X_2(t)$. Анализ, совершенно аналогичный анализу, проведенному в примере I, показывает, что

$$X_1(t) = 2\lambda_1 (\varkappa_1 t)^{1/2}, \qquad X_2(t) = 2\lambda_2 (\varkappa_2 t)^{1/2}, \tag{2.43}$$

где

$$\frac{T_1}{\Phi(\lambda_1)} e^{-\lambda_1^2} - \frac{(T_2 - T_1) K_2 \varkappa_1^{1/2}}{\left[\Phi(\lambda_2) - \Phi\left(\lambda_1 (\varkappa_1/\varkappa_2)^{1/2}\right)\right] K_1 \varkappa_2^{1/2}} \exp\left[-\frac{\lambda_1^2 \varkappa_1}{\varkappa_2}\right] = \frac{L_1 \lambda_1 \pi^{1/2}}{c_1}, \tag{2.44}$$

$$\frac{T_2 - T_1}{\Phi(\lambda_2) - \Phi\left(\lambda_1 (\varkappa_1/\varkappa_2)^{1/2}\right)} e^{-\lambda_2^2} - \frac{(V - T_2) K_3 \varkappa_2^{1/2}}{K_2 \varkappa_3^{1/2} \Phi\left(\lambda_2 (\varkappa_2/\varkappa_3)^{1/2}\right)} \exp\left[-\frac{\lambda_2^2 \varkappa_2}{\varkappa_3}\right] = \frac{L_2 \lambda_2 \pi^{1/2}}{c_2}. \tag{2.45}$$

Когда совместные уравнения (2.44) и (2.45) разрешены относительно λ_1 и λ_2, температуры в рассматриваемых трех областях находят из соотношений

$$v_1 = \frac{T_1 \Phi\left[\dfrac{x}{2(\varkappa_1 t)^{1/2}}\right]}{\Phi(\lambda_1)}, \tag{2.46}$$

$$v_2 = \left\{(T_2 - T_1)\,\Phi\left[\frac{x}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}}\right] + T_1 \Phi(\lambda_2) - T_2 \Phi\left[\lambda_1 (\varkappa_1/\varkappa_2)^{1/2}\right]\right\} \left\{\Phi(\lambda_2) - \Phi\left[\lambda_1 (\varkappa_1/\varkappa_2)^{1/2}\right]\right\}^{-1}, \tag{2.47}$$

$$v_3 = V - \frac{(V - T_2)\,\Phi^*\left[\dfrac{x}{2(\varkappa_3 t)^{1/2}}\right]}{\Phi^*\left[\lambda_2 (\varkappa_2/\varkappa_3)^{1/2}\right]}. \tag{2.48}$$

В случае вещества, состоящего из n фаз, мы будем иметь $(n-1)$ границ фазового перехода, определяемых соотношениями типа (2.43), и $(n-1)$ уравнений типа (2.44) и (2.45) для $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Было показано, что их решение практически возможно [19].

VIII. *Влияние изменения объема при затвердевании.*

Если плотности твердой и жидкой фаз неодинаковы, то жидкость будет перемещаться. Для иллюстрации этого рассмотрим пример I, предположив для определенности, что плотность ρ_1 твердой фазы больше плотности жидкой ρ_2.

Как и выше (см. (2.12)), будем искать такое решение *), чтобы поверхность раздела находилась при $X = 2\lambda (\varkappa_1 t)^{1/2}$, а температура твердого тела равнялась

$$v_1 = A\Phi \frac{x}{2(\varkappa_1 t)^{1/2}}. \tag{2.49}$$

Далее, при перемещении поверхности раздела на расстояние dX количество образовавшегося при этом затвердевшего материала, отнесенное к единице поверхности $\rho_1\, dX$, эквивалентно количеству жидкости, находящемуся в слое толщиной $\rho_1\, dX/\rho_2$. Иными словами, жидкость движется вдоль оси x со скоростью u_x, определяемой соотношением

$$u_x = -\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) \frac{dX}{dt}. \tag{2.50}$$

Следовательно, уравнение теплопроводности (7.2) гл. I для движущейся жидкости принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 \varkappa_2} \frac{dX}{dt} \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{1}{\varkappa_2} \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0. \tag{2.51}$$

*) Несколько иное изложение, а также многочисленные примеры приложения к задачам диффузии даны в [10, 11].

Легко показать, что при приведенном выше значении X уравнение (2.51) удовлетворяется функцией

$$v_2 = V - B\Phi^* \left\{ \frac{x}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}} + \frac{\lambda(\rho_1 - \rho_2)\varkappa_1^{1/2}}{\rho_2 \varkappa_2^{1/2}} \right\}, \tag{2.52}$$

значение которой при $x \to \infty$ стремится к пределу, равному V. В соответствии с условием (2.1) на границе $x = X$ должно выполняться условие

$$A\Phi(\lambda) = V - B\Phi^* \left[\lambda \rho_1 \varkappa_1^{1/2} / \rho_2 \varkappa_2^{1/2}\right] = T_1. \tag{2.53}$$

Подстановка этих результатов *) в (2.2) дает уравнение для λ

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\Phi(\lambda)} - \frac{(V - T_1) K_2 \varkappa_1^{1/2} \exp\left[-\dfrac{\lambda^2 \rho_1^2 \varkappa_1}{\rho_2^2 \varkappa_2}\right]}{T_1 K_1 \varkappa_2^{1/2} \Phi^* \left[\dfrac{\lambda \rho_1 \varkappa^{1/2}}{\rho_2 \varkappa_2^{1/2}}\right]} = \frac{\lambda L \pi^{1/2}}{C_1 T_1}. \tag{2.54}$$

При $\rho_1 = \rho_2$ это уравнение сводится к (2.14).

Для льда $\rho_1 = 0{,}917$, для воды $\rho_2 = 1$, и из уравнения (2.54) при $V - T_1 = T_1 = 5°$ получаем $\lambda = 0{,}116$. Это значение сравнимо с величиной $\lambda = 0{,}115$, найденной из уравнения (2.14).

§ 3. Область $x > 0$ при других граничных условиях

Метод, изложенный в предыдущем параграфе, заключается в использовании решения уравнения для линейного потока тепла, являющегося функцией только $xt^{-1/2}$. Как отмечалось в § 1 гл. II, функция $\Phi\left[x(4\varkappa t)^{-1/2}\right]$ служит единственным решением такого типа, и поскольку нельзя удовлетворить граничным условиям третьего рода или граничным условиям с постоянным тепловым потоком, точных решений, подобных решениям предыдущего параграфа, не имеется. Тем не менее мы рассмотрим несколько задач этого типа.

I. *Затвердевание в области $x > 0$, когда в начальный момент времени жидкость находится при температуре плавления. При $x = 0$ тепловой поток F из твердого тела постоянен.*

В данном случае решение можно записать в виде ряда [20]. Для этого $X(t)$ представляют в виде степенного ряда по t, а v_1 — в виде двойного степенного ряда (1.13) гл. II. Подставив их в условия (2.1) и (2.2) предыдущего параграфа и воспользовавшись граничным условием при $x = 0$, т. е.

$$K_1 \frac{\partial v}{\partial x} = F, \tag{3.1}$$

получим искомое решение в виде

$$X(t) = \frac{Ft}{L\rho} - \frac{F^3 t^2}{2\varkappa_1 L^3 \rho^3} + \frac{5F^5 t^3}{6\varkappa_1^2 L^5 \rho^5} - \ldots, \tag{3.2}$$

$$v_1 = T_1 + \frac{Fx}{K_1} - \frac{F^2(x^2 + 2\varkappa_1 t)}{2\varkappa_1 K_1 L\rho} + \frac{F^4(x^4 + 12\varkappa_1 x^2 t + 12\varkappa_1^2 t^2)}{12\varkappa_1^3 K_1 L^3 \rho^3} - \ldots \tag{3.3}$$

II. *Пример I, но с граничным условием третьего рода*

$$\frac{\partial v}{\partial x} = hv, \qquad x = 0. \tag{3.4}$$

---

*) Тот факт, что условие (2.2) остается справедливым и при замене ρ на плотность фазы, остающейся в этой области, можно проверить путем составления теплового баланса для области $(X,\ X + dX)$.

В данном случае

$$X(t)=\frac{K_1hT_1t}{L\rho}-\frac{K_1^2h^3T_1^2(\varkappa_1L\rho+K_1T_1)\,t^2}{2\varkappa_1L^3\rho^3}+\ldots, \tag{3.5}$$

$$v_1=T_1+hT_1x-\frac{K_1h^2T_1^2(x^2+2\varkappa_1t)}{2\varkappa_1L\rho}-\frac{K_1h^3T_1^2(x^3+6\varkappa_1xt)}{6\varkappa_1L\rho}+\ldots \tag{3.6}$$

Некоторые значения температуры поверхности и положений поверхности раздела в этих случаях, полученные с помощью термического анализатора, приводятся в статье [21] *).

III. *Поверхность, на которой происходит затвердевание, движется с постоянной скоростью.*

Простое точное решение для этого случая получено Стефаном [1]. Очевидно, что

$$v_1=T_1+A\,[1-\exp(\varkappa_1m^2t-mx)],\qquad x<\varkappa_1mt, \tag{3.7}$$

$$v_2=T_1,\qquad x>\varkappa_1mt, \tag{3.8}$$

где постоянные A и m удовлетворяют условиям (2.1), (2.5) и (2.6) предыдущего параграфа. Это решение удовлетворяет также условию (2.2) данной главы, если

$$A=L/c_1. \tag{3.9}$$

Таким образом, оно представляет собой решение задачи о промерзании в области $x>0$, в которой в начальный момент времени жидкость имеет температуру плавления, а поверхность, на которой происходит затвердевание, движется с постоянной скоростью $\varkappa_1m$. Однако поскольку на плоскости $x=0$ температура $T_1-(L/c_1)(e^{\varkappa_1m^2t}-1)$ принимает отрицательные, экспоненциально увеличивающиеся во времени (по абсолютной величине) значения, найденное решение не представляет большого физического интереса.

IV. *Плавление с непрерывным удалением расплавленного материала.*

Пусть твердое тело нагревается благодаря поступлению на его поверхность постоянного теплового потока F, причем весь расплавленный материал непрерывно удаляется, например, путем сдувания. Сюда же можно отнести и случай сублимации. Он имеет важное практическое приложение и именно таким, по-видимому, можно себе представить механизм разогревания метеоритов в земной атмосфере. Здесь мы приведем только простое решение для случая стационарного распределения температур [22, 23].

Примем плоскость, на которой происходит плавление, за плоскость $x=0$ и будем считать, что твердое тело в области $x>0$ движется относительно этой плоскости со скоростью U (последнюю и нужно определить). Тогда, если T_1 — температура плавления, температура v в области $x>0$ служит решением уравнения (7.2) гл. I при $u_x=-U$; при $x\to 0$ эта температура v стремится к T_1, а при $x\to\infty$ она стремится к нулю. Иными словами,

$$v=T_1e^{-Ux/\varkappa_1}. \tag{3.10}$$

Если использовать это значение v, то из (7.1) гл. I следует, что тепловой поток в твердое тело равен нулю и, следовательно, количество тепла, подводимого извне в единицу времени F, должно равняться количеству тепла, отводимого в единицу времени с расплавленным материалом, т. е.

$$F=(L+c_1T_1)\,\rho U, \tag{3.11}$$

а температура v при этом значении U определяется формулой (3.10).

§ 4. Методы интегрального уравнения. Рассмотрение задач затвердевания, предложенное Лайтфутом

Если допустить, что термические свойства твердой и жидкой фаз одинаковы, то можно применить другой очень мощный метод. Пусть в момент времени t поверхность затвердевания будет $x=X(t)$; эта поверхность движется со скоростью $\dot{X}(t)$,

---

*) Там же рассмотрены пример III и соответствующие задачи для цилиндра и шара.

а количество выделяемой на ней в единицу времени теплоты затвердевания равно

$$L\rho \dot{X}(t). \tag{4.1}$$

Следовательно, выделение теплоты затвердевания соответствует движению источника тепла на поверхности $x = X(t)$, мощность которого определяется (4.1). Температуру в любой точке можно найти путем введения членов, описывающих влияния этого движущегося источника, а также начального и граничных условий. Тот факт, что на поверхности $x = X(t)$ температура всегда должна совпадать с температурой плавления T_1, приводит к интегральному уравнению для $X(t)$ *).

Для пояснения данного метода рассмотрим пример I, приведенный в § 2 данной главы, а именно, случай затвердевания в области $x > 0$ с начальной температурой $V > T_1$ и с поверхностью $x = 0$, поддерживаемой при $t > 0$ при нулевой температуре. Как и в § 3 гл. X, температура $w(x, t)$ в плоскости x в момент времени t, обусловленная движущимся источником (4.1), определяется соотношением

$$w(x, t) = \frac{L}{2c(\pi\varkappa)^{1/2}} \int_0^t \frac{\dot{X}(t')\,dt'}{(t-t')^{1/2}} \left\{ \exp\left[-\frac{[x - X(t')]^2}{4\varkappa(t-t')}\right] - \exp\left[-\frac{[x + X(t')]^2}{4\varkappa(t-t')}\right] \right\}. \tag{4.2}$$

Температура $u(x, t)$ в плоскости x в момент времени t, обусловленная постоянной начальной температурой V, равна

$$u(x, t) = V\Phi\left[\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]. \tag{4.3}$$

Температура в плоскости x в момент времени t равна сумме (4.2) и (4.3). Тогда условие, согласно которому температура в плоскости $x = X(t)$ совпадает с температурой плавления T_1, запишется в виде

$$w\{X(t), t\} + u\{X(t), t\} = T_1, \tag{4.4}$$

т. е. будет интегральным уравнением относительно $X(t)$.

Лайтфут [3] **) решил эту задачу, исходя из сделанного ранее предположения, что

$$X(t) = 2\lambda(\varkappa t)^{1/2}. \tag{4.5}$$

При таком значении $X(t)$ интеграл (4.2) можно выразить через функции ошибок После замены переменных

$$y = \frac{x}{X(t)}, \qquad t' = t\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 \tag{4.6}$$

соотношение (4.2) принимает вид

$$w(x, t) = \frac{2L\lambda}{c\pi^{1/2}}\{I_1 - I_2\} \tag{4.7}$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4}\left[\frac{y-1}{z} + (y+1)z\right]^2\right\} = \frac{1}{4}\pi e^{\lambda^2}\Phi^*(\lambda)[1 + \Phi(\lambda y)], \quad y < 1, \tag{4.8}$$

$$I_1 = \frac{1}{4}\pi e^{\lambda^2}\Phi^*(\lambda y)[(1 + \Phi(\lambda)], \qquad y > 1, \tag{4.9}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4}\left[\frac{y+1}{z} + (y-1)z\right]^2\right\} = \frac{1}{4}\pi e^{\lambda^2}\Phi^*(\lambda y)\,\Phi^*(\lambda). \tag{4.10}$$

*) Более полно методы, использующие интегральные уравнения, изложены в [20].

**) Он вывел соотношения (4.8) — (4.10), воспользовавшись разложением в ряд, но их можно получить и другими методами.

Согласно (4.6) области $y \lessgtr 1$ соответствуют жидкой и твердой зонам, а $y = 1$ — плоскости затвердевания. Если использовать (4.3), (4.8) и (4.10) при $y = 1$, то условие (4.4) примет вид

$$\frac{L\lambda\pi^{1/2}}{c}\, e^{\lambda^2}\Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda) + V\Phi(\lambda) = T_1, \tag{4.11}$$

что согласуется с соотношением (2.14) данной главы для случая $K_1 = K_2$ и $\varkappa_1 = \varkappa_2$.

Другие задачи, приведенные в § 2 этой главы, можно рассматривать аналогичным образом. Лайтфут [3] провел приближенное исследование задачи о затвердевании в области, ограниченной параллельными плоскостями, рассматривая не два изображения, как это было сделано выше, а бесконечный их ряд. В другой работе [24] описанный выше метод использовался иначе.

§ 5. Решения в цилиндрических и сферических координатах

Существование решений для линейного теплового потока, найденных в § 2 данной главы, зависит в основном от существования решений уравнения теплопроводности, являющихся функциями только $xt^{-1/2}$. Это позволяет предположить, что решения в цилиндрических или сферических координатах, являющиеся функциями только $r \cdot t^{-1/2}$, могут дать полезные результаты.

Легко доказать, что

1) *в цилиндрических координатах* функция

$$-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) \tag{5.1}$$

служит решением уравнения теплопроводности и что

2) *в сферических координатах* функция

$$\frac{(\varkappa t)^{1/2}}{r}\exp\left[-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right] - \frac{1}{2}\pi^{1/2}\Phi^*\left(\frac{r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right) \tag{5.2}$$

служит решением уравнения теплопроводности. Кроме того, было показано, что они являются единственными решениями такого типа [25]. Эти решения использованы Франком [26] для изучения радиально-симметричного увеличения объема фазы, регулируемого диффузией, или, придерживаясь принятой терминологии, радиального увеличения объема сферического или цилиндрического твердого тела, образующегося из расплавленного материала (одномерный случай уже рассматривался выше; см. пример II § 2 данной главы). Здесь мы допустим, что плотности твердой и жидкой фаз одинаковы. В противном случае будет иметь место движение жидкости [27].

Излагаемые ниже результаты можно получить таким же путем, как и в § 2 данной главы (см. пример II).

I. *Область $r < R$ в цилиндрических координатах состоит из твердого тела, находящегося при температуре плавления T_1, а область $r > R$ — из переохлажденной жидкости, температура которой v_2 при $r \to \infty$ стремится к $V < T_1$.*

Положение поверхности раздела определяется соотношением

$$R = 2\lambda(\varkappa_2 t)^{1/2},$$

где λ — корень уравнения

$$\lambda^2 e^{\lambda^2}\,\mathrm{Ei}(-\lambda^2) + c_2(T_1 - V)/L = 0, \tag{5.3}$$

а температура v_2 жидкости — уравнением

$$v_2 = V + \frac{(T_1 - V)\,\mathrm{Ei}(-r^2/4\varkappa_2 t)}{\mathrm{Ei}(-\lambda^2)}. \tag{5.4}$$

II. *Для соответствующей задачи в сферических координатах мы будем иметь* $R = 2\lambda(\varkappa_2 t)^{1/2}$, *где* λ — *корень уравнения*

$$\lambda^2 e^{\lambda^2}\{e^{-\lambda^2} - \lambda\pi^{1/2}\Phi^*(\lambda)\} = \frac{1}{2}c_2(T_1 - V)/L. \tag{5.5}$$

Температура жидкости v_2 равна следующей величине:

$$v_2 = V + \frac{2\lambda(T_1 - V)}{e^{-\lambda^2} - \lambda\pi^{1/2}\Phi^*(\lambda)}\left\{\frac{(\varkappa_2 t)^{1/2}}{r}\exp\left[-\frac{r^2}{4\varkappa_2 t}\right] - \frac{\pi^{1/2}}{2}\Phi^*\left(\frac{r}{2(\varkappa_2 t)^{1/2}}\right)\right\}. \tag{5.6}$$

§ 6. Осесимметричные задачи о замерзании и плавлении

Несмотря на важность подобных задач в ряде случаев (например, намерзание льда на цилиндрические трубы), общие данные по этому вопросу очень скудны.

Мы рассмотрим здесь только случай, когда поверхностью раздела между твердой и жидкой фазами служит поверхность $r = R(t)$, причем область $r > R$ содержит жидкость с термическими коэффициентами ρ, c_2, K_2, $\varkappa_2$, а область $r < R$ — твердое тело с термическими коэффициентами ρ, c_1, K_1, $\varkappa_1$. Тогда, если v_2 и v_1 — температуры в этих двух областях, а T_1 — температура плавления, то граничные условия при $r = R$ запишутся в виде

$$v_1 = v_2 = T_1, \tag{6.1}$$

$$K_1\frac{\partial v_1}{\partial r} - K_2\frac{\partial v_2}{\partial r} = L\rho\frac{dR}{dt}. \tag{6.2}$$

I. *Решение для случая непрерывного линейного источника, расположенного вдоль оси* $r = 0$.

Используя фундаментальное решение (5.1) предыдущего параграфа, можно точно показать (как и в примере I § 2 данной главы), что дифференциальные уравнения и граничные условия (6.1) и (6.2) удовлетворяются функциями

$$v_1 = T_1 + \frac{Q}{4\pi K_1}\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa_1 t}\right) - \mathrm{Ei}(-\lambda^2)\right\}, \qquad 0 < r < R, \tag{6.3}$$

$$v_2 = V - \frac{(V - T_1)}{\mathrm{Ei}(-\lambda^2\varkappa_1/\varkappa_2)}\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa_2 t}\right), \qquad r > R, \tag{6.4}$$

где

$$R = 2\lambda(\varkappa_1 t)^{1/2}, \tag{6.5}$$

а λ — корень уравнения

$$\frac{Q}{4\pi}e^{-\lambda^2} + \frac{K_2(V - T_1)}{\mathrm{Ei}\left[-\frac{\lambda^2\varkappa_1}{\varkappa_2}\right]}\exp\left[-\frac{\lambda^2\varkappa_1}{\varkappa_2}\right] = \lambda^2\varkappa_1 L\rho. \tag{6.6}$$

При $t = 0$, $R = 0$ и $v_2 = V$ и, следовательно, вначале вся область $r > 0$ заполнена жидкостью с температурой V. При $t > 0$

$$\lim_{r \to 0} 2\pi r K_1\frac{\partial v_1}{\partial r} = Q. \tag{6.7}$$

Таким образом, это решение совпадает с решением для случая замерзания при непрерывно действующем линейном стоке, расположенном вдоль оси, который при $t > 0$ отбирает в единицу времени количество тепла, равное Q.

Оно является единственным простым точным решением, имеющимся для цилиндрической области [25, 28] *).

II. *Область $r > a$ в начальный момент представляет собой жидкость, находящуюся при температуре плавления T_1, а при $t > 0$ поверхность $r = a$ поддерживается при нулевой температуре.*

Для данного случая точного решения нет. Важное приближенное решение можно получить, как и в § 2 данной главы (см. соотношение (2.20)), предположив, что распределение температур в твердом теле совпадает с распределением стационарного типа, т. е. что

$$v_1 = \frac{T_1 \ln(r/a)}{\ln(R/a)}, \qquad a < r < R. \tag{6.8}$$

Подстановка этого соотношения в (6.2) дает

$$R \ln\left(\frac{R}{a}\right) \frac{dR}{dt} = \frac{K_1 T_1}{L\rho}. \tag{6.9}$$

Интегрируя, получаем

$$2R^2 \ln\left(\frac{R}{a}\right) - R^2 + a^2 = \frac{4K_1 T_1 t}{L\rho}. \tag{6.10}$$

Уравнение (6.10) действительно служит достаточно хорошим приближенным выражением для положения поверхности раздела при $L \gg c$, например в случае замерзания воды. Второе приближение найдено Пекерисом и Слихтером [29], которые воспользовались методом разложения в ряд. Они показали, что ряд

$$A + B \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{(\dot{A} - \dot{B}) r^2 + \dot{B} r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right)}{4\varkappa} + \ldots, \tag{6.11}$$

где A и B являются функциями только t, удовлетворяет дифференциальному уравнению для радиального потока тепла. Затем этот ряд подставляют в граничные условия и определяют A и B методом последовательных приближений. Случай затвердевания в области внутри цилиндра $r = a$ можно рассмотреть аналогичным образом. Были найдены также решения в виде рядов для случая, когда поверхность раздела движется с постоянной скоростью [21].

ЛИТЕРАТУРА

1. Stefan, Ann. Phys. u. Chem. (Wiedemann) (N. F.) **42**, 269—286 (1891).
2. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, ed. 5, 1912, v. 2, p. 121. (Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.)
3. Lightfoot, Proc. Lond. Math. Soc. **31**, 97—116 (1930).
4. Eyres, Hartree, Ingham, Jackson, Sarjant, Wagstaff, Phil. Trans. Roy. Soc. **A240**, 1—57 (1948).
5. Crank, Quart. J. Mech. Appl. Math. **10**, 220 (1957).
6. Plank, Z. Ges. Kälte-Ind. Beih., Reihe **3**, H. 10 (1941); **20**, 109 (1913).
7. London, Seban, Trans. ASME **65**, 771 (1943).
8. Ruddle, The Solidification of Castings, The Institute of Metals, 1950.
9. Larsen, Am. J. Sci. **243A**, 399 (1945).
10. Crank, J. The Mathematics of Diffusion, Oxford, 1956.
11. Danckwerts, Trans. Faraday Soc. **46**, 701—712 (1950).
12. Hill, Proc. Roy. Soc. **B104**, 39—96 (1928).

*) Аналогичным образом из соотношения (5.2) предыдущего параграфа можно найти решение в сферических координатах, но поскольку это решение соответствует затвердеванию при наличии непрерывного точечного стока, мощность которого линейно увеличивается со временем, большого физического значения оно не имеет.

13. Lachmann, Z. angew. Math. Mech. **15**, 345 (1935); **17**, 379 (1937).
14. Huber, Z. angew. Math. Mech. **19**, 1 (1939).
15. Schwarz, Arch. Eisenhüttenw. **5**, 139, 177 (1931).
16. Schwarz, Z. angew. Math. Mech. **13**, 202 (1933).
17. Heindlhofer, Phys. Rev. **20**, 221—242 (1922).
18. Jaeger, Am. J. Sci. **255**, 306 (1957).
19. Weiner, Brit. J. Appl. Phys. **6**, 361—364 (1955).
20. Evans II. Isaacson, MacDonald, Quart. Appl. Math. **8**, 312—319 (1950).
21. Kreith, Romie, Proc. Phys. Soc. **B68**, 277—291 (1955).
22. Landau, Quart. Appl. Math. **8**, 81—94 (1950).
23. Masters, J. Appl. Phys. **27**, 477—485 (1956).
24. Blevin, Aust. J. Phys. **6**, 203—208 (1953).
25. Paterson, Proc. Glasgow Math. Ass. **1**, 42—47 (1952—1953).
26. Frank, Proc. Roy. Soc. **A201**, 586—599 (1950).
27. Chambré, Quart. J. Mech. Appl. Math. **9**, 224—233 (1956).
28. Ingersoll, Adler, Plass, Ingersoll, Heat. Pip. Air Condit. **22**, 113—122 (1950).
29. Pekeris, Slichter, J. Appl. Phys. **10**, 135—137 (1939).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

30. А. В. Лыков, Кинетика и динамика процессов сушки и увлажнения, Гос. изд. легкой пром-ти, 1938.
31. А. В. Лыков, Теплопроводность нестационарных процессов, Госэнергоиздат, 1948.
32. А. В. Лыков, Теория сушки, Госэнергоиздат, 1950.
33. А. В. Лыков, Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1952.
34. А. В. Лыков, Тепло- и массообмен в процессах сушки, Госэнергоиздат, 1956.
35. А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов, Теория переноса энергии и вещества, Минск, 1959.
36. А. А. Померанцев, Курс лекций по теории тепло- и массообмена, Изд. «Высшая школа», 1964.
37. А. А. Померанцев, К теории оплавления и обгорания тела (задача Стефана), Труды 1-го Совещания по тепло- и массообмену, 1961, т. III, 1963.

ГЛАВА XII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

§ 1. Исторический обзор

Можно сказать, что использованные в предыдущих главах методы служат непосредственным следствием и обобщением классической работы Фурье. Сравнительно недавно был разработан другой метод исследования дифференциальных уравнений прикладной математики, особенно хорошо приспособленный для решения задач теплопроводности. Этот метод в значительной степени основан на работе Хевисайда. Все полученные выше решения задач теплопроводности в случае нестационарного режима можно найти при помощи нового метода. Однако, поскольку преимущества этого метода практически возрастают вместе со сложностью задачи, по-видимому, лучше всего приложить его для иллюстрации к нескольким уже рассмотренным задачам, а затем использовать его в более сложных случаях, исследовать которые другими методами очень трудно.

В 1890 г. Хевисайд разработал ставший знаменитым операционный метод для решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, встречающихся в теории электрических цепей. Для этого случая Хевисайд дал элементарное обоснование своего метода. Затем он обобщил *) его на дифференциальные уравнения в частных производных электромагнитного поля и теплопроводности и получил целый ряд новых решений, причем этим методом не только удалось найти решения еще нерешенных задач, но и получить решения новых типов, например решения, специально соответствующие большим или малым промежуткам времени. Математическая строгость этих решений оставалась довольно сомнительной, и поэтому появилась настоятельная потребность математически строго обосновать всю теорию. Первый шаг в этом направлении был сделан Бромвичем **) [2], который в своей классической статье получил контурный интеграл с операционным выражением Хевисайда в качестве подынтегральной функции. Далее он доказал, что этот интеграл удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальным условиям, а позже оценил интеграл обычными методами контурного интегрирования. Его идеи были в дальнейшем развиты в книге [4] и нашли широкое использование в теории теплопроводности. Подобный метод, в котором также применяется контурный интеграл, был разработан Карслоу [5] (см. также приложение 1), но в его методе подын-

*) Краткое описание обобщенного метода Хевисайда дано в историческом введении в книге Карслоу и Егера [1].

**) Независимо от Бромвича аналогичные идеи были развиты Вагнером [3].

тегральная функция определялась не по методу Хевисайда, а независимым образом *).

Другой метод, подтверждающий правильность работы Хевисайда, был разработан Карсоном и Ван-дер-Полем, которые показали, что искомое решение можно найти из операционного выражения Хевисайда, решая интегральное уравнение. Это интегральное уравнение представляет собой просто интеграл, который появляется в уравнении (2.1) данной главы как определение преобразования Лапласа; отметим здесь же, что упоминавшийся выше контурный интеграл Бромвича представляет собой просто контурный интеграл, который появится в соотношении (3.8) в теореме обращения преобразования Лапласа.

Таким образом, излагаемый ниже метод преобразования Лапласа объединяет теории Хевисайда, Бромвича и Карсона. Важность этого метода подчеркивается в ряде статей, большинство которых посвящено рассмотрению задач теплопроводности [7].

Ниже мы кратко изложим метод преобразования Лапласа, приводя формулировку теорем и схемы их доказательств, отвечающие поставленным здесь задачам; более полное изложение можно найти в работах, специально посвященных этому предмету [1,8—10]. Как отмечалось выше, решения, полученные методом Бромвича — Джефриза, часто встречаются в литературе, посвященной теплопроводности; операционные выражения, используемые ими для v, всегда отличаются множителем p от полученных нами выражений для $\bar{v}$, записанных в принятых ниже обозначениях. Метод вывода решений с помощью теории контурного интегрирования одинаков в обоих случаях, и поэтому статьи, в которых использованы одни обозначения, легко читать лицам, привыкшим к другим обозначениям.

§ 2. Преобразование Лапласа. Основные свойства

Ниже везде будет рассматриваться температура v, являющаяся функцией t и любых координат (например, x, y, z), встречающихся в задаче. Запишем

$$L\{v(x, y, z, t)\} = \bar{v} = \int_0^\infty e^{-pt} v(x, y, z, t)\, dt, \tag{2.1}$$

где p — величина, действительная часть которой положительна и достаточно велика, чтобы интеграл (2.1) сходился **).

Интеграл (2.1) называют преобразованием Лапласа функции v и он является функцией p и пространственных переменных x, y, z. Из двух приведенных обозначений символ $L\{v\}$ удобен при формулировке теорем, тогда как символ $\bar{v}$ достаточно компактен и удобен при проведении алгебраических выкладок, связанных с нахождением решения.

Аппарат описываемого метода состоит из нескольких элементарных теорем и таблицы преобразованных по Лапласу функций, т. е. интегралов (2.1),

*) Интересное сравнение обоих методов приведено в статье [6].

**) Бромвич и др. вместо (2.1) пользуются следующим преобразованием:

$$L\{v(x, y, z, t)\} = \bar{v} = p\int_0^\infty e^{-pt} v(x, y, z, t)\, dt.$$

(*Прим. ред.*)

Например,

$$\text{если } v(t)=1, \quad \text{то } \bar{v}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\,dt=\frac{1}{p},$$

или

$$\text{если } v(t)=\sin\omega t, \quad \text{то } \bar{v}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\sin\omega t\,dt=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

и т. д.

В приложении 5 приведено большинство преобразованных по Лапласу функций, которыми пользуются *) при решении задач теплопроводности.

Необходимые нам для дальнейшего теоремы приведены ниже. В большинстве случаев мы дадим только краткие доказательства без точной формулировки условий. Точные условия нам здесь не нужны, поскольку, как отмечено в следующем параграфе, на этой стадии проводится только формальный анализ, а полученные результаты обязательно подлежат проверке.

Теорема I.

$$L\{v_1+v_2\}=L\{v_1\}+L\{v_2\}.$$

Теорема II.

$$L\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\}=pL\{v\}-v_0, \tag{2.2}$$

где v_0 *— значение* $\lim\limits_{t\to+0} v$. В общем случае v_0 будет функцией пространственных переменных x, y, z. Формула (2.2) непосредственно получается при интегрировании по частям; действительно

$$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial v}{\partial t}\,dt=[e^{-pt}v]_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}v\,dt=-v_0+p\bar{v}.$$

Теорема III.

$$L\left\{\frac{\partial^n v}{\partial x^n}\right\}=\frac{\partial^n \bar{v}}{\partial x^n}. \tag{2.3}$$

При других пространственных переменных мы получаем аналогичные результаты. Найденный результат эквивалентен соотношению

$$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^n v}{\partial x^n}dx=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_0^\infty e^{-pt}v\,dt.$$

Мы считаем функцию v такой, что указанным способом можно менять последовательность операций интегрирования и дифференцирования.

Приведенные выше три теоремы имеют очень большое значение. В дополнение к ним мы укажем ряд полезных результатов, на которые мы также будем изредка ссылаться.

Теорема IV.

$$L\left\{\int_0^t v(t')\,dt'\right\}=\frac{1}{p}L\{v\}, \tag{2.4}$$

---

*) Более полные таблицы этих функций можно найти в уже упоминавшихся работах, а также в [11—13].

ибо интегрирование по частям дает

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^t v(t')\,dt = -\left[\frac{1}{p} e^{-pt} \int_0^t v(t')\,dt'\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt} v\,dt = \frac{1}{p}\bar{v}.$$

Теорема V. *Если k является величиной постоянной и положительной, а*

$$L\{v(t)\} = \bar{v}(p), \quad \text{то} \quad L\{v(kt)\} = \frac{1}{k}\bar{v}\left(\frac{p}{k}\right), \tag{2.5}$$

ибо

$$\int_0^\infty e^{-pt} v(kt)\,dt = \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-(p/k)t'} v(t')\,dt' = \frac{1}{k}\bar{v}\left(\frac{p}{k}\right).$$

Теорема VI. *Если a является величиной постоянной (даже комплексной), а $L\{v\} = \bar{v}(p)$, то*

$$L\{e^{-at} v\} = \bar{v}(p + a), \tag{2.6}$$

ибо

$$\int_0^\infty e^{-pt} e^{-at} v\,dt = \int_0^\infty e^{-(p+a)t} v\,dt = \bar{v}(p + a).$$

Теорема VII. *Если $f(t) = H(t - t_0)\varphi(t - t_0)$, где $H(t - t_0)$ — единичная функция Хевисайда, определяемая следующим образом:*

$$\left.\begin{aligned} H(t - t_0) &= 0, \quad t < t_0, \\ H(t - t_0) &= 1, \quad t > t_0, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

то

$$L\{f(t)\} = e^{-pt_0} L\{\varphi(t)\}. \tag{2.8}$$

Теорема VIII. *Если $f(t)$ является периодической функцией с периодом T, то*

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt, \tag{2.9}$$

ибо

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,e^{-pt}\,dt = \sum_{n=0}^\infty e^{-npT}\int_0^T e^{-pt'} f(t')\,dt' =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Теорема IX. *Теорема Лерха, или теорема единственности*).* *Пусть для всех p $L\{f_1(t)\} = L\{f_2(t)\}$, тогда $f_1(t) = f_2(t)$ для всех $t \geqslant 0$, при которых они непрерывны. Если же функции имеют только*

*) Доказательства теорем IX и X можно найти в обычных работах по преобразованию Лапласа. Теорема XI и другие, подобные ей теоремы приведены в работе [14]. [См. также М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1951. СМБ, Интегральные преобразования, Физматгиз, 1961. (*Прим. ред.*)]

разрывы первого рода, то в этих точках они могут отличаться друг от друга.

Теорема X.

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right\}=L\left\{\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)\,d\tau\right\}=L\{f_1(t)\}\,L\{f_2(t)\}. \quad (2.10)$$

Эта теорема известна как теорема о свертке, а также как теорема Дюамеля. Она представляет собой другую форму записи теоремы Дюамеля, приведенной в § 14, гл. I с использованием принятых в данной главе обозначений.

Теорема XI. *Если*

$$L\{v(t)\}=\bar{v}(p),$$

то

$$L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{u^2}{4t}\right]v(u)\,du\right\}=\frac{\bar{v}(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}. \quad (2.11)$$

§ 3. Решение уравнения теплопроводности методом преобразования Лапласа

Предположим, что нам надо решить следующее уравнение для линейного потока тепла:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0, \quad a<x<b, \quad (3.1)$$

при условиях

$$v=v_0(x), \quad t=0, \quad a<x<b, \quad (3.2)$$

$$v=v_1(t), \quad x=a, \quad t>0, \quad (3.3)$$

$$v=v_2(t), \quad x=b, \quad t>0. \quad (3.4)$$

Применим к уравнению (3.1) преобразование Лапласа, т. е. умножим обе его части на e^{-pt} и проинтегрируем по t в пределах от 0 до ∞. Это дает

$$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dt-\frac{1}{\varkappa}\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial v}{\partial t}\,dt=0.$$

Используя соотношения (2.2) и (2.3) предыдущего параграфа, получим

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}-\frac{p}{\varkappa}\bar{v}=-\frac{1}{\varkappa}v_0(x), \quad a<x<b. \quad (3.5)$$

Таким образом, преобразование Лапласа свело дифференциальное уравнение с частными производными к обыкновенному дифференциальному уравнению (3.5). Полученное этим путем уравнение для $\bar{v}$ мы всегда будем называть *вспомогательным уравнением*. Преобразуя аналогичным образом граничные условия (3.3) и (3.4), получим

$$\bar{v}=\bar{v}_1, \quad x=a, \quad (3.6)$$

$$\bar{v}=\bar{v}_2, \quad x=b. \quad (3.7)$$

Изображение $\bar{v}$ (т. е. преобразование Лапласа v) решения задачи известно, если решено вспомогательное уравнение (3.5) при граничных усло-

виях (3.6) и (3.7). Перед тем как перейти к методам нахождения v из $\bar{v}$, следует отметить, что более общие дифференциальные уравнения (например, уравнение (10.5) гл. IV) и более общие граничные условия (например (9.14) гл. I) приводят точно таким же путем к обыкновенному дифференциальному уравнению с граничными условиями при a и b и, следовательно, к величине $\bar{v}$.

Если мы имеем более одной пространственной переменной, например если дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 v - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

нужно решать в некоторой области с начальным условием $v_0(x, y, z) = v(x, y, z, 0)$ и заданными граничными условиями, то найденное описанным выше путем вспомогательное уравнение имеет вид

$$\nabla^2 \bar{v} - \frac{p}{\varkappa}\bar{v} = -\frac{1}{\varkappa} v_0(x, y, z),$$

т. е. остается дифференциальным уравнением в частных производных, но с тремя переменными вместо четырех.

Предположим теперь, что вспомогательное уравнение решено при соответствующих граничных условиях и, следовательно, известна зависимость $\bar{v}$ от p (и пространственных переменных). Тогда требуется по $\bar{v}$ найти v как функцию времени, что и будет служить решением исходной задачи.

Проще всего найти $\bar{v}(p)$ по таблице изображений и подобрать соответствующую функцию*) от t. Таким путем очень просто можно решить целый ряд задач с линейным потоком. Соответствующие примеры приведены в двух следующих параграфах.

Если изображения $\bar{v}$ в таблице нет, то v определяется из $\bar{v}$ при помощи *теоремы обращения преобразования Лапласа*. Согласно этой теореме

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t}\bar{v}(\lambda)\,d\lambda, \tag{3.8}$$

где γ должна быть настолько большой величиной, чтобы все особые точки $\bar{v}(\lambda)$ лежали слева от линии $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$. В соотношении (3.8) мы заменили p на λ для того, чтобы подчеркнуть, что в этом соотношении мы рассматриваем поведение функции $\bar{v}$, считая ее функцией комплексного переменного, тогда как ранее p вообще не должно было быть комплексной величиной.

Соотношение (3.8) будет справедливым только в том случае, если функции $\bar{v}(\lambda)$ или $v(t)$ удовлетворяют определенным условиям; однако здесь нет необходимости рассматривать ни эти условия, ни доказательство самой теоремы, поскольку в ходе изложения были сделаны другие предположения, например, что v имеет изображение, что последовательность операций дифференцирования и интегрирования в соотношении (2.3) предыдущего параграфа можно изменить и т. д. **). Таким образом, с точки зрения чистой математики необходимо проверить, удовлетворяет ли полученное решение дифференциальному уравнению и начальному и граничному условиям данной задачи. Эту проверку

*) Из теоремы IX предыдущего параграфа следует, что найденная таким путем функция является единственной.

**) Доказательство этих положений можно найти в [1, 15].

проще всего выполнить при помощи контурного интеграла (3.8). Метод проверки рассматривается в приложении 1. Все полученные здесь решения можно проверить приведенным там способом.

После нахождения решения в виде контурного интеграла (3.8), его обычно можно привести к вещественному виду одним из двух стандартных методов.

1). Если $\bar{v}(\lambda)$ является однозначной функцией λ с рядом полюсов, лежащих вдоль отрицательной вещественной оси (возможны и другие полюсы), мы замыкаем контур большой окружностью Г с радиусом R, не проходящей ни через один полюс подынтегральной функции (рис. 39).

Во всех рассматриваемых здесь задачах можно показать, что интеграл по большой окружности Г при $R \to \infty$ в пределе равен нулю (дальнейшее изложение этого вопроса дано в приложении 1). Таким образом, согласно теореме Коши, интеграл (3.8) равен в пределе произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно полюсов его подынтегральной функции *). Этот случай обычно встречается в задачах теплопроводности в ограниченных областях.

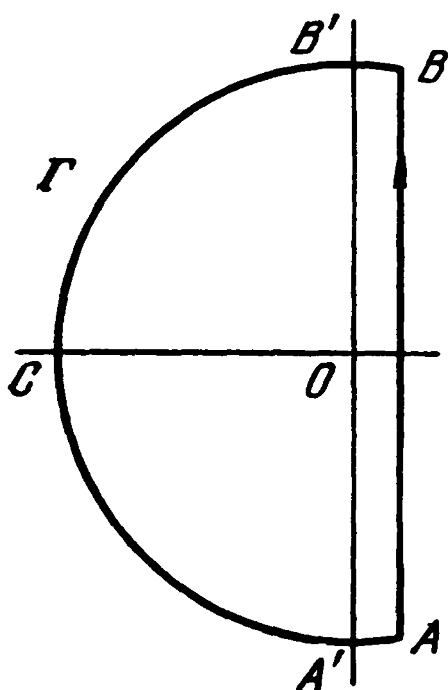


Рис. 39.

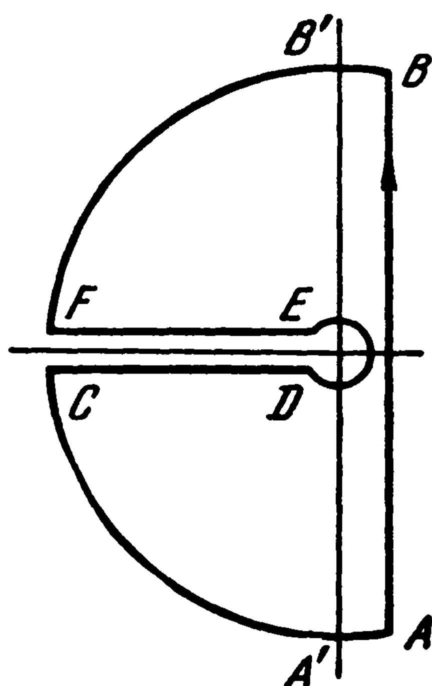


Рис. 40.

2) В задачах теплопроводности для полуограниченных областей $\bar{v}(\lambda)$ обычно имеет точку ветвления при $\lambda = 0$. В таких случаях используется контур, показанный на рис. 40 с «разрезом» вдоль отрицательной вещественной оси, так что $\bar{v}(\lambda)$ является однозначной функцией λ на контуре и внутри него. Можно показать, что в пределе, по мере стремления радиуса большой окружности к бесконечности, интеграл по контуру стремится к нулю, и интеграл (3.8) заменяется двумя несобственными интегралами по отрицательной вещественной полуоси, полученными из интегралов вдоль CD и EF; возможно, что к ним добавляется вклад от интеграла по малой окружности с центром в начале координат, а также вклады от любых полюсов подынтегральной функции.

Если функция $\bar{v}(\lambda)$ не принадлежит ни к одному из указанных выше типов, то для ее рассмотрения должны быть разработаны специальные методы.

§ 4. Полуограниченная область $x > 0$. Решения, получаемые из таблицы изображений

В данном случае вспомогательное уравнение (3.5) предыдущего параграфа имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = -\frac{1}{\varkappa} v_0(x), \qquad x > 0, \tag{4.1}$$

где $v_0(x)$ — начальная температура. Для краткости запишем

$$q^2 = \frac{p}{\varkappa} \tag{4.2}$$

*) В данном случае это дает ряд, который можно получить также при помощи теоремы разложения Хевисайда.

В настоящей главе мы будем рассматривать главным образом задачи, в которых $v_0(x)$ равно нулю; тогда (4.1) будет иметь вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = 0, \qquad x > 0. \tag{4.3}$$

Если $v_0(x)$ постоянно, то легко найти решение (4.1); если $v_0(x)$ — простая функция*) x, то легко получить решение уравнения (4.1) в явном виде; если она является произвольной функцией, то уравнение (4.1) следует решать методом вариации произвольных постоянных или каким-либо иным аналогичным методом; в конце концов получаются результаты, эквивалентные результатам, найденным в гл. II. Однако в настоящее время полагают, что лучше всего искать решения при помощи функций Грина, применению которых посвящена гл. XIV; в ней и будут рассматриваться эти решения.

Во всех случаях при $x \to \infty$ функция v, а значит, и функция $\bar{v}$ должны быть ограничены. Таким образом, из двух решений уравнения (4.1) или (4.3), Be^{+qx} и Ae^{-qx}, следует использовать только второе.

Рассмотрим теперь различные граничные условия при $x = 0$.

I. *Температура поверхности задана. Начальная температура равна нулю.*

Предположим, что задана функция

$$v = \varphi(t), \qquad x = 0, \qquad t > 0,$$

и, следовательно,

$$\bar{v} = \bar{\varphi}(p), \qquad x = 0.$$

Решение уравнения (4.3), конечное при $x \to \infty$ и принимающее при $x = 0$ значение $\bar{v} = \bar{\varphi}(p)$, будет иметь вид

$$\bar{v} = \bar{\varphi}(p)\, e^{-qx}. \tag{4.4}$$

1) Если $\varphi(t) = V_0$, где V_0 — величина постоянная, то $\bar{\varphi} = V_0/p$, и решение (4.4) принимает вид

$$\bar{v} = \frac{V_0}{p}\, e^{-qx}.$$

Из соотношения (8) приложения 5 следует, что

$$v = V_0 \Phi^* \left(\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}} \right). \tag{4.5}$$

2) Если $\varphi(t) = V_0 t^{\frac{1}{2}n}$, где n — любое положительное целое число, то, согласно (2) приложения 5,

$$\bar{\varphi} = \frac{V_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2} n\right)}{p^{1 + \frac{1}{2} n}}.$$

В данном случае, в соответствии с (11) приложения 5, получим

$$v = V_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2} n\right) (4t)^{\frac{1}{2} n}\, \mathrm{i}^n \Phi^* \left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} \right) \tag{4.6}$$

(см. соотношения (5.5), (5.7) и (5.8) гл. II).

---

*) Например, $v_0(x)$ может быть комбинацией многочлена от x, e^{kx} и $\sin lx$, $\cos lx$. (*Прим. ред.*)

3) Если $\varphi(t)$ — произвольная функция, то из (2.10) данной главы и (6) приложения 5 следует, что

$$v = \frac{x}{2\sqrt{\pi\varkappa}} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \tag{4.7}$$

Этот результат был уже получен ранее (см. (5.1) гл. II).

Таким же путем, воспользовавшись (19) приложения 5, можно найти решение для случая температуры поверхности, меняющейся по закону $e^{\lambda t}$ (соотношение (5.9) гл. II). Случай гармонического изменения температуры поверхности рассматривается в § 7 данной главы, а случай периодического изменения температуры поверхности — в § 5 гл. XV.

II. *Граничное условие третьего рода* *).

Пусть начальная температура твердого тела равна нулю, а при $x=0$ оно нагревается вследствие теплообмена со средой, имеющей постоянную температуру V. Тогда граничное условие при $x=0$ запишется в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} = h(v - V), \qquad x=0, \qquad t>0.$$

Граничное условие для вспомогательного уравнения имеет вид

$$\frac{d\bar{v}}{dx} - h\bar{v} = -\frac{hV}{p}, \tag{4.8}$$

а решение уравнения (4.3), удовлетворяющее условию (4.8), записывается следующим образом:

$$\bar{v} = \frac{hVe^{-qx}}{p(q+h)}.$$

Тогда из соотношения (14) приложения 5 следует, что

$$v = V\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - V\exp(hx + h^2\varkappa t)\,\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + h\sqrt{\varkappa t}\right).$$

III. *Контакт с хорошо перемешиваемой жидкостью (или идеальным проводником).*

Соответствующие граничные условия рассмотрены в примере Е § 9 гл. I, однако решение задач подобного типа отнесено к данной главе, поскольку излагаемые здесь методы особенно удобны для этого. Обозначим через c' удельную теплоемкость жидкости, через u — ее температуру, а через M — массу жидкости, соприкасающейся с единицей поверхности $x=0$ твердого тела.

1. Начальная температура твердого тела равна нулю, а начальная температура жидкости постоянна и равна V [16]. *При $t>0$ температура поверхности твердого тела равна температуре жидкости.* В данном случае для $t>0$ граничное условие при $x=0$ имеет вид $u=v$ и

$$Mc'\frac{du}{dt} - K\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad x=0, \qquad t>0. \tag{4.9}$$

Отсюда соответствующее граничное условие для вспомогательного уравнения запишется в виде

$$Mc'p\bar{v} - K\frac{d\bar{v}}{dx} = Mc'V.$$

*) Оно соответствует теплообмену на поверхности по закону Ньютона. (*Прим. ред.*)

Тогда

$$\bar{v} = \frac{Ve^{-qx}}{\varkappa q(q+h')},$$

где

$$h' = \frac{K}{Mc'\varkappa} = \frac{\rho c}{Mc'}. \tag{4.10}$$

Отсюда из выражения (13) приложения 5 получим

$$v = V \exp(h'x + h'^2\varkappa t)\, \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + h'\sqrt{\varkappa t}\right). \tag{4.11}$$

2. Та же задача, но начальная температура жидкости равна нулю и количество тепла, сообщаемое жидкости в единицу времени на единицу массы, равно постоянной величине Q/M. В данном случае граничные условия при $x=0$ имеют вид $u=v$ и

$$Mc'\frac{du}{dt} - K\frac{\partial v}{\partial x} = Q, \qquad x=0, \qquad t>0.$$

Отсюда получаем

$$Mc'p\bar{v} - K\frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{Q}{p}, \qquad x=0.$$

Следовательно,

$$\bar{v} = \frac{Qe^{-qx}}{Mc'\varkappa pq(q+h')},$$

где h' определяется равенством (4.10). Из выражения (15) приложения 5 следует, что

$$v = \frac{2Q}{K}\left(\frac{\varkappa t}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa t}\right] - \frac{Q(1+h'x)}{Kh'}\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + \\ + \frac{Q}{Kh'}\exp(h'x + h'^2\varkappa t)\,\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + h'\sqrt{\varkappa t}\right]. \tag{4.12}$$

3. Та же задача, но между жидкостью и поверхностью твердого тела происходит теплообмен, причем в единицу времени жидкость отдает твердому телу количество тепла, равное произведению H на разность температур между ними. Обозначая температуру жидкости через u, получим граничные условия при $x=0$ в виде

$$Mc'\frac{du}{dt} + H(u-v) = 0, \qquad x=0, \qquad t>0, \tag{4.13}$$

$$-K\frac{\partial v}{\partial x} = H(u-v), \qquad x=0, \qquad t>0. \tag{4.14}$$

Дифференциальное уравнение для v надо решить при этих граничных условиях, причем начальная температура u равна V, а начальное значение v равно нулю. Для вспомогательного уравнения граничные условия, полученные из (4.13) и (4.14), имеют вид

$$(Mc'p + H)\bar{u} - H\bar{v} = Mc'V,$$

$$-K\frac{d\bar{v}}{dx} + H\bar{v} - H\bar{u} = 0.$$

Отсюда обычным путем находим

$$\bar{u} = \frac{V(q+h)}{\varkappa q(q^2 + hq + hh')}, \tag{4.15}$$

$$\bar{v} = \frac{hVe^{-qx}}{\varkappa q(q^2+hq+hh')}, \tag{4.16}$$

где h' определяется (4.10), а $h = H/K$. Если написать

$$q^2 + hq + hh' = (q-\alpha)(q+\beta), \tag{4.17}$$

то соотношение (4.16) принимает вид

$$\bar{v} = \frac{hVe^{-qx}}{\varkappa(\beta-\alpha)q}\left\{\frac{1}{q+\alpha} - \frac{1}{q+\beta}\right\},$$

и, согласно (13) приложения 5,

$$v = \frac{hV}{\beta-\alpha}\left[\exp(\alpha x + \varkappa t\alpha^2)\,\Phi^*\left\{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha\sqrt{\varkappa t}\right\} - \right.$$
$$\left. - \exp(\beta x + \varkappa t^2\beta^2)\,\Phi^*\left\{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + \beta\sqrt{\varkappa t}\right\}\right]. \quad (4.18)$$

IV. *Полуограниченное твердое тело, внутри которого выделяется тепло.* Для таких задач и, в частности, для весьма сложных случаев излагаемый метод особенно удобен. Этим путем можно получить все результаты, приведенные в § 11 гл. II. Для пояснения описанного метода мы приведем здесь несколько дополнительных результатов.

1. Область $x > 0$ имеет нулевую начальную температуру. При $x = 0$ происходит теплообмен со средой нулевой температуры. При $t > 0$ в твердом теле в единицу времени на единицу объема выделяется количество тепла, равное $kt^{\frac{1}{2}n}$, где n может равняться -1, 0, или любому положительному целому числу. В данном случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{k}{K}t^{\frac{1}{2}n}, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (4.19)$$

при граничном условии

$$\frac{\partial v}{\partial x} - hv = 0, \quad x = 0, \quad t > 0. \quad (4.20)$$

Используя изображение (2) приложения 5, получим соответствующее вспомогательное уравнение

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = -\frac{k\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}{Kp^{1+\frac{1}{2}n}}, \quad x > 0, \quad (4.21)$$

при граничном условии

$$\frac{d\bar{v}}{dx} - h\bar{v} = 0, \quad x = 0; \quad (4.22)$$

как всегда, при $x \to \infty$ $\bar{v}$ имеет конечное значение. Решение уравнения (4.21) при условии (4.22) имеет вид

$$\bar{v} = \frac{\varkappa k\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}{Kp^{2+\frac{1}{2}n}}\left\{1 - \frac{he^{-qx}}{q+n}\right\}.$$

Таким образом, используя (16) приложения 5, получим

$$v = \frac{k\varkappa t^{1+\frac{1}{2}n}}{K\left(1+\frac{1}{2}n\right)} + \frac{k\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}{K\varkappa^{\frac{1}{2}n}(-h)^{n+2}}\left[\exp(hx + h^2\varkappa t)\,\Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + h\sqrt{\varkappa t}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{r=0}^{n+2}\{-2h\sqrt{\varkappa t}\}^r\, i^r\Phi^*\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right]. \quad (4.23)$$

Частный случай $n = -1$, соответствующий выделению в единицу времени количества тепла, пропорционального $t^{-1/2}$, дает грубое приближение, полезное в задачах, в которых велико выделение тепла в начальный момент (например, при гидратации цемента).

2. *Область $x > 0$. При $t > 0$ поверхность $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре. В области $a < x < b$ при $t > 0$ в единицу времени выделяется постоянное количество тепла, равное k* [17]. В данном случае вспомогательные уравнения имеют вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = 0 \quad \text{в области} \quad 0 < x < a \quad \text{и} \quad x > b \tag{4.24}$$

и

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = -\frac{k}{Kp} \quad \text{в области} \quad a < x < b. \tag{4.25}$$

Они должны быть решены при следующих условиях:

$$\bar{v} = 0, \qquad x = 0 \tag{4.26}$$

и

$$\bar{v} \text{ и } \frac{d\bar{v}}{dx} \quad \text{непрерывны при} \quad x = a \quad \text{и} \quad x = b. \tag{4.27}$$

Решения уравнений (4.24), (4.25) и (4.26) имеют вид

$$\bar{v} = Be^{qx} - Be^{-qx}, \qquad 0 < x < a,$$

$$\bar{v} = \frac{\varkappa k}{Kp^2} + Ce^{qx} + De^{-qx}, \qquad a < x < b,$$

$$\bar{v} = Ee^{-qx}, \qquad x > b.$$

Здесь четыре постоянные B, C, D и E находят из четырех условий непрерывности (4.27). После вычисления этих постоянных можно записать решение. Например, градиент температуры на поверхности $[\partial v/\partial x]_{x=0}$ имеет изображение

$$2Bq = \frac{k}{Kpq}\left(e^{-qa} - e^{-qb}\right),$$

и, следовательно, используя (11) приложения 5, получим

$$\frac{2k(\varkappa t)^{1/2}}{K}\left\{ \mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{a}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - \mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{b}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\}. \tag{4.28}$$

§ 5. Ограниченная область $0 < x < l$. Решения, получаемые из таблицы изображений. Решения для небольших значений времени

I. Рассмотрим сначала *область $0 < x < l$ с нулевой начальной температурой при отсутствии потока тепла через поверхность $x = 0$. При $t > 0$ поверхность $x = l$ поддерживается при постоянной температуре V.*

В этом случае вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = 0, \qquad 0 < x < l,$$

при граничных условиях

$$\frac{d\bar{v}}{dx} = 0, \qquad x = 0,$$

и

$$\bar{v} = V/p, \qquad x = l.$$

Его решение имеет вид

$$\bar{v} = \frac{V \operatorname{ch} qx}{p \operatorname{ch} ql}. \tag{5.1}$$

Так как в таблице изображений величина $\bar{v}$, определяемая (5.1), отсутствует, мы получим решение v, воспользовавшись теоремой обращения (см.

(3.8) данной главы) *). Это будет сделано в следующем параграфе и приведет к обычному результату (4.2) гл. III. В данном параграфе используется метод, позволяющий при помощи таблицы изображений получить решение в другой форме. Эта форма часто оказывается удобнее приведенной ранее, особенно для небольших значений времени.

Выразим гиперболические функции в решении (5.1) через показательные функции и разложим их в ряд по степеням e^{-2qnl}. Тогда вместо (5.1) мы получим

$$\bar{v} = \frac{V(e^{qx}+e^{-qx})}{pe^{ql}(1+e^{-2ql})} = \frac{V}{p}\left(e^{-q(l-x)}+e^{-q(l+x)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2nql} =$$

$$= \frac{V}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-q[(2n+1)l-x]} + \frac{V}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-[(2n+1)l+x]}. \tag{5.2}$$

Таким образом, воспользовавшись (8) приложения 5, получаем результат, совпадающий с (3.9) гл. III,

$$v = V\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \Phi^*\left[\frac{(2n+1)l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right] + V\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \Phi^*\left[\frac{(2n+1)l+x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right]. \tag{5.3}$$

Этот ряд **) всегда сходится довольно быстро, за исключением случая больших значений $\varkappa t/l^2$. Таким образом, он является дополнением к решению (4.2) гл. III, которое лучше всего сходится при больших значениях времени. В диапазоне средних значений $\varkappa t/l^2$, при которых пригодными оказываются как (5.3), так и (4.2) гл. III, первым, вероятно, несколько удобнее пользоваться. Например, если $\varkappa t/l^2 = 1$, то из (5.3) получим для $x = 0$

$$\frac{v}{2V} = \Phi^*\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi^*\left(\frac{3}{2}\right) + \Phi^*\left(\frac{5}{2}\right) - \dots$$

$$\dots = 0{,}4795 - 0{,}0339 + 0{,}0004 - \dots = 0{,}4460.$$

Если средняя температура пластины равна u, то, используя (11) приложения 5, получим

$$\bar{u} = \frac{1}{l}\int_0^l \bar{v}\,dx = \frac{V\,\mathrm{sh}\,ql}{lpq\,\mathrm{ch}\,ql} = \frac{V}{lpq}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-2nql}\right\}.$$

$$u = 2V\left(\frac{\varkappa t}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\pi^{-\frac{1}{2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \,\mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{nl}{\sqrt{\varkappa t}}\right)\right\}. \tag{5.4}$$

II. *Область* $0 < x < l$ *с нулевой начальной температурой. Плоскость* $x = 0$ *поддерживается при нулевой температуре, а плоскость* $x = l$ *(при* $t > 0$*) — при постоянной температуре* V.

---

*) Выражение (5.1) есть изображение функции, которую можно выразить через тета-функции. Некоторые примеры можно найти в работе [9].

**) Последовательные члены данного ряда указывают температуры на глубинах $l-x$, $l+x$, $3l-x$, $3l+x, \dots$ в полуограниченном теле. Таким образом, этот результат аналогичен решениям задач о колебании струн, стержней и линий передач, выраженным в терминах многократно отраженных волн.

Следует отметить, что эти решения для малых значений времени можно также считать решениями для случаев небольших изменений средней температуры (см., например, [18]).

В данном случае

$$\bar{v} = \frac{V \operatorname{sh} qx}{p \operatorname{sh} ql}. \tag{5.5}$$

$$v = V \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Phi^* \left[\frac{(2n+1)l - x}{2\sqrt{\varkappa t}} \right] - \Phi^* \left[\frac{(2n+1)l + x}{2\sqrt{\varkappa t}} \right] \right\}. \tag{5.6}$$

Общее количество тепла, проходящее через плоскость $x = 0$ за промежуток времени от $t = 0$ до $t = t$, равно

$$\frac{4KVt^{1/2}}{\varkappa^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{\varkappa t}} \right]. \tag{5.7}$$

III. *Область* $0 < x < l$ *с нулевой начальной температурой. При* $x = 0$ *тепловой поток отсутствует. При* $x = l$ *поток тепла* Q *в твердое тело* [19] *постоянен.*

В данном случае

$$\bar{v} = \frac{Q \operatorname{ch} qx}{Kpq \operatorname{sh} ql},$$

$$v = \frac{2Q\sqrt{\varkappa t}}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{(2n+1)l - x}{2\sqrt{\varkappa t}} \right] + \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{(2n+1)l + x}{2\sqrt{\varkappa t}} \right] \right\}. \tag{5.8}$$

IV. *Область* $0 < x < l$ *с постоянной начальной температурой* V_0. *На поверхности* $x = 0$ *тепловой поток отсутствует. На поверхности* $x = l$ *происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

В данном случае вспомогательное уравнение (3.5) данной главы имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = -\frac{V_0}{\varkappa}, \qquad 0 < x < l,$$

при граничных условиях

$$\frac{d\bar{v}}{dx} = 0, \qquad x = 0,$$

$$\frac{d\bar{v}}{dx} + h\bar{v} = 0, \qquad x = l.$$

Его решение записывается в виде

$$\bar{v} = \frac{V_0}{p} - \frac{hV_0 \operatorname{ch} qx}{p(q \operatorname{sh} ql + h \operatorname{ch} ql)}, \tag{5.9}$$

или

$$\bar{v} = \frac{V_0}{p} - \frac{hV_0 e^{-ql}(e^{qx} + e^{-qx})}{p\{(h+q) + (h-q)e^{-2ql}\}} =$$

$$= \frac{V_0}{p} - \frac{hV_0}{p(q+h)}[e^{-q(l-x)} + e^{-q(l+x)}] +$$

$$+ \frac{hV_0(h-q)}{p(h+q)^2}[e^{-q(3l-x)} + e^{-q(3l+x)}] + \ldots \tag{5.10}$$

Последовательные экспоненциальные члены ряда (5.10) имеют коэффициенты, являющиеся сложными функциями q, и поэтому для v простой ряд написать нельзя. Однако для этого ряда можно сразу же записать несколько первых членов и, таким образом, получить решение [20], пригодное для малых значений времени. Итак, воспользовавшись (14) приложения 5, получим

$$v = V_0 - V_0 \left[\Phi^*\left(\frac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + \Phi^*\left(\frac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) \right] + V_0 \exp[h(l-x) + h^2\varkappa t]\, \Phi^*\left(h\sqrt{\varkappa t} + \frac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) +$$

$$+ V_0 \exp[h(l+x) + h^2\varkappa t]\, \Phi^*\left(h\sqrt{\varkappa t} + \frac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + \ldots \tag{5.11}$$

Аналогичным методом можно воспользоваться при решении задач, приведенных в §§ 11 и 13 гл. III.

V. *Область $0 < x < l$ с нулевой начальной температурой. При $t > 0$ плоскости $x = 0$ и $x = l$ поддерживаются при температуре, равной нулю. При $t > 0$ в твердом теле в единицу времени на единицу объема выделяется количество тепла* [21], *равное $at^{\frac{1}{2}n}$, где $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$*

В данном случае дифференциальное уравнение (14.1) гл. III записывается в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{a}{K} t^{\frac{1}{2}n}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = -\frac{a\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}{Kp^{1+\frac{1}{2}n}}.$$

Это последнее должно быть решено при условии, что при $x = 0$ и $x = l$ $\bar{v} = 0$. Искомое решение записывается в виде

$$\bar{v} = \frac{a\varkappa\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}{Kp^{2+\frac{1}{2}n}}\left\{1 - \frac{\operatorname{ch} q\left(\frac{1}{2}l - x\right)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}ql}\right\} =$$

$$= \frac{a\varkappa\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}{Kp^{2+\frac{1}{2}n}}\left\{1 - \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[e^{-q(x+ml)} + e^{-q[(m+1)l-x]}\right]\right\}.$$

$$v = \frac{a\varkappa t^{1+\frac{1}{2}n}}{K\left(1+\frac{1}{2}n\right)}\left\{1 - \Gamma\left(2+\frac{1}{2}n\right)2^{n+2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[\mathrm{i}^{n+2}\Phi^*\left(\frac{ml+x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathrm{i}^{n+2}\Phi^*\left(\frac{(m+1)l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right]\right\}. \quad (5.12)$$

§ 6. Ограниченная область $0 < x < l$. Применение теоремы обращения

I. Рассматривая снова задачу I предыдущего параграфа, перейдем теперь к определению функции v по ее изображению (5.1), т. е. по

$$\bar{v} = \frac{V \operatorname{ch} qx}{p \operatorname{ch} ql}. \quad (6.1)$$

Согласно теореме обращения (см. (3.8) данной главы)

$$v = \frac{V}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\frac{e^{\lambda t}\operatorname{ch}\mu x\, d\lambda}{\lambda \operatorname{ch}\mu l}, \quad (6.2)$$

где величина γ должна быть настолько большой, чтобы все особые точки $\bar{v}(\lambda)$ лежали слева от линии $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$. Здесь и везде далее будем полагать

$$\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}, \quad (6.3)$$

где берется главное *) значение квадратного корня.

---

*) Известно, что $W^n = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, причем $k = 0, 1, \ldots, n-1$; при $k = 0$ значение корня считается главным. (*Прим. ред.*)

Функция $\bar{v}(\lambda)$ имеет простые полюсы при $\lambda=0$ и при тех значениях λ, при которых $\operatorname{ch}\mu l$ обращается в нуль. Эти значения λ определяются соотношениями

$$\mu=\frac{(2n+1)i\pi}{2l}, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.4}$$

Иными словами,

$$\lambda=-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6.5}$$

Напомним, что

$$\operatorname{ch}\mu x=1+\frac{\lambda x^2}{2\varkappa}+\frac{\lambda^2x^4}{(4!)\varkappa^2}+\ldots$$

является однозначной функцией λ; отсюда следует, что $\bar{v}(\lambda)$ тоже является однозначной функцией*) λ, и мы можем использовать контур, показанный на рис. 39, большая окружность которого не должна проходить ни через один из полюсов (6.5) подынтегральной функции. Например, можно взять радиус этой окружности равным $\varkappa m^2\pi^2/l^2$, где m — любое большое целое число.

Из теоремы Коши следует, что интеграл по замкнутому контуру равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно полюсов подынтегральной функции внутри контура.

Легко показать (см. приложение 1), что по мере стремления радиуса большой окружности к бесконечности интеграл по дуге ACB этой окружности стремится к нулю. Таким образом, в пределе интеграл (6.2) равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов его подынтегральной функции относительно полюсов $\lambda=0$ и функции (6.5). Вычет относительно $\lambda=0$ равен единице. Вычет относительно полюса $\lambda=-\varkappa(2n+1)^2\pi^2/4l^2$ равен следующей величине:

$$\frac{\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{4l^2}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{i(2n+1)\pi x}{2l}\right]}{\left[\lambda\frac{d}{d\lambda}\left\{\operatorname{ch}l\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}\right\}\right]_{\lambda=-\varkappa(2n+1)^2\pi^2/4l^2}}=$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)\pi^2t}{4l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Подставляя эти выражения в (6.2), мы, наконец, получаем

$$v=V-\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{4l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \tag{6.6}$$

Если при $x=l$ температура является функцией времени $\varphi(t)$, то вместо (6.1) получим

$$\bar{v}=\bar{\varphi}\frac{\operatorname{ch}qx}{\operatorname{ch}ql}.$$

В данном случае мы находим функцию $f(t)$, изображение которой имеет вид

$$\frac{\operatorname{ch}qx}{\operatorname{ch}ql},$$

*) Представляя таким способом гиперболические функции в виде рядов, можно показать, что все изображения, встречающиеся в данном параграфе, являются однозначными функциями λ.

и используем равенство (2.10) данной главы. Применив, как и выше, контур, показанный на рис. 39, получим

$$f(t)=\frac{\varkappa\pi}{l^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{l^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Таким образом, как и в (5.3) гл. III, получим из (2.10) данной главы соотношение

$$v=\frac{\varkappa\pi}{l^2}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{l^2}\right](-1)^n(2n+1)\times$$
$$\times\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\int_0^t\exp\left[\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t'}{4l^2}\right]\varphi(t')\,dt'. \qquad (6.7)$$

При линейном увеличении температуры поверхности или ее гармоническом изменении v лучше всего находить непосредственно по $\bar{v}$.

II. Задача, совпадающая с задачей II предыдущего параграфа, а именно: *область* $0<x<l$ *имеет нулевую начальную температуру. При* $t>0$ *плоскость* $x=0$ *поддерживается при нулевой температуре, а плоскость* $x=l$ — *при температуре* V. Здесь $\bar{v}$ определяется выражением (5.5) данной главы; воспользовавшись теоремой обращения, получаем

$$v=\frac{V}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}\operatorname{sh}\mu x\,d\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\mu l}. \qquad (6.8)$$

Полюсы подынтегральной функции (6.8) находятся при $\lambda=0$ с вычетом x/l, а также при

$$\mu=n\pi i/l, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е.

$$\lambda=-\varkappa n^2\pi^2/l^2, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots, \qquad (6.9)$$

с вычетом

$$\frac{2(-1)^n\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2t}{l^2}\right]\sin(n\pi x/l)}{n\pi}.$$

Таким образом, используя, как и раньше, рис. 39, находим

$$v=\frac{Vx}{l}+\frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2t}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (6.10)$$

Пусть Q — общее количество тепла на единицу поверхности, проходящее через плоскость $x=0$ за промежуток времени от $t=0$ до $t=t$, равное

$$Q=K\int_0^t\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0}dt.$$

Тогда из соотношений (5.5) и (2.4) данной главы получим

$$\bar{Q}=\frac{KVq}{p^2\operatorname{sh}ql}. \qquad (6.11)$$

Отсюда

$$Q = \frac{KV}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{\lambda t} \mu \, d\lambda}{\lambda^2 \operatorname{sh} \mu l}. \tag{6.12}$$

В последнем соотношении подынтегральная функция имеет полюс второго порядка при $\lambda = 0$ с вычетом

$$\frac{1}{l}\left[t - \frac{l^2}{6\varkappa}\right]. \tag{6.13}$$

Другие полюсы определяются выражением (6.9), и, действуя, как и прежде, мы найдем

$$Q = \frac{KV}{l}\left\{t - \frac{l^2}{6\varkappa} - \frac{2l^2}{\varkappa\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\right. . \tag{6.14}$$

При больших значениях времени члены в этом выражении, содержащие показательные функции, пренебрежимо малы и Q имеет значение, соответствующее стационарному потоку для времени $[t - (l^2/6\varkappa)]$. Путем измерения $l^2/6\varkappa$, т. е. запаздывания наступления стационарного состояния, можно экспериментально определить величину $\varkappa$ [22, 23]. Если мы хотим найти только эту величину, нужно знать лишь вычет (6.13) относительно полюса $\lambda = 0$. Дальнейшее обсуждение этого метода изложено в § 6 гл. XV.

III. *Область $0 < x < l$ с нулевой начальной температурой. При $t > 0$ плоскости $x = 0$ и $x = l$ поддерживаются при нулевой температуре. При $t > 0$ в единице объема за единицу времени выделяется количество тепла, равное $ae^{-\alpha t}$.*

В данном случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{a}{K}e^{-\alpha t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \tag{6.15}$$

Поэтому вспомогательное уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = -\frac{a}{K(p+\alpha)}. \tag{6.16}$$

Его следует решать при условии, что $\bar{v} = 0$, когда $x = 0$ и $x = l$. Решение имеет вид

$$\bar{v} = \frac{a\varkappa}{Kp(p+\alpha)}\left\{1 - \frac{\operatorname{ch} q\left(\frac{1}{2}l - x\right)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}ql}\right\}. \tag{6.17}$$

Таким образом,

$$v = \frac{a\varkappa}{K\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) - \frac{a\varkappa}{2\pi i K}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\frac{e^{\lambda t}\operatorname{ch}\mu\left(\frac{1}{2}l - x\right)d\lambda}{\lambda(\lambda+\alpha)\operatorname{ch}\frac{1}{2}\mu l}. \tag{6.18}$$

Полюсы подынтегральной функции находятся в следующих точках:

$\lambda = 0$, вычет равен $1/\alpha$,

$\lambda = -\alpha$, вычет равен $-\dfrac{e^{-\alpha t}\cos\left(\frac{1}{2}l - x\right)(\alpha/\varkappa)^{1/2}}{\alpha\cos\frac{1}{2}l(\alpha/\varkappa)^{1/2}}$,

$\lambda = -[\varkappa(2n+1)^2\pi^2/l^2]$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots,$ вычет равен

$$\frac{4l^2 \sin[(2n+1)\pi x/l] \exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{l^2}\right]}{\pi(2n+1)[\varkappa(2n+1)^2\pi^2 - \alpha l^2]}. \tag{6.19}$$

Если окажется, что α имеет нулевое значение или одно из значений $\varkappa(2n+1)^2\pi^2/l^2$, то при $\lambda = -\alpha$ имеется полюс второго порядка и необходимо произвести отдельный расчет. Если это не имеет места, то мы окончательно получим

$$v = \frac{a\varkappa}{K\alpha}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}l - x\right)(\alpha/\varkappa)^{1/2}}{\cos\frac{1}{2}l(\alpha/\varkappa)^{1/2}} - 1\right)e^{-\alpha t} - \\ - \frac{4a\varkappa l^2}{\pi K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2 t}{l^2}\right]}{[2n+1][\varkappa(2n+1)^2\pi^2 - \alpha l^2]}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}. \tag{6.20}$$

Подобным же образом можно рассмотреть случай с выделением постоянного количества тепла в единицу времени. Решение для случая выделения в единицу времени количества тепла, являющегося какой-либо произвольной функцией времени, получается так же, как и (6.7) из соотношения (2.10) данной главы.

IV. *Граничное условие третьего рода.*

В качестве примера рассмотрим задачу IV предыдущего параграфа. По значению $\bar{v}$ из (5.9) данной главы находим при помощи теоремы обращения решение в виде

$$v = V_0 - \frac{hV_0}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\frac{e^{\lambda t}\operatorname{ch}\mu x\, d\lambda}{\lambda(\mu \operatorname{sh}\mu l + h\operatorname{ch}\mu l)}. \tag{6.21}$$

Здесь полюсы подынтегральной функции находятся при $\lambda = 0$ с вычетом $(1/h)$, и при

$$\lambda = -\varkappa\alpha_n^2 \qquad \mu = i\alpha_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6.22}$$

где $\pm\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — корни (все простые и вещественные, см. § 10 гл. III) уравнения

$$\alpha \sin\alpha l = h\cos\alpha l$$

или

$$\alpha \operatorname{tg}\alpha l = h. \tag{6.23}$$

Чтобы найти вычеты относительно этих полюсов, необходимо выполнить следующие вычисления:

$$\left[\lambda\frac{d}{d\lambda}(\mu\operatorname{sh}\mu l + h\operatorname{ch}\mu l)\right]_{\lambda = -\varkappa\alpha_n^2} = \left[\frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\mu}(\mu\operatorname{sh}\mu l + h\operatorname{ch}\mu l)\right]_{\mu = i\alpha_n} = \\ = -\frac{1}{2}\alpha_n\{(1+lh)\sin l\alpha_n + l\alpha_n\cos l\alpha_n\} = -\frac{1}{2}\left\{l\left(h^2+\alpha_n^2\right)+h\right\}\cos l\alpha_n.$$

Воспользовавшись этим результатом в (6.21), окончательно получим

$$v = 2hV_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\cos\alpha_n x}{\left[l\left(h^2+\alpha_n^2\right)+h\right]\cos\alpha_n l}. \tag{6.24}$$

Это решение было уже найдено в § 11 (см. соотношение (11.12) гл. III). Подобным же образом можно получить все результаты §§ 11—13 гл. III.

V. *Другие граничные условия. Контакт с хорошо перемешиваемой жидкостью.*

В примере Е § 9 гл. I было отмечено, что задачи, в которых поверхность твердого тела соприкасается с хорошо перемешиваемой жидкостью, имеют определенное практическое значение. Задачи этого типа для пластины проще всего решать обычным методом с использованием преобразования Лапласа. Классические методы не всегда можно использовать в неизменной форме. В § 13 гл. III уже было дано несколько решений без доказательства.

В качестве примера, поясняющего новые особенности таких задач, рассмотрим следующую задачу:

Область $0 < x < l$; *тепловой поток на плоскости* $x = l$ *отсутствует. Плоскость* $x = 0$ *соприкасается с хорошо перемешиваемой жидкостью с удельной теплоемкостью* c', *причем на единицу поверхности этой плоскости приходится масса жидкости, равная* M'. *Между жидкостью и поверхностью твердого тела происходит теплообмен, и количество тепла, которое отдает жидкость твердому телу в единицу времени, равно произведению* H *на разность температур между ними. Начальная температура жидкости равна* V_0, *а твердого тела — нулю.*

Обозначим температуру жидкости через u, а температуру твердого тела через v; тогда граничные условия (9.14) и (9.16) гл. I при $x = 0$ запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} M'c'\frac{du}{dt} - K\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \quad x = 0, \quad t > 0 \\ K\frac{\partial v}{\partial x} + H(u - v) &= 0, \quad x = 0, \quad t > 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6.25}$$

Функция v удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

и граничное условие при $x = l$ имеет вид $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad x = l, \quad t > 0.$

Начальные условия записываются в виде

$$u = V_0, \quad t = 0$$

и

$$v = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Составляя обычным путем вспомогательные уравнения, соответствующие дифференциальному уравнению и начальным и граничным условиям, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = 0, && 0 < x < l, \\ &\frac{d\bar{v}}{dx} = 0, && x = l, \\ &M'c'p\bar{u} - K\frac{d\bar{v}}{dx} = M'c'V_0, && x = 0, \\ &K\frac{d\bar{v}}{dx} + H(\bar{u} - \bar{v}) = 0, && x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

Поскольку в граничное условие (6.25) входит член с du/dt, в правой части (6.26) появляется член $M'c'V_0$, содержащий начальное значение u.

Решая приведенные выше уравнения обычным путем, получим

$$\bar{v} = \frac{h V_0 \operatorname{ch} q (l - x)}{hp \operatorname{ch} ql + [p + (hK/M'c')] q \operatorname{sh} ql}, \tag{6.27}$$

$$\bar{u} = \frac{V_0 (h \operatorname{ch} ql + q \operatorname{sh} ql)}{hp \operatorname{ch} ql + [p + (hK/M'c')] q \operatorname{sh} ql}, \tag{6.28}$$

где $h = H/K$. v и u находят теперь обычным путем при помощи теоремы обращения. Так

$$v = \frac{V_0}{1+k} - 2LV_0 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_s^2 - kL}{P_s \cos \alpha_s} e^{-\alpha_s^2 T} \cos \alpha_s (1 - x/l), \tag{6.29}$$

$$u = \frac{V_0}{1+k} + 2kL^2 V_0 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{P_s} e^{-\alpha_s^2 T}, \tag{6.30}$$

где $L = lh$, $k = l\rho c/M'c'$, $T = \varkappa t/l^2$, α_s — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L\alpha}{\alpha^2 - kL},$$

$$P_s = \alpha_s^4 + (L^2 + L - 2kL) \alpha_s^2 + kL^2 (1 + k).$$

§ 7. Полуограниченная область $x > 0$. Применение теоремы обращения

В качестве примера задачи, в которой, пользуясь таблицей изображений, нельзя получить непосредственно ответа, рассмотрим случай *полуограниченного твердого тела $x > 0$ с нулевой начальной температурой. При $t > 0$ температура поверхности $x = 0$ этого тела меняется по закону $V_0 \sin(\omega t + \varepsilon)$.*

В данном случае вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} - q^2 \bar{v} = 0, \qquad x > 0. \tag{7.1}$$

При $x = 0$ мы должны иметь

$$v = V_0 (\sin \omega t \cos \varepsilon + \cos \omega t \sin \varepsilon),$$

и, следовательно,

$$\bar{v} = \frac{V_0 (\omega \cos \varepsilon + p \sin \varepsilon)}{p^2 + \omega^2}. \tag{7.2}$$

Решение уравнения (7.1) при условии (7.2), имеющее конечное значение при $x \to \infty$, записывается в виде

$$\bar{v} = \frac{V_0 (\omega \cos \varepsilon + p \sin \varepsilon) e^{-qx}}{p^2 + \omega^2}. \tag{7.3}$$

Так как в таблице изображений такого выражения нет, применим теорему обращения и получим

$$v = \frac{V_0}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{(\omega \cos \varepsilon + \lambda \sin \varepsilon)}{\lambda^2 + \omega^2} e^{\lambda t - \mu x} \, d\lambda. \tag{7.4}$$

Подынтегральная функция (7.4) имеет при $\lambda = 0$ точку ветвления и обладает простыми полюсами при $\lambda = \pm i\omega$. Рассмотрим интеграл по контуру,

показанному на рис. 40, т. е. интеграл

$$\int \frac{(\omega\cos\varepsilon+\lambda\sin\varepsilon)}{\lambda^2+\omega^2}\,e^{\lambda t-\mu x}\,d\lambda. \qquad (7.5)$$

На этом контуре и внутри него подынтегральная функция является однозначной функцией λ. Аргументом λ на EF служит π, а на CD этим аргументом служит $-\pi$.

По теореме Коши интеграл по такому замкнутому контуру равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно полюсов внутри контура. Эти полюсы находятся в точках $\lambda=\pm i\omega$. Вычет относительно полюса $\lambda=i\omega$ равен

$$\frac{1}{2i}\exp\left(i\omega t+i\varepsilon-x\sqrt{i\omega/\varkappa}\right).$$

Отсюда сумма вычетов относительно полюсов $\lambda=i\omega$ и $\lambda=-i\omega$ равна

$$e^{-x\sqrt{\omega/2\varkappa}}\sin\left\{\omega t+\varepsilon-x(\omega/2\varkappa)^{1/2}\right\}. \qquad (7.6)$$

Рассмотрим теперь интеграл по контуру $ABFEDCA$ при переходе к пределу, когда радиус большой окружности R стремится к бесконечности, а радиус малой окружности — к нулю. При $R\to\infty$ интеграл по дугам BF и CD стремится к нулю *). По мере того как радиус малой окружности с центром в начале координат приближается к нулю, интеграл по этой окружности также стремится к нулю. При $R\to\infty$ интеграл по AB становится равным интегралу в соотношении (7.4). В интегралах по EF и CD мы полагаем $\lambda=\rho e^{i\pi}$ и $\lambda=\rho e^{-i\pi}$ соответственно и получаем

$$\int\limits_0^\infty \frac{\omega\cos\varepsilon-\rho\sin\varepsilon}{\rho^2+\omega^2}\,e^{-\rho t}\left\{e^{-ix\sqrt{\rho/\varkappa}}-e^{ix\sqrt{\rho/\varkappa}}\right\}d\rho=$$
$$=-4i\varkappa\int\limits_0^\infty \frac{\omega\cos\varepsilon-\varkappa u^2\sin\varepsilon}{\omega^2+\varkappa^2u^4}\,e^{-\varkappa u^2 t}\sin(ux)\,u\,du, \qquad (7.7)$$

где $\rho=\varkappa u^2$.

Итак, используя (7.4), (7.6) и (7.7), окончательно получим

$$v=V_0e^{-x\sqrt{\omega/2\varkappa}}\sin\left\{\omega t+\varepsilon-x(\omega/2\varkappa)^{1/2}\right\}+$$
$$+\frac{2\varkappa V_0}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\omega\cos\varepsilon-\varkappa u^2\sin\varepsilon}{\omega^2+\varkappa^2u^4}\,e^{-\varkappa u^2 t}\sin(ux)\,u\,du. \qquad (7.8)$$

Первый член соотношения (7.8), полученный из вычетов (7.6) относительно полюсов $\pm i\omega$, представляет собой часть решения, соответствующую стационарному состоянию, и, если необходима только она, рассматривать интеграл (7.7) нет необходимости (ср. § 5 гл. XV). Результаты (8.4) и (9.13) гл. II можно получить таким же путем.

Все решения, приведенные в § 4 данной главы, которые были получены при помощи таблицы изображений, можно, конечно, найти, как и в настоящем параграфе, воспользовавшись теоремой обращения.

---

*) Дальнейшее рассмотрение этого вопроса см. в приложении 1. Во всех случаях, когда используется теорема обращения, справедлив тот же результат и применимо аналогичное доказательство.

§ 8. Составные твердые тела

Задачи теплопроводности в составных твердых телах *) обычно лучше всего решаются методом преобразования Лапласа. Как изображения, так и решения могут оказаться достаточно сложными, однако при этом не появляется никаких новых правил. В § 15 гл. II изучалось несколько задач, в которых рассматривается составное твердое тело. Их можно также решать данным методом. Здесь будут рассмотрены полуограниченные и конечные составные области.

Рассмотрим сначала полуограниченную область $-l < x < \infty$, в которой при $-l < x < 0$ находится одно вещество, а при $x > 0$ — другое. Обозначим теплопроводность, плотность, удельную теплоемкость, коэффициент температуропроводности и температуру в области $-l < x < 0$ через K_1, ρ_1, c_1, $\varkappa_1$ и v_1, а соответствующие величины в области $x > 0$ — через K_2, ρ_2, c_2, $\varkappa_2$ и v_2.

Требуется найти решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial v_1}{\partial t} = 0, \quad -l < x < 0, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa_2}\frac{\partial v_2}{\partial t} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0.$$

Если допустить, что на поверхности раздела $x = 0$ контактное тепловое сопротивление отсутствует (ср. пример Ж § 9 гл. I), то граничные условия запишутся в виде

$$K_1\frac{\partial v_1}{\partial x} = K_2\frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{8.1}$$

$$v_1 = v_2, \quad x = 0, \quad t > 0. \tag{8.2}$$

I. *Для описанного выше твердого тела с нулевой начальной температурой и плоскостью $x = -l$, поддерживаемой при $t > 0$ при постоянной температуре*, вспомогательные уравнения имеют вид

$$\frac{d^2\bar{v}_1}{dx^2} - q_1^2\bar{v} = 0, \quad -l < x < 0, \tag{8.3}$$

$$\frac{d^2\bar{v}_2}{dx^2} - q_2^2\bar{v} = 0, \quad x > 0, \tag{8.4}$$

где

$$q_1 = (p/\varkappa_1)^{1/2}, \quad q_2 = (p/\varkappa_2)^{1/2}. \tag{8.5}$$

Эти уравнения должны быть решены при условиях

$$K_1\frac{d\bar{v}_1}{dx} = K_2\frac{d\bar{v}_2}{dx}; \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{8.6}$$

$$\bar{v}_1 = V/p, \quad x = -l, \tag{8.7}$$

$$\bar{v}_2 \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{8.8}$$

*) Составные пластины рассмотрены в [24—26]. Составные шары — в работах [27—30]. Составные цилиндры рассмотрены в [31]. Дополнительные ссылки на работы, в которых рассматриваются составные цилиндры и шары, приводятся в следующей главе. Полуограниченное составное твердое тело с постоянным тепловым потоком на поверхности рассматривается в статьях [32, 33]. В работе [34] рассмотрена пластина, состоящая из n слоев, как с постоянной температурой поверхностей, так и с граничными условиями третьего рода; там же приведены формулы в явном виде (см. также [35, 36]).

Решение уравнения (8.3), удовлетворяющее условию (8.7), имеет вид

$$\bar{v}_1 = (V/p)\,\mathrm{ch}\, q_1 (l + x) + A\,\mathrm{sh}\, q_1 (l + x);$$

решение уравнения (8.4), удовлетворяющее условию (8.8), имеет вид

$$\bar{v}_2 = Be^{-q_2 x}.$$

Неизвестные A и B находят из (8.6), и окончательно мы получим

$$\bar{v}_1 = \frac{V(\mathrm{ch}\, q_1 x - \sigma\,\mathrm{sh}\, q_1 x)}{p(\mathrm{ch}\, q_1 l + \sigma\,\mathrm{sh}\, q_1 l)}, \tag{8.9}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{V}{p(\mathrm{ch}\, q_1 l + \sigma\,\mathrm{sh}\, q_1 l)} e^{-q_2 x}; \tag{8.10}$$

здесь используются следующие обозначения:

$$K = \sqrt{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}}, \quad \sigma = \frac{K_2 k}{K_1}, \quad \alpha = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}. \tag{8.11}$$

Для оценки v_1 и v_2 можно использовать либо теорему обращения, либо метод разложения в ряд, описанный в § 5 данной главы. Согласно теореме обращения можно написать

$$v_2 = \frac{V}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{\lambda t - k\mu_1 x}\, d\lambda}{\lambda(\mathrm{ch}\, \mu_1 l + \sigma\,\mathrm{sh}\, \mu_1 l)}, \tag{8.12}$$

где $\mu_1 = \sqrt{\lambda/\varkappa_1}$. Подынтегральная функция в соотношении (8.12) имеет при $\lambda = 0$ точку ветвления; поэтому, как и в предыдущем параграфе, мы используем контур, изображенный на рис. 40; тогда интеграл в (8.12) окажется равным сумме интегралов по малой окружности с центром в начале координат и по прямым CD и EF.

Интегрируя по малой окружности, получаем V.

Полагая, что на EF $\lambda = \varkappa_1 u^2 e^{i\pi}$, а на CD $\lambda = \varkappa_1 u^2 e^{-i\pi}$, получим, что вклад со стороны CD и EF равен

$$\frac{V}{\pi i}\left\{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\varkappa_1 u^2 t - ikxu}\, du}{u[\cos ul + i\sigma \sin ul]} - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\varkappa_1 u^2 t + ikxu}\, du}{u[\cos ul - i\sigma \sin ul]}\right\} =$$

$$= -\frac{2V}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa_1 u^2 t}\, \frac{\sigma \cos kux \sin ul + \sin kux \cos ul}{u[\cos^2 ul + \sigma^2 \sin^2 ul]}\, du.$$

Таким образом,

$$v_2 = V - \frac{2V}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa_1 u^2 t}\, \frac{\sigma \cos kux \sin ul + \sin kux \cos ul}{u[\cos^2 ul + \sigma^2 \sin^2 ul]}\, du. \tag{8.13}$$

Аналогичным образом получим

$$v_1 = V - \frac{2\sigma V}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa_1 u^2 t}\, \frac{\sin u(l + x)\, du}{u[\cos^2 ul + \sigma^2 \sin^2 ul]}. \tag{8.14}$$

Изложенный в § 5 данной главы метод дает решение в форме, которая зачастую оказывается более удобной. Используя обозначения (8.11), можно из (8.10)

получить

$$\bar{v}_2 = \frac{2V}{p(1+\sigma)[1-\alpha e^{-2q_1 l}]} e^{-kq_1 x - q_1 l} = \frac{2V}{(1+\sigma)p} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-q_1[(2n+1)l+kx]}. \quad (8.15)$$

Из (8) приложения 5 следует, что

$$v_2 = \frac{2V}{1+\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \Phi^* \left[\frac{(2n+1)l + kx}{2\sqrt{\varkappa_1 t}} \right]. \quad (8.16)$$

Подобным же образом

$$v_1 = V \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left\{ \Phi^* \left[\frac{(2n+1)l + x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}} \right] - \alpha \Phi^* \left[\frac{(2n+1)l - x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}} \right] \right\}. \quad (8.17)$$

Используя (7) приложения 5, таким же путем находим градиент температуры на поверхности в виде

$$\left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \right]_{x=-l} = -\frac{V}{\sqrt{\pi \varkappa_1 t}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \exp\left[-\frac{n^2 l^2}{\varkappa_1 t} \right] \right\}. \quad (8.18)$$

Для очень больших значений времени все показательные функции в (8.18) можно заменить единицей, и мы приближенно получим

$$\left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \right]_{x=-l} = -\frac{V}{\sqrt{\pi \varkappa_1 t}} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right\} = -\frac{V}{\sqrt{\pi \varkappa_1 t}} \left(\frac{K_2 \rho_2 c_2}{K_1 \rho_1 c_1} \right)^{1/2}. \quad (8.19)$$

Если поверхность поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура всего твердого тела равна V, то, очевидно, что градиент температуры при $x = -l$ будет равен написанному выше выражению с обратным знаком. Этот результат был использован Перри и Хевисайдом при определении возраста Земли *). Кельвин в своей классической работе (см. § 14 гл. II) установил, что градиент температуры равен $V/\sqrt{\pi \varkappa_1 t}$. Теперь известно, что плотность и физические свойства ядра Земли значительно отличаются от соответствующих величин для наружной оболочки. Приняв это, мы увидим, что время, необходимое для уменьшения температурного градиента до существующего в настоящее время уровня, в $(K_2 c_2 \rho_2)/(K_1 c_1 \rho_1)$ раз больше времени, получающегося из теории Кельвина. По данным, принятым Перри и Хевисайдом, это отношение примерно равно 450, и оценку Кельвина, равную 10^8 лет, следует увеличить до $4{,}5 \cdot 10^{10}$ лет.

Представляет некоторый интерес случай малого l, т. е. случай тонкой пленки иного материала, находящейся на поверхности полуограниченного твердого тела. Разлагая гиперболические функции в знаменателе решения (8.10) по возрастающим степеням l, найдем

$$\bar{v}_2 = \frac{K_1 V e^{-q_2 x}}{p\left(K_1 + kK_2 l q_1 + \frac{1}{2} K_1 q_1^2 l^2 + \ldots\right)}. \quad (8.20)$$

Учитывая только первую степень l, получим

$$\bar{v}_2 = \frac{hV e^{-q_2 l}}{p(h+q_2)},$$

где $h = K_1/K_2 l$. Это равно значению $\bar{v}_2$, полученному с учетом приближенного граничного условия (9.7) гл. I, в котором мы полностью пренебрегали теплоемкостью пленки. Во втором приближении, учитывающем также член с l^2,

*) См. ссылки на литературу к гл. II и IX.

получим

$$\bar{v}_2 = \frac{hVe^{-q_2x}}{p(h+q_2+h'p)}, \tag{8.21}$$

где $h' = K_1l/2\varkappa_1K_2$. Изображения такого типа появлялись в примере III § 4 данной главы. Выражение (8.21) является изображением решения задачи о полуограниченном твердом теле с нулевой начальной температурой и граничным условием в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} - h'\frac{\partial v}{\partial t} - hv = -hV, \quad x = 0. \tag{8.22}$$

Таким образом, это условие можно считать приближенным граничным условием, учитывающим теплоемкость пленки *).

II. *Описанное выше составное твердое тело с нулевой начальной температурой. При $t > 0$ в области $-l < x < 0$ в единицу времени на единицу объема выделяется постоянное количество тепла A_0. В области $x > 0$ тепло не выделяется. Плоскость $x = -l$ поддерживается при нулевой температуре.*

В данном случае, используя обозначения (8.11), получим следующие решения:

$$v_1 = \frac{A_0(l^2-x^2)}{2K_1} - \frac{2A_0\sigma}{\pi K_1}\int_0^\infty e^{-\varkappa_1u^2t}\frac{(1-\cos ul)\sin u(l+x)}{u^3[\cos^2 ul+\sigma^2\sin^2 ul]}\,du, \tag{8.23}$$

или

$$v_1 = \frac{\varkappa_1A_0t}{K_1} - \frac{4\varkappa_1A_0t}{K_1}\sum_{n=0}^\infty \alpha^n\left\{i^2\Phi^*\left[\frac{(2n+1)l+x}{2\sqrt{\varkappa_1t}}\right] - \alpha i^2\Phi^*\left[\frac{(2n+1)l-x}{2\sqrt{\varkappa_1t}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma}{1+\sigma}i^2\Phi^*\left[\frac{2nl-x}{2\sqrt{\varkappa_1t}}\right] - \frac{\sigma}{1+\sigma}i^2\Phi^*\left[\frac{(2n+2)l+x}{2\sqrt{\varkappa_1t}}\right]\right\}. \tag{8.24}$$

$$v_2 = \frac{A_0l^2}{2K_1} - \frac{2A_0}{\pi K_1}\int_0^\infty e^{-\varkappa_1u^2t}\frac{(1-\cos ul)(\sigma\sin ul\cos kux+\cos ul\sin kux)}{u^3(\cos^2 ul+\sigma^2\sin^2 ul)}\,du, \tag{8.25}$$

или

$$v_2 = \frac{4\varkappa_1tA_0}{K_1(1+\sigma)}\sum_{n=0}^\infty \alpha^n\left\{i^2\Phi^*\left[\frac{2nl+kx}{2\sqrt{\varkappa_1t}}\right] + \right.$$
$$\left. + i^2\Phi^*\left[\frac{(2n+2)l+kx}{2\sqrt{\varkappa_1t}}\right] - 2i^2\Phi^*\left[\frac{(2n+1)l+kx}{2\sqrt{\varkappa_1t}}\right]\right\}. \tag{8.26}$$

III. *Пластина конечных размеров. Область пластины $-l < x < 0$ содержит материал с параметрами K_1, ρ_1, c_1, $\varkappa_1$, v_1, а область $0 < x < a$ — другой материал, с параметрами K_2, ρ_2, c_2, $\varkappa_2$, v_2. Начальная температура равна нулю. При $t > 0$ плоскость $x = -l$ поддерживается при постоянной температуре V, а плоскость $x = 0$ — при нулевой температуре.*

Вспомогательными уравнениями здесь служат уравнения (8.3) — (8.7), но условие (8.8) заменяется на условие

$$\bar{v}_2 = 0, \quad x = a.$$

Решая эти уравнения, находим

$$\bar{v}_1 = \frac{V\{\operatorname{ch} q_1x\operatorname{sh} q_2a - \sigma\operatorname{sh} q_1x\operatorname{ch} q_2a\}}{p\{\operatorname{ch} q_1l\operatorname{sh} q_2a + \sigma\operatorname{sh} q_1l\operatorname{ch} q_2a\}}, \tag{8.27}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{V\operatorname{sh} q_2(a-x)}{p\{\operatorname{ch} q_1l\operatorname{sh} q_2a + \sigma\operatorname{sh} q_1l\operatorname{ch} q_2a\}}. \tag{8.28}$$

*) Случай многослойной оболочки рассматривался в [37].

Разложение этих выражений в ряды типа (8.15) довольно сложно, и поэтому мы рассмотрим только решения, получаемые при помощи теоремы обращения. В данном случае подынтегральные функции являются однозначными функциями λ с простыми полюсами при $\lambda = 0$ и $\lambda = -\varkappa_1\beta_m^2$, где $\pm\beta_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, — корни *) уравнения

$$\cos\beta l \sin k\beta a + \sigma \sin\beta l \cos k\beta a = 0. \tag{8.29}$$

Применяя обычным образом теорему обращения, найдем

$$v_1 = \frac{V(K_1 a - K_2 x)}{K_1 a + K_2 l} - \\ - 2V\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\beta_m x \sin ka\beta_m - \sigma\sin\beta_m x\cos ka\beta_m}{\beta_m\{(l+\sigma ka)\sin\beta_m l\sin ka\beta_m - (\sigma l + ka)\cos\beta_m l\cos ka\beta_m} e^{-\varkappa_1\beta_m^2 t}, \tag{8.30}$$

$$v_2 = \frac{K_1 V(a-x)}{K_1 a + K_2 l} - \\ - 2V\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin k\beta_m(a-x)}{\beta_m\{(l+\sigma ka)\sin\beta_m l\sin ka\beta_m - (\sigma l + ka)\cos\beta_m l\cos ka\beta_m} e^{-\varkappa_1\beta_m^2 t}. \tag{8.31}$$

Ряды в решениях (8.30) и (8.31) можно немного упростить, используя снова (8.29). Следует отметить, что корни уравнения (8.29) служат корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}\beta l + \sigma\operatorname{ctg} k\beta a = 0 \tag{8.32}$$

и общими корнями (если вообще они имеются) уравнений

$$\sin\beta l = 0 \quad \text{и} \quad \sin k\beta a = 0. \tag{8.33}$$

Последние уравнения имеют общие корни тогда и только тогда, когда отношение ka/l есть рациональная величина. Таким образом, если

$$ka/l = r/s \tag{8.34}$$

есть несократимая рациональная дробь, то общие положительные корни (8.33) равны $n\pi s/l$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и эти корни уравнения (8.29) дадут для v_1 и v_2 соответственно ряды

$$-\frac{2V\sigma}{\pi(r+\sigma s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos ns\pi}{n}\sin\frac{ns\pi x}{l}\exp\left[-\frac{\varkappa_1 n^2 s^2\pi^2 t}{l^2}\right] \tag{8.35}$$

и

$$-\frac{2V}{\pi(r+\sigma s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos ns\pi}{n}\sin\frac{nr\pi x}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa_1 n^2 s^2\pi^2 t}{l^2}\right]. \tag{8.36}$$

Если дробь ka/l иррациональна, эти ряды не появятся.

Во всех случаях существует ряд членов, соответствующих положительным корням **) β_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, уравнения (8.32).

Воспользовавшись уравнением (8.32), можно представить члены рядов (8.30) и (8.31), соответствующие этим корням, в виде

$$-2V\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 ka\beta_n \sin\beta_n(l+x)}{\beta_n(l\sin^2 ka\beta_n + \sigma ka\sin^2 l\beta_n)} e^{-\varkappa_1\beta_n^2 t} \tag{8.37}$$

---

*) Ниже в примере IV будет показано, что все эти корни действительны и просты.

**) В их число входят простые корни уравнений $\cos\beta l = 0$ и $\cos ka\beta = 0$, которые могут появиться, если ka/l является рациональной величиной. В этом частном случае справедливы рассуждения, приводящие к выражениям (8.37) и (8.38).

и

$$-2V\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin l\beta_n \sin ka\beta_n \sin k(a-x)\beta_n}{\beta_n(l\sin^2 ka\beta_n+\sigma ka\sin^2 l\beta_n)}e^{-\varkappa_1\beta_n^2 t} \qquad (8.38)$$

соответственно для v_1 и v_2.

IV. *Характер корней уравнения* (8.32) *и уравнений, появляющихся в аналогичных задачах.*

При получении решений в виде бесконечных рядов с помощью теоремы обращения мы обычно еще должны доказать, что все корни определенного трансцендентного уравнения действительны и просты. В примере III таким уравнением было уравнение (8.32); в задаче о твердом теле в виде составного шара им является уравнение (9.35) гл. XIII; в случае более общих граничных условий появляются другие типы уравнений, например уравнение (9.25) гл. XIII и т. п.

В § 9 гл. III было исследовано очень простое уравнение. Обобщение примененного там метода [27, 38] можно использовать во всех случаях. Здесь же в качестве примера мы рассмотрим уравнение (8.32).

Очевидно, что оно не может иметь чисто мнимого корня $\beta = i\eta$, так как

$$\operatorname{cth}\eta l + \sigma \operatorname{cth} k\eta l > 0.$$

Покажем теперь, что оно не может иметь комплексного корня вида $\xi \pm i\eta$. Рассмотрим функцию U, определяемую следующим образом:

$$U=\begin{cases} U_1=\sin\beta(l+x), & -l<x<0, \qquad (8.39)\\ U_2=\dfrac{\sin\beta l\sin k\beta(a-x)}{\sin k\beta a}, & 0<x<a, \qquad (8.40)\end{cases}$$

где β — корень уравнения (8.32).

В таком случае получим

$$\frac{d^2U_1}{dx^2}+\beta^2U_1=0,\quad -l<x<0;\qquad \frac{d^2U_2}{dx^2}+k^2\beta^2U_2=0,\quad 0<x<a. \qquad (8.41)$$

Кроме того,

$$U_1=0 \text{ при } x=-l;\quad U_2=0 \text{ при } x=a;\quad U_1=U_2 \text{ при } x=0 \qquad (8.42)$$

и

$$\left[K_1\frac{dU_1}{dx}-K_2\frac{dU_2}{dx}\right]_{x=0}=\frac{\beta}{\sin k\beta a}\{K_1\cos\beta l\sin k\beta a+K_2k\sin\beta l\cos k\beta a\}=0, \qquad (8.43)$$

так как β — корень уравнения (8.32).

Пусть теперь β и α — два различных корня уравнения (8.32), и пусть V_1 и V_2 — величины, соответствующие величинам U_1 и U_2 при замене β на α.

Тогда из соотношений (8.41) и соответствующих уравнений для V_1 и V_2 получим

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_{-l}^{0}U_1V_1\,dx+\int_{-l}^{0}\left(U_1''V_1-V_1''U_1\right)dx=0,$$

$$k^2(\beta^2-\alpha^2)\int_{0}^{a}U_2V_2\,dx+\int_{0}^{a}\left(U_2''V_2-V_2''U_2\right)dx=0.$$

Отсюда, используя соотношения (8.42) и (8.43), находим

$$(\beta^2-\alpha^2)\left\{K_1\int_{-l}^{0}U_1V_1\,dx+k^2K_2\int_{0}^{a}U_2V_2\,dx\right\}=$$

$$=K_1\int_{-l}^{0}\left(U_1V_1''-U_1''V_1\right)dx+K_2\int_{0}^{a}\left(U_2V_2''-V_2U_2''\right)dx=$$

$$=K_1\left[U_1V_1'-V_1U_1'\right]_{-l}^{0}+K_2\left[U_2V_2'-V_2U_2'\right]_0^a=0. \qquad (8.44)$$

Из последнего соотношения следует, что α и β не могут иметь вид $\xi \pm i\eta$, поскольку U_1, V_1 и U_2, V_2 были бы тогда сопряженными комплексными величинами и величина

$$K_1 \int\limits_{-l}^{0} U_1 V_1\,dx + k^2 K_2 \int\limits_{0}^{a} U_2 V_2\,dx$$

была бы положительной.

Таким образом, мы доказали, что все корни уравнения (8.32) являются вещественными. Их симметричное расположение относительно начала координат и то обстоятельство, что они не повторяются, следует в данном случае из рассмотрения кривых $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{ctg}(kax/l)$. Другие случаи можно рассмотреть путем обобщения описанного выше метода (см. [38]).

V. *Составная пластина из произвольного числа слоев.*

При написании изображения любой требуемой функции для общего случая n слоев трудностей не встречается. Легче всего это сделать при помощи описываемого ниже метода матриц. Вследствие сложности получаемых решений рассмотрение корней знаменателя в изображении решения и численная оценка температур требуют проведения очень сложных вычислений. Следует отметить, что, когда изображение найдено, оно непосредственно дает стационарное периодическое решение; кроме того, в тех случаях, когда рассматриваемая величина имеет прямолинейную асимптоту в виде $(a+bt)$, ее легко найти простым хорошо известным численным методом (ср. § 6 гл. XV).

Для определения изображения рассмотрим сначала пластину $0 < x < l$. Тогда, если $\bar{v}_x$ и $\bar{f}_x$ — изображения температуры и теплового потока в точке x, то из вспомогательных уравнений сразу же получим

$$\bar{v}_x = \bar{v}_0 \operatorname{ch} qx - \bar{f}_0 (1/Kq) \operatorname{sh} qx, \tag{8.45}$$

$$\bar{f}_x = -\bar{v}_0 Kq \operatorname{sh} qx + \bar{f}_0 \operatorname{ch} qx, \tag{8.46}$$

или в матричном обозначении, определенном в § 7 гл. III,

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{f}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} qx & -(1/Kq)\operatorname{sh} qx \\ -Kq \operatorname{sh} qx & \operatorname{ch} qx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{f} \end{pmatrix}. \tag{8.47}$$

Рассмотрим теперь пластину, состоящую из n слоев, (l_1, l_2), (l_2, l_3), ..., (l_n, l_{n+1}). Пусть K_r и $\varkappa_r$ — теплопроводность и температуропроводность r-го слоя, $\bar{v}_r$ и $\bar{f}_r$ — изображения температуры и теплового потока на границе этого слоя $x = l_r$, а $\bar{v}'_r$ и $\bar{f}'_r$ — их значения на границе слоя $x = l_{r+1}$. Тогда из (8.47) получим

$$\begin{pmatrix} \bar{v}'_r \\ \bar{f}'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_r \\ \bar{f}_r \end{pmatrix}, \tag{8.48}$$

где

$$q_r = (p/\varkappa_r)^{1/2},$$

$$\left.\begin{aligned} A_r &= \operatorname{ch}(l_{r+1} - l_r)\, q_r, & B_r &= -(1/K_r q_r) \operatorname{sh}(l_{r+1} - l_r)\, q_r, \\ C_r &= -K_r q_r \operatorname{sh}(l_{r+1} - l_r)\, q_r, & D_r &= \operatorname{ch}(l_{r+1} - l_r)\, q_r \end{aligned}\right\} \tag{8.49}$$

и

$$A_r D_r - B_r C_r = 1.$$

Если между пластинами имеется идеальный тепловой контакт, то повторное применение (8.49) дает

$$\begin{pmatrix} \bar{v}'_r \\ \bar{f}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{f}_1 \end{pmatrix}. \tag{8.50}$$

Если теплопередача происходит по линейному закону, контактные сопротивления равны $R_1, \ldots, R_{n+1}$ при $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$, область $x < l_1$ имеет температуру v_0, а область $x > l_{n+1}$ — температуру v_{n+1}, то

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_{n+1} \\ \bar{f}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -R_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -R_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{f}_0 \end{pmatrix}.$$

Таким способом определяются изображения для температуры или тепловых потоков при любом из $l_1, \ldots, l_{n-1}$, а значения для промежуточных точек можно найти затем из уравнений (8.45) и (8.46). Этим способом можно, например, вывести соотношения (8.27) и (8.28).

VI. *Область $0 < x < l$ состоит из одного материала, а область $x > l$ — из другого. Тепловой поток при $x = 0$ отсутствует. Начальная температура в области $0 < x < l$ постоянна, а в области $x > l$ равна нулю.*

Решение этой задачи и численные значения температур при $x = 0$ приведены в статье [39].

ЛИТЕРАТУРА

1. Carslaw, Jaeger, Operational Methods in Applied Mathematics, Oxford, 1948. (Г. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, М., 1948, перев. с 1-го изд. 1941 г.)
2. Bromwich, Proc. Lond. Math. Soc. **15**, 401 (1916).
3. Wagner, Arch. Elektrotech. **4**, 159 (1916).
4. Jeffreys, Operational Methods in Mathematical Physics, Cambridge, ed. 2, 1931.
5. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, Macmillan, ed. 2, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1947.)
6. Carslaw, Jeffreys, Math. Gaz. **14**, 216, 225 (1928).
7. Doetsch, Math. Z. **22**, 285, 293 (1925); **25**, 608 (1926); **26**, 89 (1927); **28**, 567 (1928).
8. Churchill, Modern operational Mathematics in Engineering McGraw-Hill, 1944.
9. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Springer, 1937.
10. Gardner, Barnes, Transients in Linear Systems, vol. 1, Willey, 1942.
11. Campbell, Foster, Fourier Integrals for Practical Applications, Bell System Techn. Monographs, No B-584.
12. McLachlan, Humbert, Formulaire pour le calcul symbolique, Gauthier-Villars, 1941.
13. Erdélyi, Tables of Integral Transforms, McGraw-Hill, 1954.
14. Humbert, Le calcul symbolique, Actualités scientifiques et industrielles, No 147, 1934.
15. Churchill, Math. Z. **42**, 567 (1937).
16. Tränkle, Frequenz **8**, 334—338 (1954).
17. Van Orstrand, J. Wash. Acad. Sci. **22**, 529 (1932).
18. Lochs, Z. angew. Math. Mech. **34**, 79—80 (1954).
19. Macey, Proc. Phys. Soc. **52**, 625 (1940).
20. Goldstein, Z. angew. Math. Mech. **12**, 234 (1932).
21. Hartree, Mem. Manchr. Lit. Phil. Soc. **80**, 85 (1935).
22. Barrer, Trans. Faraday Soc. **35**, 628 (1939); **36**, 1235 (1940).
23. Barrer, Phil. Mag. **28**, 148 (1939); **35**, 802 (1944).
24. Lowan, Duke Math. J. **1**, 94 (1935).
25. Churchill, Duke Math. J. **2**, 405 (1936).
26. Churchill, Am. J. Math. **61**, 651 (1939).
27. Bromwich, Proc. Camb. Phil. Soc. **20**, 411 (1921).
28. Carslaw, Proc. Camb. Phil. Soc. **20**, 399 (1921).
29. Carslaw, Jaeger, Proc. Camb. Phil. Soc. **35**, 394 (1939).
30. Bell, Proc. Phys. Soc. **57**, 45 (1945).
31. Jaeger, Phil. Mag. **32**, 324 (1941).
32. Matricon, J. Phys. Radium **12**, 15 (1951).
33. Griffith, Horton, Proc. Phys. Soc. **58**, 481—487 (1946).
34. Sakai, Sci. Rep. Tohoku Univ. **11**, 351—378 (1922).
35. Jaeger, Quart. Appl. Math. **8**, 187—198 (1950).
36. Levy, Trans. ASME **78**, 1627—1635 (1956).
37. Fox, Phil. Mag. **18**, 209 (1934).
38. Ince, Ordinary Differential Equations, Longmans, 1927.
39. Lovering, Bull. Geol. Soc. America **47**, 87 (1936).

ГЛАВА XIII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА И ШАРА

§ 1. Введение

В настоящей главе мы рассмотрим несколько задач для шара и бесконечного цилиндра кругового сечения, которые гораздо легче решаются не классическими методами, а методом преобразования Лапласа. Мы займемся здесь задачами [1, 2] с усложненными граничными условиями, задачами для полого и составного цилиндров, а также решениями, применимыми для малых интервалов времени, решениями для областей, ограниченных изнутри цилиндрическими поверхностями, и, наконец, соответствующими задачами для шара.

§ 2. Цилиндр кругового сечения $0 \leqslant r < a$ с различными граничными условиями

В настоящем параграфе в качестве примера применения преобразования Лапласа при решении задач для цилиндрической области приведено сокращенное решение нескольких задач, уже рассмотренных в §§ 6—9 гл. VII. Используемые здесь выражения для изображений потребуются также в § 3 гл. XIII, где находят решения, применимые при малых значениях $\varkappa t/a^2$.

I. *Нулевая начальная температура. Температура поверхности постоянна.*

В данном случае нужно решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0, \qquad 0 \leqslant r < a, \qquad t > 0, \tag{2.1}$$

при условии, что $v = V$ при $r = a$, $t > 0$.

Вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{v}}{dr}-q^2\bar{v}=0, \qquad 0 \leqslant r < a, \tag{2.2}$$

где $q^2 = p/\varkappa$. Его следует решать при

$$\bar{v}=\frac{V}{p}, \qquad r = a, \tag{2.3}$$

и при $\bar{v}$, имеющем конечное значение при $r = 0$. Из двух решений уравнения (2.2), $I_0(qr)$ и $K_0(qr)$, последнее при $r \to 0$ стремится к бесконечности, и поэтому его следует исключить. Таким образом, решение уравнения (2.2) при условии (2.3) имеет вид

$$\bar{v}=\frac{VI_0(qr)}{pI_0(qa)}. \tag{2.4}$$

Отсюда, используя теорему обращения, получим

$$v = \frac{V}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \frac{I_0(\mu r)}{\lambda I_0(\mu a)} d\lambda, \tag{2.5}$$

где, как обычно, μ обозначает $\sqrt{\lambda/\varkappa}$.

Подынтегральная функция в соотношении (2.5) является однозначной функцией λ (см. [3] или ряд, в который разлагается функция $I_0(z)$), и поэтому мы воспользуемся контуром, изображенным на рис. 39. Нули функции $I_0(\mu a)$ располагаются в точках $\lambda = -\varkappa\alpha_n^2$, где $\pm\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, служат корнями уравнения

$$J_0(a\alpha) = 0.$$

Тогда обычным путем получаем, что интеграл в соотношении (2.5) равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно полюсов подынтегральной функции. Вычеты оцениваются по следующей формуле (ср. (26) приложения 3):

$$\left[\lambda \frac{d}{d\lambda} I_0(\mu a)\right]_{\lambda = -\varkappa\alpha_n^2} = \left[\frac{1}{2} \mu a I_1(\mu a)\right]_{\mu = i\alpha_n} = -\frac{1}{2} a\alpha_n J_1(a\alpha_n). \tag{2.6}$$

Для полюса при $\lambda = 0$ вычет равен 1, поскольку $I_0(z) = 1$ при $z = 0$. Таким образом, окончательно получим

$$v = V - \frac{2V}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_1(a\alpha_n)}. \tag{2.7}$$

Мы получили решение, совпадающее с решением (6.8) гл. VII, но здесь мы не принимаем допущения (6.1) той же главы, и можно, как в приложении 1, показать, что соотношение (2.7) удовлетворяет условиям нашей задачи. Аналогичное замечание применимо ко всем решениям, приведенным в данной главе.

II. *Начальная температура равна нулю. Температура поверхности равна kt.* Аналогичным путем находим, что

$$v = \frac{k}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \frac{I_0(\mu r)}{\lambda^2 I_0(\mu a)} d\lambda = k\left(t - \frac{a^2 - r^2}{4\varkappa}\right) + \frac{2k}{a\varkappa} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n^3 J_1(a\alpha_n)}. \tag{2.8}$$

Единственным отличием служит существование в данном случае полюса второго порядка при $\lambda = 0$.

III. *Нулевая начальная температура. Тепловой поток на поверхности постоянен и равен F_0.*

Вспомогательное уравнение (2.2) следует здесь решать при граничном условии

$$-K \frac{d\bar{v}}{dr} = \frac{F_0}{p}. \tag{2.9}$$

Таким образом,

$$\bar{v} = -\frac{F_0 \varkappa^{1/2} I_0(qr)}{K p^{3/2} I_1(qa)}. \tag{2.10}$$

Воспользовавшись теоремой обращения, получим решение в виде

$$v = -\frac{F_0 a}{K} \left\{ \frac{2\varkappa t}{a^2} + \frac{r^2}{2a^2} - \frac{1}{4} - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\varkappa\alpha_s^2 t}{a^2}\right] \frac{J_0\left(\frac{r\alpha_s}{a}\right)}{\alpha_s^2 J_0(\alpha_s)}, \right. \tag{2.11}$$

где α_s — положительные корни уравнения

$$J_1(\alpha) = 0. \tag{2.12}$$

IV. *Нулевая начальная температура. Граничное условие третьего рода.*

Вспомогательным уравнением остается уравнение (2.2), и если на границе цилиндра происходит теплообмен со средой, имеющей постоянную температуру V, то граничное условие имеет вид

$$\frac{d\bar{v}}{dr} + h\bar{v} = \frac{hV}{p}, \quad \text{когда} \quad r = a. \tag{2.13}$$

Следовательно, решение запишется следующим образом:

$$\bar{v} = \frac{hVI_0(qr)}{p\,\{qI_1(qa) + hI_0(qa)\}}. \tag{2.14}$$

Воспользовавшись теоремой обращения, находим решение в виде

$$\frac{v}{V} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{2hJ_0(r\alpha_n)}{a\left(h^2 + \alpha_n^2\right) J_0\left(a\alpha_n\right)}, \tag{2.15}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$\alpha J_1(a\alpha) = hJ_0(a\alpha). \tag{2.16}$$

V. *Контакт с хорошо перемешиваемой жидкостью**) *или идеальным проводником тепла.*

В качестве примера рассмотрим следующий случай: *цилиндр* $0 \leqslant r < a$, *имевший в начальный момент* $t = 0$ *постоянную температуру* V, *помещают в хорошо перемешиваемую жидкость с удельной теплоемкостью* c' *и температурой, равной в начальный момент времени нулю. Пусть на единицу длины цилиндра приходится масса жидкости, с которой он соприкасается, равная* M. *Пусть, далее, температура жидкости при* $t > 0$ *равна температуре поверхности твердого тела и тепло, теряемое жидкостью в окружающую среду, равно произведению* H *на температуру жидкости.*

В этом случае вспомогательное уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{v}}{dr} - q^2\bar{v} = -\frac{V}{\varkappa}, \qquad 0 \leqslant r < a. \tag{2.17}$$

Граничное условие при $r = a$ имеет вид (ср. (9.14), (9.15) гл. I)

$$-2\pi aK\frac{\partial v}{\partial r} = Mc'\frac{du}{dt} + Hu, \qquad r = a, \tag{2.18}$$

где u — температура жидкости, причем $u = v$ при $t > 0$.

Отсюда получим следующее граничное условие для вспомогательного уравнения (2.17):

$$2\pi aK\frac{d\bar{v}}{dr} + (Mc'p + H)\,\bar{v} = 0, \qquad r = a. \tag{2.19}$$

Следовательно,

$$\bar{v} = \frac{V}{p}\left\{1 - \frac{(Mc'p + H)\,I_0(qr)}{2\pi aKqI_1(qa) + (Mc'p + H)\,I_0(qa)}\right\},$$

и

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V\left(H' - ka^2\alpha_n^2\right) J_0\left(r\alpha_n\right)}{J_0\left(a\alpha_n\right)\left[(2k+1)a^2\alpha_n^2 + \left(H' - k^2a^2\alpha_n^2\right)^2\right]} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{2.20}$$

---

*) Решения ряда таких задач для областей, ограниченных изнутри и снаружи цилиндрическими поверхностями, и для малых цилиндров приведены в статьях [4, 5]. Подобные задачи возникают, например, при рассмотрении нестационарного нагрева одножильных кабелей [6].

где $\pm\alpha_n$, $n=1, 2, \ldots,$ — корни уравнения

$$a\alpha J_1(a\alpha) = (H' - ka^2\alpha^2) J_0(a\alpha), \tag{2.21}$$

а

$$H' = H/2\pi K, \qquad k = Mc'/2\pi a^2\rho c.$$

VI. *Выделение тепла при $t>0$ в цилиндре $0 \leqslant r < a$. Начальная температура равна нулю.*

Если начальная температура цилиндра равна нулю и если при $t>0$ в цилиндре выделяется в единицу времени на единицу объема постоянное количество тепла A_0, а поверхность $r=a$ поддерживается при нулевой температуре, то вспомогательное уравнение имеет вид (6.7) гл. I

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{v}}{dr} - q^2\bar{v} = -\frac{A_0}{Kp}. \tag{2.22}$$

Решение этого уравнения с величиной $\bar{v}$, равной при $r=a$ нулю и имеющей при $r=0$ конечное значение, записывается в виде

$$\bar{v} = \frac{\varkappa A_0}{Kp^2} - \frac{\varkappa A_0 I_0(qr)}{Kp^2 I_0(qa)}. \tag{2.23}$$

Отсюда, пользуясь (2.8), получим

$$v = \frac{A_0(a^2-r^2)}{4K} - \frac{2A_0}{aK}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n^3 J_1(a\alpha_n)}, \tag{2.24}$$

где α_n — положительные корни уравнения $J_0(a\alpha)=0$.

§ 3. Решения, применимые для малых интервалов времени

I. *Постоянная температура поверхности.*

Рассмотрим сначала задачу *I* предыдущего параграфа, в которой температура поверхности постоянна. Ранее, в § 6 гл. VII, уже отмечалось, что решением (2.7) предыдущего параграфа неудобно пользоваться при малых значениях $\varkappa t/a^2$, например при значениях, меньших 0,02. Аналогичное затруднение встречалось и в задачах для пластины и шара. В этих случаях другие решения можно найти, как и в § 5 гл. XII, разлагая $\bar{v}$ в ряд по экспоненциальным функциям с отрицательным показателем. В задачах для цилиндра метод решения еще сложнее; он заключается в использовании асимптотического разложения функций Бесселя, вводимого с тем, чтобы получить формулу с показательными функциями, коэффициенты которых служат членами рядов по $1/q$ [1,7].

Таким образом, используя решение (2.4) предыдущего параграфа и соотношение (12) приложения 3, получим для случая, когда (r/a) не мало, соотношение

$$\bar{v} = \frac{Va^{1/2}}{pr^{1/2}} e^{-q(a-r)} \frac{[1 + (1/8qr) + (9/128q^2r^2) + \ldots] + O[e^{-2qr}]}{[1 + (1/8qa) + (9/128q^2a^2) + \ldots] + O[e^{-2qa}]}, \tag{3.1}$$

или

$$\bar{v} = \frac{Va^{1/2}}{pr^{1/2}}\left(1 + \frac{a-r}{8qar} + \frac{9a^2 - 7r^2 - 2ar}{128q^2a^2r^2} + \ldots\right) e^{-q(a-r)}, \tag{3.2}$$

причем членами, содержащими $\exp[-q(3a-r)]$ и т. д., которые соответствуют многократному отражению (см. (5.2) гл. XII), пренебрегают. Используя (11)

приложения 5, получим из (3.2)

$$v = \frac{Va^{1/2}}{r^{1/2}} \Phi^* \left(\frac{a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}} \right) + \frac{V(a-r)(\varkappa t a)^{1/2}}{4ar^{3/2}} \mathrm{i}\Phi^* \left(\frac{a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}} \right) + \\ + \frac{V(9a^2 - 7r^2 - 2ar)\varkappa t}{32a^{3/2}r^{5/2}} \mathrm{i}^2\Phi^* \left(\frac{a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}} \right) + \ldots \quad (3.3)$$

Поскольку мы пренебрегаем последними членами, ряд (3.3) неприменим в таком широком диапазоне значений ($\varkappa t/a^2$), как в § 5 предыдущей главы, но он вполне годится для $\varkappa t/a^2 < 0{,}02$ при условии, что r/a не слишком мало.

Для температуры в центре, т. е. при $r = 0$, в соотношении (2.4) данной главы $I_0(qr) = 1$, и, применяя, как и раньше, асимптотическое разложение $I_0(qa)$, найдем

$$\bar{v} = \frac{V(2\pi a)^{1/2}}{p^{3/4}\varkappa^{1/4}\{1 + (1/8qa) + (9/128q^2a^2) + \ldots\}} e^{-qa} = \\ = \frac{V(2\pi a)^{1/2}}{\varkappa^{1/4}p^{3/4}} e^{-qa} - \frac{V(2\pi)^{1/2}\varkappa^{1/4}}{8p^{5/4}a^{1/2}} e^{-qa} - \ldots$$

Пользуясь выражением (20) приложения 5, найдем, что первый член в разложении v имеет вид *)

$$\frac{Va}{\sqrt{\pi \varkappa t}} \exp\left[-\frac{a^2}{8\varkappa t} \right] K_{1/4}\left(\frac{a^2}{8\varkappa t} \right). \quad (3.4)$$

II. *Постоянный тепловой поток на поверхности.*

Рассмотрим тем же способом решение (2.10) данной главы при условии, что, как и ранее, отношение r/a не мало. Тогда

$$v = -\frac{F_0}{K} \left\{ 2 \left(\frac{\varkappa a t}{r} \right)^{1/2} \mathrm{i}\Phi^* \left(\frac{a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}} \right) + \frac{\varkappa t(a+3r)}{2a^{1/2}r^{3/2}} \mathrm{i}^2\Phi^* \left(\frac{a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}} \right) + \ldots \right\}. \quad (3.5)$$

III. *Теплообмен на поверхности.*

Принимая, как и раньше, что r/a не мало, и подставляя в соотношение (2.14) данной главы асимптотические разложения I_0 и I_1, получим

$$\bar{v} = \frac{hVa^{1/2}}{pqr^{1/2}} e^{-q(a-r)} \cdot \frac{1 + (1/8qr) + (9/128q^2r^2) + \ldots}{1 + [ah - (3/8)]/aq + [ah - (15/16)]/8a^2q^2 + \ldots} = \\ = \frac{hVa^{1/2}}{pqr^{1/2}} e^{-q(a-r)} \left\{ 1 + \frac{1}{q} \left[\frac{1}{8r} + \frac{3}{8a} - h \right] + \ldots \right\}.$$

Следовательно,

$$v = \frac{2hV(a\varkappa t)^{1/2}}{r^{1/2}} \mathrm{i}\Phi^* \left[\frac{a-r}{2\sqrt{\varkappa t}} \right] + \\ + \frac{4hVa^{1/2}\varkappa t}{r^{1/2}} \left[\frac{1}{8r} + \frac{3}{8a} - h \right] \mathrm{i}^2\Phi^* \left(\frac{a-r}{2\sqrt{\varkappa t}} \right) + \ldots \quad (3.6)$$

Если отношение r/a мало, то следует использовать метод, приводящий к соотношению (3.4).

*) Этот случай и его обобщение на малые значения r подробно рассмотрены в статье [8]. Там же приведена таблица функций Бесселя $K_{1/4}$, $K_{3/4}$, $K'_{1/4}$ и $K'_{3/4}$, необходимых при решении наших задач.

§ 4. Полый цилиндр $a<r<b$

Рассмотрим эту область при нулевой начальной температуре *) и при следующих граничных условиях:

$$\left.\begin{aligned} k_1\frac{\partial v}{\partial r}-k_2v&=k_3, \qquad r=a,\\ k_1'\frac{\partial v}{\partial r}+k_2'v&=k_3', \qquad r=b,\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

где k_1, k_2, k_1', k_2' — постоянные коэффициенты, которые могут быть положительными величинами или равняться нулю (при условии, что k_1 и k_2 или k_1' и k_2' равны нулю не одновременно), а k_3 и k_3' — любые постоянные величины. При соответствующем выборе этих постоянных мы получим в общем решении задачи решения для случаев постоянной температуры, постоянного теплового потока, нулевого потока и теплообмена на любой из поверхностей.

Вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{v}}{dr}-q^2\bar{v}=0, \qquad a<r<b,$$

а решение получается в форме

$$\bar{v}=AI_0(qr)+BK_0(qr), \tag{4.2}$$

где A и B выбираются так, чтобы $\bar{v}$ удовлетворяло изображениям функций (4.1), а именно:

$$\left.\begin{aligned} k_1\frac{d\bar{v}}{dr}-k_2\bar{v}&=\frac{k_3}{p}, \qquad r=a,\\ k_1'\frac{d\bar{v}}{dr}+k_2'\bar{v}&=\frac{k_3'}{p}, \qquad r=b.\end{aligned}\right\}$$

Подставляя в них решение (4.2) и решая получающиеся уравнения относительно A и B, окончательно получим

$$\begin{aligned} p\Delta(p)\bar{v}=k_3\left\{\left[k_1'qK_1(qb)+k_2'K_0(qb)\right]I_0(qr)+\left[k_1'qI_1(qb)+k_2'I_0(qb)\right]K_0(qr)\right\}-\\ -k_3'\left\{\left[k_1qK_1(qa)+k_2K_0(qa)\right]I_0(qr)+\left[k_1qI_1(qa)-k_2I_0(qa)\right]K_0(qr)\right\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(p)=\left[k_1qI_1(qa)-k_2I_0(qa)\right]\left[k_1'qK_1(qb)-k_2'K_0(qb)\right]-\\ -\left[k_1qK_1(qa)+k_2K_0(qa)\right]\left[k_1'qI_1(qb)+k_2'I_0(qb)\right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Теперь v определяется при помощи теоремы обращения. Подынтегральная функция является однозначной функцией λ с простым **) полюсом при $\lambda=0$ и простыми полюсами при $\lambda=-\varkappa\alpha_n^2$, где $\pm\alpha_n$ — корни (все

---

*) Случай произвольной начальной температуры рассмотрен в § 8 гл. XIV.

**) Если $k_2=k_2'=0$, то при $\lambda=0$ имеется двойной полюс. Мы опускаем этот случай, который легко исследовать таким же образом.

действительные и простые) уравнения [7] *)

$$[k_1\alpha J_1(a\alpha)+k_2J_0(\alpha a)][k_1'\alpha Y_1(b\alpha)-k_2'Y_0(b\alpha)]-$$
$$-[k_1\alpha Y_1(a\alpha)+k_2Y_0(a\alpha)][k_1'\alpha J_1(b\alpha)-k_2'J_0(b\alpha)]=0. \quad (4.5)$$

Используем обычным образом контур, показанный на рис. 39. Вычет относительно полюса $\lambda=0$ равен

$$\frac{-ak_3\{k_1'-bk_2'\ln(r/b)\}+bk_3'\{k_1+ak_2\ln(r/a)\}}{ak_2k_1'+bk_1k_2'+abk_2k_2'\ln(b/a)}. \quad (4.6)$$

Чтобы найти вычет относительно полюса $\lambda=-\varkappa\alpha_n^2$, нужно, чтобы

$$\left[\lambda\frac{d\Delta}{d\lambda}\right]_{\lambda=-\varkappa\alpha_n^2}=\left[\frac{1}{2}\mu\frac{d\Delta}{d\mu}\right]_{\mu=i\alpha_n}=$$
$$=\frac{1}{2}i\alpha_n\{a[k_1\mu I_0(\mu a)-k_2I_1(\mu a)][k_1'\mu K_1(\mu b)-k_2'K_0(\mu b)]-$$
$$-b[k_1\mu I_1(\mu a)-k_2I_0(\mu a)][k_1'\mu K_0(\mu b)-k_2'K_1(\mu b)]+$$
$$+a[k_1\mu K_0(\mu a)+k_2K_1(\mu a)][k_1'\mu I_1(\mu b)+k_2'I_0(\mu b)]-$$
$$-b[k_1\mu K_1(\mu a)+k_2K_0(\mu a)][k_1'\mu I_0(\mu b)+k_2'I_1(\mu b)]\}_{\mu=i\alpha_n}.$$

Здесь мы использовали соотношение (4.4) и рекуррентные формулы (см. (13) и (15) приложения 3). Чтобы упростить это выражение, отметим, что, например, при $\mu=i\alpha_n$

$$\frac{k_1\mu I_1(\mu a)-k_2I_0(\mu a)}{k_1'\mu I_1(\mu b)+k_2'I_0(\mu b)}=\frac{k_1\mu K_1(\mu a)+k_2K_0(\mu a)}{k_1'\mu K_1(\mu b)-k_2'K_0(\mu b)}=$$
$$=\frac{k_1\alpha_nJ_1(a\alpha_n)+k_2J_0(a\alpha_n)}{k_1'\alpha_nJ_1(b\alpha_n)-k_2'J_0(b\alpha_n)}=\frac{k_1\alpha_nY_1(a\alpha_n)+k_2Y_0(a\alpha_n)}{k_1'\alpha_nY_1(b\alpha_n)-k_2'Y_0(b\alpha_n)}=\rho. \quad (4.7)$$

Используя этот результат и соотношение (22) приложения 3, найдем

$$\left[\lambda\frac{d\Delta}{d\lambda}\right]_{\lambda=-\varkappa\alpha_n^2}=\frac{1}{2}\rho\left(k_1'^2\alpha_n^2+k_2'^2\right)-\frac{1}{2\rho}\left(k_1^2\alpha_n^2+k_2^2\right)=$$
$$=\frac{F(\alpha_n)}{2[k_1\alpha_nJ_1(a\alpha_n)+k_2J_0(a\alpha_0)][k_1'\alpha_nJ_1(b\alpha_n)-k_2'J_0(b\alpha_n)]}, \quad (4.8)$$

где

$$F(\alpha_n)=\left(k_1'^2\alpha_n^2+k_2'^2\right)[k_1\alpha_nJ_1(a\alpha_n)+k_2J_0(a\alpha_n)]^2-$$
$$-\left(k_1^2\alpha_n^2+k_2^2\right)[k_1'\alpha_nJ_1(b\alpha_n)-k_2'J_0(b\alpha_n)]^2. \quad (4.9)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$v=\frac{-ak_3[k_1'-bk_2'\ln(r/b)]+bk_3'[k_1+ak_2\ln(r/a)]}{ak_2k_1'+bk_1k_2'+abk_2k_2'\ln(b/a)}-$$
$$-\pi\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_n^2t}\frac{1}{F(\alpha_n)}\{k_1'\alpha_nJ_1(b\alpha_n)-k_2'J_0(b\alpha_n)\}C_0(r,\alpha_n)\times$$
$$\times[k_3\{k_1'\alpha_nJ_1(b\alpha_n)-k_2'J_0(b\alpha_n)\}-k_3'\{k_1\alpha_nJ_1(a\alpha_n)+k_2J_0(a\alpha_n)\}]. \quad (4.10)$$

*) Отметим, что мы неоднократно используем формулы $I_0(ix)=J_0(x)$ и т. д., приведенные в приложении 3 (см. (25) и (26)).

где α_n — корни уравнения (4.5), функция $F(\alpha_n)$ определена (4.9), а

$$C_0(r, \alpha_n) = J_0(r\alpha_n)[k_1\alpha_n Y_1(a\alpha_n) + k_2 Y_0(a\alpha_n)] - \\ - Y_0(r\alpha_n)[k_1\alpha_n J_1(a\alpha_n) + k_2 J_0(a\alpha_n)]. \quad (4.11)$$

Из этого общего решения можно получить целый ряд решений для частных случаев [9, 10]. Последние можно также получить непосредственным использованием изложенного метода. Предположим, например, что при $r = a$ мы имеем постоянный тепловой поток F_0, а при $r = b$ — нулевую температуру. В таком случае в граничных условиях (4.1) имеем $k_2 = k_1' = k_3' = 0$; $k_1 = 1$; $k_3 = -F_0/K$; $k_2' = 1$, и решение (4.10) принимает вид *)

$$v = \frac{aF_0}{K}\ln\frac{b}{r} + \frac{\pi F_0}{K}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\frac{J_0^2(b\alpha_n)\left[J_0(r\alpha_n)Y_1(a\alpha_n) - Y_0(r\alpha_n)J_1(a\alpha_1)\right]}{\alpha_n\left[J_1^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)\right]}, \quad (4.12)$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$J_1(a\alpha)Y_0(b\alpha) - Y_1(a\alpha)J_0(b\alpha) = 0. \quad (4.13)$$

Более сложные задачи, например задачи, приведенные в § 9 гл. I с граничными условиями, соответствующими контакту с хорошо перемешиваемой жидкостью или идеальным проводником на одной или обеих поверхностях **), могут рассматриваться точно таким же образом. Случай периодического изменения температуры поверхности рассмотрен в [13]. Задача о выделении тепла в изолированной проволоке, по которой протекает электрический ток [14], по существу представляет собой задачу для цилиндра с конечными размерами, но, кроме того, при ее рассмотрении можно пользоваться различными приближенными решениями, полученными из анализа теплового потока в полом цилиндре.

Несколько значений корней уравнения (4.5) для случая $k = k_1' = 0$ приведено в приложении 4. Корни этого уравнения для случая $k_2 = k_1' = 0$, т. е. корни уравнения (4.13), приведены в [15]. Задача при $k_2 = 0$ также была решена численным методом ***).

§ 5. Область ограничена изнутри цилиндром кругового сечения $r = a$

Несмотря на несомненную важность этого случая в связи с задачами о распространении тепла от проложенных в земле кабелей и труб, об охлаждении шахт и т. д., области такой формы изучаются сравнительно недавно. Николсон [18] первым предложил решение (5.6), однако его аргументацию нельзя считать безупречной. Титчмарш использовал интеграл Фурье; Смит [19] применил метод контурных интегралов, изложенный в книге [20]. Ряд решений, для получения которых использовались операционный метод и метод преобразования Лапласа, можно найти в работах Гольдштейна [1] и Карслоу и Егера [7]. Некоторые численные результаты опубликованы Егером [21, 22].

I. *Начальная температура равна нулю. Поверхность $r = a$ находится при постоянной температуре V.*

*) Фишер [11] использовал это решение для определения теплопроводности.

**) Решение для этого случая приведено в [5]. В некоторых экспериментальных установках возникают случаи аналогичного типа (см., например, [12]).

***) Корни уравнения (4.5) для этого случая сведены в таблицу в [16]. Несколько численных значений температуры дано в [17].

Для такого случая вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{v}}{dr}-q^2\bar{v}=0, \qquad r>a. \tag{5.1}$$

Его нужно решить при условиях, что $\bar{v}$ имеет конечное значение при $r\to\infty$ и, кроме того,

$$\bar{v}=V/p, \qquad r=a. \tag{5.2}$$

Решение имеет вид

$$\bar{v}=\frac{VK_0(qr)}{pK_0(qa)}. \tag{5.3}$$

Далее, используя теорему обращения, получим

$$v=\frac{V}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\frac{K_0(\mu r)\,d\lambda}{K_0(\mu r)\,\lambda}, \tag{5.4}$$

где $\mu=\sqrt{\lambda/\varkappa}$. Подынтегральная функция в соотношении (5.4) имеет при $\lambda=0$ точку ветвления, и поэтому следует воспользоваться контуром, показанным на рис. 40; известно (см. § 15,7 книги [3]), что в этом контуре нулей функции $K_0(\mu a)$ нет, и поэтому интеграл в соотношении (5.4) можно заменить суммой интегралов по CD, EF и по небольшой окружности с центром в начале координат.

Интеграл по небольшой окружности дает в пределе (при стремлении ее радиуса к нулю) $2\pi i$.

На линии EF мы принимаем $\lambda=\varkappa u^2e^{i\pi}$; тогда

$$2\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa u^2t}\frac{K_0\left(rue^{\frac{1}{2}\pi i}\right)}{K_0\left(aue^{\frac{1}{2}\pi i}\right)}\frac{du}{u}=2\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa u^2t}\frac{J_0(ur)-iY_0(ur)}{J_0(ua)-iY_0(ua)}\frac{du}{u}, \tag{5.5}$$

так как

$$K_0\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right)=-\frac{1}{2}\pi iH_0^{(2)}(z)=-\frac{1}{2}\pi i\,[J_0(z)-iY_0(z)].$$

Интеграл по CD дает выражение, сопряженное с (5.5), с отрицательным знаком. Объединяя эти результаты, окончательно получим

$$v=V+\frac{2V}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa u^2t}\frac{J_0(ur)\,Y_0(ua)-Y_0(ur)\,J_0(ua)}{J_0^2(au)+Y_0^2(au)}\frac{du}{u}. \tag{5.6}$$

При небольших значениях времени мы поступаем так же, как и в § 3 данной главы, используя асимптотические разложения функций Бесселя в решении (5.3), и получаем

$$\bar{v}=\frac{V}{p}\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}e^{-q(r-a)}\left\{1+\frac{r-a}{8arq}+\frac{(9a^2-2ar-7r^2)}{128a^2r^2q^2}\ldots\right\}.$$

Тогда из (11) приложения 5 находим

$$v=\frac{Va^{1/2}}{r^{1/2}}\Phi^*\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)+\frac{V(r-a)(\varkappa t)^{1/2}}{4a^{1/2}r^{3/2}}\,\mathrm{i}\Phi^*\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)+$$
$$+\frac{V(9a^2-2ar-7r^2)\varkappa t}{32a^{3/2}r^{5/2}}\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)+\ldots \tag{5.7}$$

На рис. 41 показаны графики зависимости температуры от r для различных значений времени *).

Наибольший практический интерес имеет величина теплового потока на поверхности, т. е.

$$f = -K\left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]_{r=a} = \frac{4VK}{a\pi^2}\int_0^\infty e^{-\varkappa u^2 t}\frac{du}{u\left[J_0^2(au)+Y_0^2(au)\right]}. \tag{5.8}$$

Вводя обозначение $T = \varkappa t/a^2$, получим, что тепловой поток f на поверхности определяется также соотношением

$$f = \frac{KV}{a}\left\{(\pi T)^{-1/2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(T/\pi)^{1/2} + \frac{1}{8}T \ldots\right\} \tag{5.9}$$

для небольших значений T и соотношением

$$f = \frac{2VK}{a}\left\{\frac{1}{\ln(4T) - 2\gamma} - \frac{\gamma}{[\ln(4T) - 2\gamma]^2} - \ldots\right\} \tag{5.10}$$

для больших значений T. В соотношении (5.10) $\gamma = 0{,}57722\ldots$ — постоянная Эйлера.

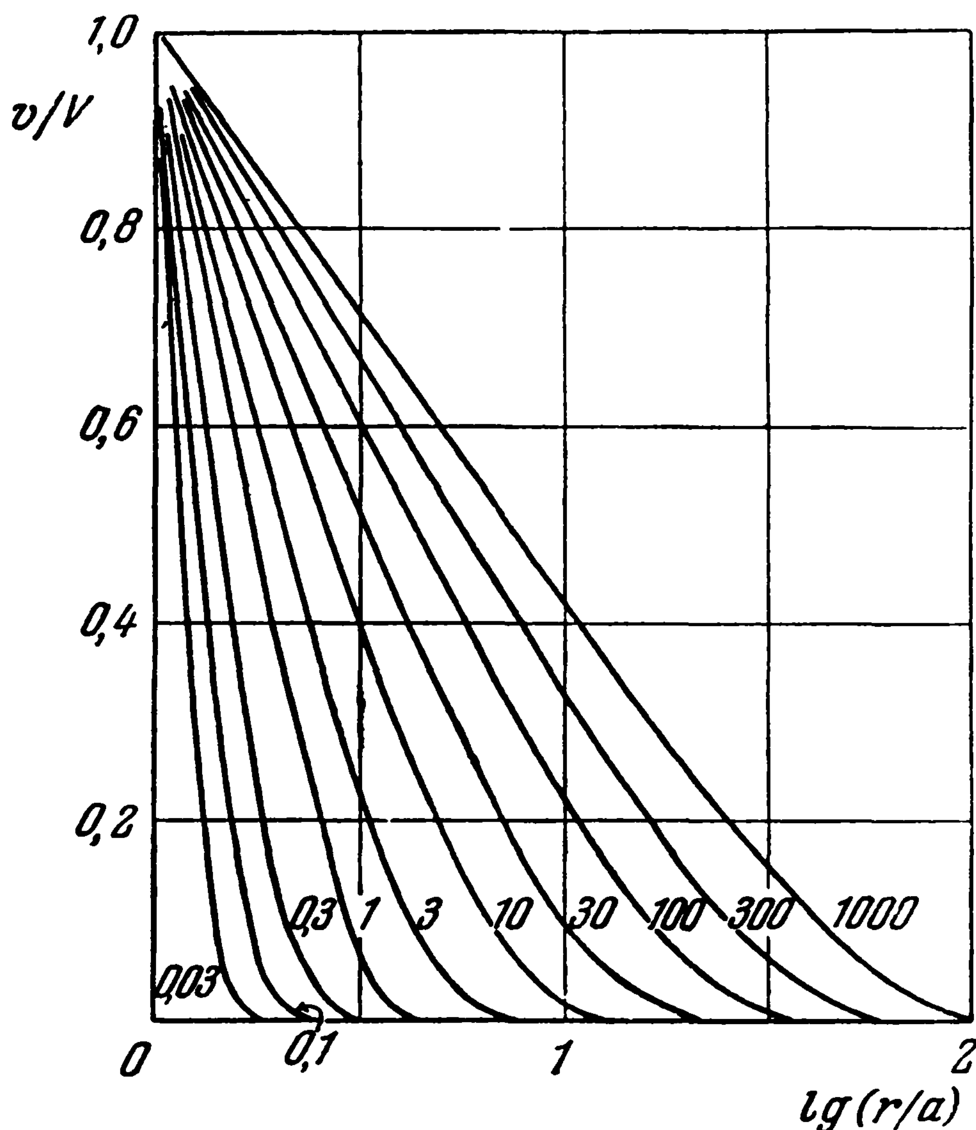


Рис. 41. Распределение температуры в области, ограниченной изнутри цилиндром $r = a$; начальная температура равна нулю, а температура поверхности равна постоянной V.

Числа у кривых указывают значения $\varkappa t/a^2$.

Численные значения интеграла (5.8) сведены Егером и Кларком [22] в таблицу. Графически он представлен рис. 42.

II. *Начальная температура V постоянна. На поверхности $r = 0$ происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру.*

Вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{v}}{dr} - q^2\bar{v} = -\frac{V}{\varkappa}, \tag{5.11}$$

а граничное условие записывается следующим образом:

$$\frac{d\bar{v}}{dr} = h\bar{v} \quad \text{при} \quad r = a. \tag{5.12}$$

---

*) Наиболее полные сведения опубликованы Егером [23], который приводит результаты с точностью до трех десятичных знаков для $(r/a) = 1$, (0,1), 2, (1), 10, (10), 100 и $\varkappa t/a^2 = 0{,}001$, (0,001), 0,01, (0,01), 0,1 (0,1), 1, (1), 10, (10), 100, (100), 1000. Более точная таблица с точностью до 5 десятичных знаков для $(r/a) = 1$, (1), 10 и $\varkappa t/a^2 = 0{,}1$, (0,1), 1, (1), 10 приведена в [24]. Перри и Бергрен [25] провели широкое исследование теплопроводности в цилиндрических областях. В процессе анализа они использовали некоторое количество численных величин, полученных по методу Шмидта. Гольденберг [26] привел результаты для $(r/a) = 2$, 10, 100 и данные о суммарном тепловом потоке.

Тогда

$$\bar{v} = \frac{V}{p}\left\{1 + \frac{hK_0(qr)}{qK_0'(qa) - hK_0(qa)}\right\} \tag{5.13}$$

и

$$v = V + \frac{hV}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t}\frac{K_0(\mu r)\,d\lambda}{\lambda\left[\mu K_0'(\mu a) - hK_0(\mu a)\right]}. \tag{5.14}$$

Подынтегральная функция имеет при $\lambda = 0$ точку ветвления, и поэтому мы используем контур, показанный на рис. 40. На этом контуре или внутри

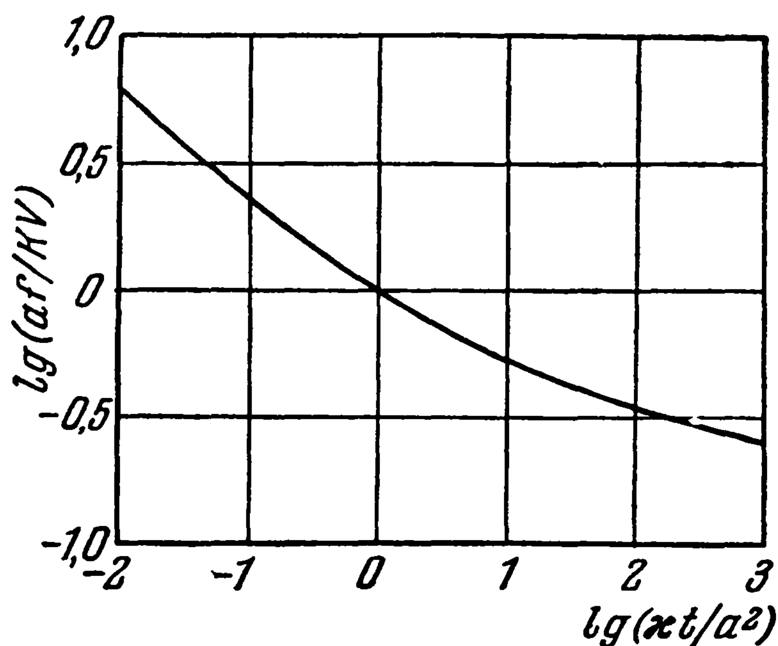


Рис. 42. Тепловой поток f на поверхности области, ограниченной изнутри цилиндром $r = a$; начальная температура равна нулю, а температура поверхности равна постоянной V.

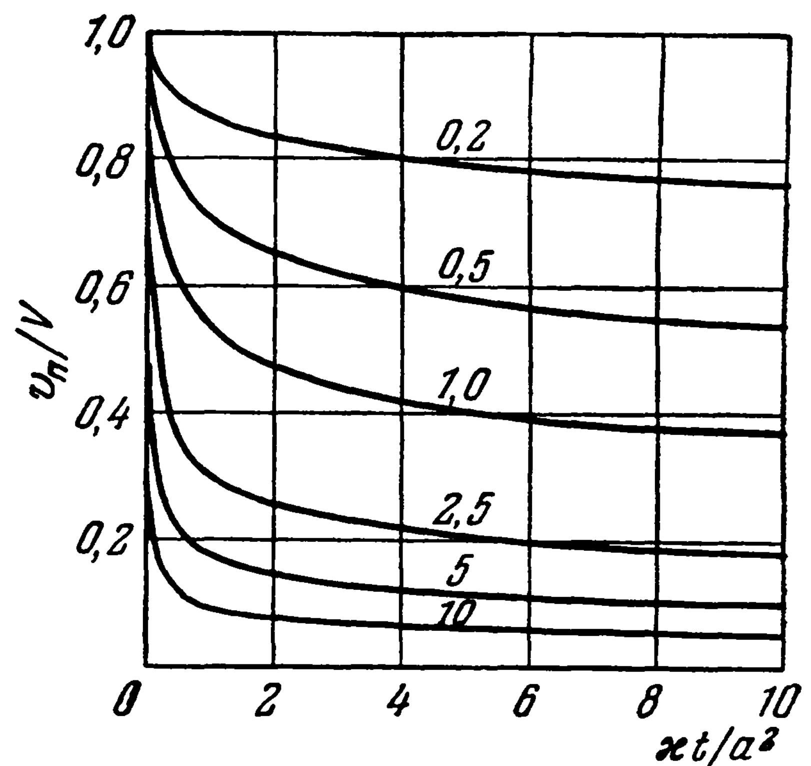


Рис. 43. Распределение температуры поверхности $v_п$ в области, ограниченной изнутри цилиндром $r = a$; начальная температура равна постоянной V, а на поверхности происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру.

Числа у кривых указывают значения ah.

него полюсов нет [7,27]. Поступая далее так же, как и в предыдущем примере, получим

$$v = -\frac{2hV}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\varkappa u^2 t}\left[\frac{J_0(ur)\left[uY_1(ua) + hY_0(ua)\right] - Y_0(ur)\left[uJ_1(ua) + hJ_0(ua)\right]}{\left[uJ_1(ua) + hJ_0(ua)\right]^2 + \left[uY_1(ua) + hY_0(ua)\right]^2}\right]\frac{du}{u}. \tag{5.15}$$

Графики температуры поверхности для величин $ah = 0{,}2,\ 0{,}5,\ 1,\ 2{,}5,\ 5$ и 10 показаны на рис. 43.

III. *Нулевая начальная температура. Тепловой поток на поверхности $r = a$ постоянен и равен Q.*

В данном случае решение имеет вид *)

$$\bar{v} = \frac{QK_0(qr)}{KpqK_1(qa)} \tag{5.16}$$

---

*) Здесь можно применить контур, изображенный на рис. 40, однако искомый интеграл (3.8) гл. XII есть интеграл по разрезу (см. (6.2) и (6.6) данной главы). Формула (5.17) получена применением к выражению для $p\bar{v}$ обычного метода с дальнейшим использованием теоремы (2.4) гл. XII.

и

$$v = -\frac{2Q}{\pi K}\int_0^\infty (1 - e^{-\varkappa u^2 t})\frac{J_0(ur)Y_1(ua) - Y_0(ur)J_1(ua)}{u^2[J_1^2(ua) + Y_1^2(ua)]}du. \qquad (5.17)$$

Решение, пригодное для небольших значений $\varkappa t/a^2$, имеет вид

$$v = \frac{2Q}{K}\left(\frac{\varkappa at}{r}\right)^{1/2}\left\{\mathrm{i}\Phi^*\left[\frac{r-a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] - \frac{(3r+a)(\varkappa t)^{1/2}}{4ar}\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left[\frac{r-a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] + \ldots\right\}. \qquad (5.18)$$

Отсюда, привлекая метод, излагаемый в следующем параграфе, находим, что при больших значениях времени можно написать

$$v = \frac{Qa}{2K}\ln\frac{4\varkappa t}{Cr^2} + O\left(\frac{a^2}{\varkappa t}\right), \qquad (5.19)$$

где $\ln C = \gamma$, а $\gamma = 0{,}57722\ldots$ — постоянная Эйлера. Соотношение (5.19) аналогично также соотношению (4.6) гл. X для линейного источника, выделяющего на единицу длины в единицу времени количество тепла, равное $2\pi aQ$.

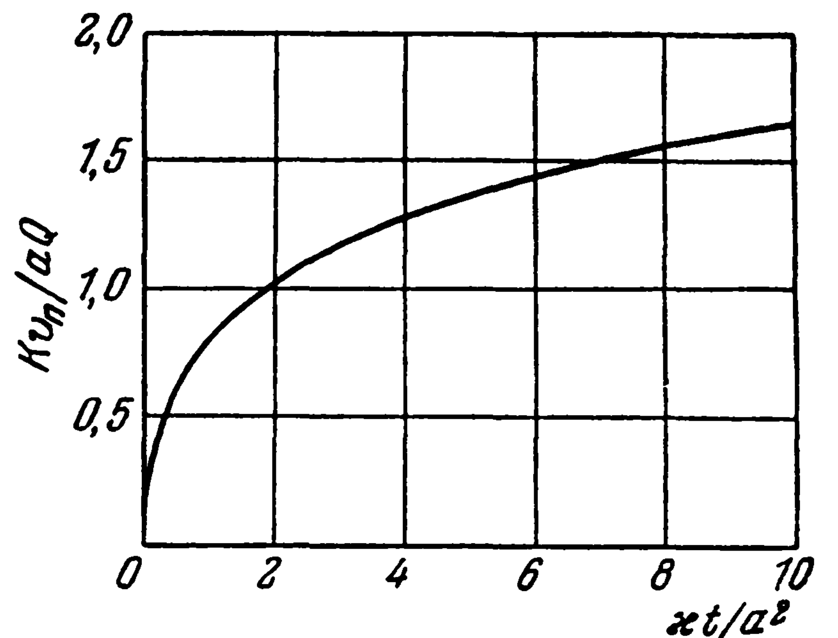


Рис. 44. Распределение температур поверхности $v_п$ в области, ограниченной изнутри цилиндром $r = a$; начальная температура равна нулю, тепловой поток на поверхности равен постоянной величине Q.

Некоторые значения температуры поверхности приведены на рис. 44 *).

IV. *Нулевая начальная температура. Температура поверхности меняется по закону* $\sin(\omega t + \varepsilon)$.

$$v = \frac{N_0(\omega' r)}{N_0(\omega' a)}\sin\{\omega t + \varepsilon + \varphi_0(\omega' r) - \varphi_0(\omega' a)\} - \frac{2\varkappa}{\pi}\int_0^\infty e^{-\varkappa u^2 t}\frac{[J_0(ur)Y_0(ua) - J_0(ua)Y_0(ur)][\omega\cos\varepsilon - \varkappa u^2\sin\varepsilon)u\,du}{[J_0^2(ua) + Y_0^2(ua)](\omega^2 + \varkappa^2u^4)}, \qquad (5.20)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega/\varkappa}$, а $K_0(ze^{i\pi/4}) = \mathrm{ker}\,z + i\,\mathrm{kei}\,z = N_0(z)\,e^{i\varphi_0(z)}$.

V. *Области* $z > 0$, $r > a$ *и* $0 < z < l$, $r > a$ *с начальной температурой, равной единице. Решения в виде произведения* **).

Очевидно, что решения для этих областей можно получить так же, как и в § 4 гл. VIII, воспользовавшись методом, описанным в § 15 гл. I. Таким образом, для области $z > 0$, $r > a$ с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой поверхности решение будет иметь вид

$$v = -\frac{2}{\pi}\Phi\left[\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}}\right]\int_0^\infty e^{-\varkappa u^2 t}\frac{J_0(ur)Y_0(ua) - Y_0(ur)J_0(ua)}{J_0^2(au) + Y_0^2(au)}\frac{du}{u}. \qquad (5.21)$$

Численные значения искомой температуры можно найти из рис. 41.

---

*) Другие значения температуры, а также некоторые результаты при $r/a = 2$; 5 и 10 приведены в [28]. Там проводится также тщательное сравнение решений этого типа с решениями, полученными для непрерывного линейного источника в неограниченной области.

**) Другие задачи для области $r > 0$, в которых рассматривается нерадиальный тепловой поток, обсуждаются в [29].

§ 6. Решения, применимые при больших значениях времени

В задачах для ограниченных областей решения обычно получаются в виде рядов, которые сходятся тем быстрее, чем больше величина t. Вместе с тем решения задач для неограниченных областей обычно принимают следующую форму:

$$v = \int_0^\infty e^{-u^2 T} f(u)\, du, \tag{6.1}$$

где T — параметр (например, $\varkappa t/a^2$), и при больших значениях T такие решения, пожалуй, еще труднее для оценки. Обычно оказывается важным знать приближенные решения при больших значениях T. Эти решения можно получить, воспользовавшись интегралом (6.1), но для многих практических задач проще применить метод, излагаемый ниже *). Если $\bar{v}(p)$ есть изображение решения v, то это решение можно найти, воспользовавшись теоремой обращения

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \bar{v}(\lambda)\, d\lambda. \tag{6.2}$$

В задачах рассматриваемого класса $\bar{v}(\lambda)$ имеет точку ветвления в начале координат и первый шаг при оценке величины v состоит в преобразовании контура $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, по которому интегрируют в (6.2), в контур $CDEF$, изображенный на рис. 40; последний начинается в $-\infty$ на нижней полуплоскости, один раз огибает в положительном направлении точку ветвления в начале координат и заканчивается в $-\infty$ на верхней полуплоскости. Поэтому такой контур можно обозначить символом $(-\infty, 0+)$. Тогда (6.2) запишется в виде

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\lambda t} \bar{v}(\lambda)\, d\lambda. \tag{6.3}$$

Во всех рассмотренных задачах это преобразование оказывается вполне законным; иными словами, можно показать, что интегралы по дугам $AA'C$ и $FB'B$ большой окружности на рис. 40 стремятся к нулю, когда радиус этой окружности стремится к бесконечности. При записи в явном виде выражения для $\bar{v}(\lambda)$ вдоль пути $CDEF$ контурный интеграл (6.3) сводится к действительному интегралу с бесконечным пределом (6.1). Чтобы найти решения, применимые при больших значениях времени, мы исходим из соотношения (6.3), разлагаем $\bar{v}(\lambda)$ по возрастающим степеням λ и интегрируем этот ряд почленно, предполагая, что последний процесс может быть обоснован. Типичные интегралы, которые нам потребуются в дальнейшем, записываются следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \lambda^{-\nu-1} e^{\lambda t}\, d\lambda = \frac{t^\nu}{\Gamma(1+\nu)}; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \lambda^n e^{\lambda t}\, d\lambda = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{6.4}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \ln(k\lambda)\, d\lambda = -\ln(Ct/k); \tag{6.5}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\lambda t} [\ln(k\lambda)]^2\, d\lambda = \frac{2}{t} \ln(Ct/k); \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\lambda t} [\ln(k\lambda)]^3\, d\lambda = \frac{\pi^2}{2t} - \frac{3}{t} [\ln(Ct/k)]^2. \tag{6.7}$$

---

*) Здесь мы имеем в виду один из основных методов операционного исчисления Хевисайда (см. [30]); контуры интегралов (6.2) и (6.3) являются в обозначениях Мак-Лахлана Br_1 и Br_2 контурами. Гольдштейн [1] применил этот метод для решения целого ряда задач в цилиндрических координатах.

Здесь $\ln C = \gamma = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера, k предполагается действительной и положительной величиной, а ν — любая комплексная величина, причем $\nu \neq -n$. В написанных выше соотношениях (6.4) вытекает из определения гамма-функции, (6.5) — из изображения $\ln t$, а (6.6) и (6.7) можно получить обычным методом, используя путь интегрирования $CDEF$. Другие необходимые формулы получаются путем дифференцирования по t, как по параметру. Тогда из (6.5) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{\lambda t}\ln(k\lambda)\,d\lambda = -1/t, \tag{6.8}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{\lambda t}\lambda^{n}\ln(k\lambda)\,d\lambda = \frac{(-1)^{n+1}n!}{t^{n+1}} \tag{6.9}$$

и т. д.

В качестве примера рассмотрим *область $r > a$, в которой тепловой поток постоянен и равен Q.*

Воспользовавшись соотношением (5.16) предыдущего параграфа, соотношениями (9), (10) приложения 3 и положив $\mu = (\lambda/\varkappa)^{1/2}$, получим

$$v = \frac{Q}{2\pi iK}\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^{\lambda t}K_0(\mu r)\,d\lambda}{\lambda\mu K_1(\mu a)} =$$

$$= -\frac{Qa}{2\pi iK}\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^{\lambda t}\left\{\ln\left(\frac{1}{2}Cr\mu\right)+\frac{1}{4}r^2\mu^2\left[\ln\left(\frac{1}{2}C\mu r\right)-1\right]+\ldots\right\}d\lambda}{\lambda\left\{1+\frac{1}{2}\mu^2a^2\left[\ln\left(\frac{1}{2}C\mu a\right)-\frac{1}{2}\right]+\ldots\right\}} =$$

$$= -\frac{Qa}{2\pi ik}\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left\{\ln\left(\frac{1}{2}Cr\mu\right)+\frac{1}{4}r^2\mu^2\left[\ln\left(\frac{1}{2}Cr\mu\right)-1\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\mu^2a^2\ln\left(\frac{1}{2}Cr\mu\right)\left[\ln\left(\frac{1}{2}Cr\mu\right)+\ln\left(\frac{a}{r}\right)-\frac{1}{2}\right]+\ldots\right\}d\lambda =$$

$$= -\frac{Qa}{2\pi iK}\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{C^2r^2\lambda}{4\varkappa}\right)+\frac{r^2\lambda}{8\varkappa}\ln\left(\frac{C^2r^2\lambda}{4\varkappa}\right)-\frac{r^2\lambda}{4\varkappa}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda a^2}{8\varkappa}\left[\ln\left(\frac{C^2r^2\lambda}{4\varkappa}\right)\right]^2-\frac{\lambda a^2}{4\varkappa}\left\{\ln\left(\frac{a}{r}\right)-\frac{1}{2}\right\}\ln\left(\frac{C^2r^2\lambda}{4\varkappa}\right)+\ldots\right\}d\lambda, \tag{6.10}$$

где, как и выше, $\ln C = \gamma = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

Пользуясь (6.4) — (6.6) и (6.8), получим

$$v = \frac{Qa}{2K}\left\{\ln\frac{4\varkappa t}{Cr^2}+\frac{a^2}{2\varkappa t}\ln\frac{4\varkappa t}{Cr^2}+\frac{1}{4\varkappa t}\left[a^2+r^2-2a^2\ln\frac{a}{r}\right]+\ldots\right\}. \tag{6.11}$$

Таким же путем можно получить решение (7.18) и аналогичные решения для всех задач, рассмотренных в § 7 данной главы. Дополнительные теоретические соображения, необходимые для получения соотношений (5.3) и (5.13) данной главы, развиты в статье [31].

§ 7. Область $r > a$, ограниченная изнутри круговым цилиндром из идеального проводника

Во многих задачах, имеющих практическое значение, например в задачах о нагреве подземных электрических кабелей, а также при измерении теплопроводности методом «зонда» металлический цилиндр окружен неограниченной средой (такой, как почва или горная порода) со значительно меньшей теплопроводностью. С хорошим приближением металл может рассматриваться как

идеальный проводник тепла — влияние конечности коэффициента теплопроводности можно оценить из более сложных результатов, приведенных в § 8 данной главы. В большинстве задач наиболее интересным оказывается вопрос о температуре материала внутри цилиндра. Последний либо имеет вначале температуру, равную единице (область вне цилиндра имеет температуру, равную нулю), либо в единицу времени к нему подводится постоянное количество тепла. Аналогичные задачи возникают в тех случаях, когда область $r < a$ содержит хорошо перемешиваемую жидкость.

Во многих практических задачах между цилиндром и окружающей средой имеется контактное сопротивление. Такие задачи будут рассмотрены ниже (см. примеры III и IV данного параграфа). Однако в первую очередь мы обсудим более простой случай, когда контактное сопротивление отсутствует.

I. *Область $r > a$ имеет в начальный момент времени температуру, равную нулю. На границе $r = a$ эта область соприкасается с идеальным проводником в виде цилиндра, обладающим теплоемкостью S (на единицу длины цилиндра). Начальная температура проводника равна V_0. На границе $r = a$ контактное сопротивление отсутствует* *).

Обозначая температуру в области $r > a$ через v, получим, как и в примере V § 2 данной главы,

$$\bar{v} = \frac{aV_0K_0(qr)}{\varkappa q\,[aqK_0(aq) + \alpha K_1(aq)]}, \tag{7.1}$$

где

$$\alpha = 2\pi a^2\rho c/S \tag{7.2}$$

является параметром, равным удвоенному отношению теплоемкости эквивалентного объема среды к теплоемкости идеального проводника. Отсюда следует, что

$$v = \frac{2V_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-\varkappa t u^2/a^2}\{J_0(ru/a)\,[uY_0(u) - \alpha Y_1(u)] - \\ - Y_0(ur/a)\,[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]\}\frac{du}{\Delta(u)}, \tag{7.3}$$

где

$$\Delta(u) = [uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)]^2. \tag{7.4}$$

Температура V в области $r < a$, равная значению (7.3) при $r = a$, записывается в виде

$$V = \frac{4\alpha V_0}{\pi^2}\int_0^\infty e^{-\varkappa t u^2/a^2}\frac{du}{(u)\,\Delta u}. \tag{7.5}$$

График зависимости V от $\varkappa t/a^2$ для различных значений α изображен на рис. 45.

II. *Та же задача, но цилиндр имеет нулевую начальную температуру и при $t > 0$ в него поступает количество тепла, равное в единицу времени на единицу длины величине Q.*

---

*) Небольшая таблица интегралов (7.3) приведена в [32, 33].

Тогда

$$\bar{v} = \frac{aQK_0(qr)}{\varkappa Spq\,[aqK_0(aq) + \alpha K_1(aq)]}, \tag{7.6}$$

$$v = \frac{2Qa^2}{\pi\varkappa S}\int_0^\infty (1 - e^{-\varkappa u^2 t/a^2})\,\{J_0(ur/a)\,[uY_0(u) - \alpha Y_1(u)] - \\ - Y_0(ur/a)\,[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]\}\,\frac{du}{u^2\Delta(u)}, \tag{7.7}$$

где α и $\Delta(u)$ определены соответственно выражениями (7.2) и (7.4). При нахождении решения (7.7) из (7.6) следует использовать метод, приводящий

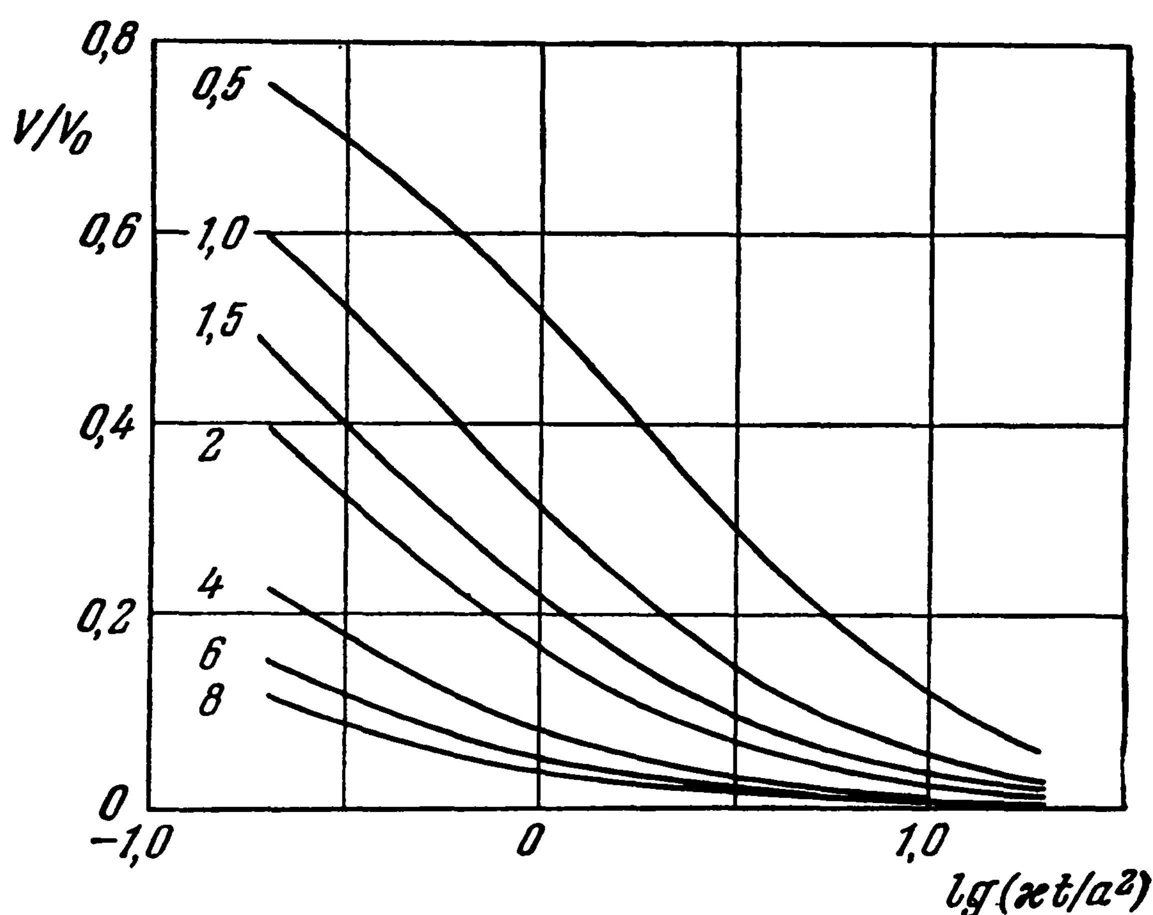


Рис. 45. Распределение температуры в цилиндре из идеального проводника; в начальный момент времени его температура равна V_0; температура неограниченной среды, в которой он находится, равна нулю.

Числа у кривых указывают значения параметра α.

к решению (5.17) данной главы. Температура V в цилиндре, представляющая собой значение (7.7) при $r = a$, равна

$$V = \frac{2Q\alpha^2}{\pi^3 K}\int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\varkappa t u^2/a^2})\,du}{u^3\Delta(u)}. \tag{7.8}$$

На рис. 46 построен график зависимости V от $\varkappa t/a^2$ для различных значений α.

III. *Нагревание электрического кабеля, проложенного в земле.*

Электрический кабель состоит из трех основных частей: *сердечника*, по которому течет ток, *изоляции*, отделяющей сердечник от защитной металлической оболочки, и этой *оболочки*. Поэтому в простейшей идеализированной схеме кабеля *) сердечник и оболочка должны считаться идеальными проводниками с теплоемкостями соответственно S_1 и S_2 на единицу длины кабеля. Теплоемкость изоляции должна считаться равной нулю, а ее термическое сопротивление на единицу длины кабеля

*) Достаточно полное рассмотрение этого вопроса с технической точки зрения можно найти в работе [34]. В статье [35] дано несколько приближенных решений для случая нагрева при коротком замыкании (что соответствует решению задачи I). В рамках современных представлений этот вопрос рассмотрен в [33, 36, 37].

равным R. Пусть внешний радиус оболочки равен a, причем кабель проложен в почве, с термическими коэффициентами K, $\varkappa$, ρ и c. Кроме того, мы пренебрегаем контактным сопротивлением между оболочкой и почвой.

Практический интерес имеют две задачи: 1) нагревание установившимся током, проходящим по сердечнику, и 2) нагревание током короткого замыкания, при котором температура сердечника внезапно возрастает на конечную величину; в последнем случае требуется исследовать, каким путем это тепло рассеивается.

Нагревание током короткого замыкания. Если в начальный момент времени температура сердечника равна V_0, а соответствующая начальная температура оболочки и окружающей среды равна нулю, то температура V в сердечнике в момент времени t будет равна

$$V = V_0 F(h, \alpha_1, \alpha_2, \tau), \tag{7.9}$$

где

$$h = 2\pi RK, \quad \alpha_1 = 2\pi a^2 \rho c/S_1, \quad \alpha_2 = 2\pi a^2 \rho c/S_2, \quad \tau = \varkappa t/a^2, \tag{7.10}$$

и

$$F(h, \alpha_1, \alpha_2, \tau) = \frac{4\alpha_1\alpha_2^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-u^2\tau)\,du}{u\Delta_1(u)}, \tag{7.11}$$

а

$$\Delta_1(u) = [u(\alpha_1 + \alpha_2 - hu^2) J_0(u) - \alpha_2(\alpha_1 - hu^2) J_1(u)]^2 + [u(\alpha_1 + \alpha_2 - hu^2) Y_0(u) - \alpha_2(\alpha_1 - hu^2) Y_1(u)]^2. \tag{7.12}$$

Рис. 46. Распределение температуры V в цилиндре из идеального проводника, окруженном неограниченной средой, при наличии поверхностных источников постоянной мощности.

Числа у кривых указывают значения параметра α.

Нагревание обычным током. Если в начальный момент времени вся система находится при нулевой температуре и количество тепла, выделяемого в сердечнике на единицу длины в единицу времени, равно Q, то температура в сердечнике в момент времени t будет равна

$$V = (Q/K)\, G(h, \alpha_1, \alpha_2, \tau), \tag{7.13}$$

где

$$G(h, \alpha_1, \alpha_2, \tau) = \frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^3} \int_0^\infty \frac{[1 - \exp(-u^2\tau)]\,du}{u^3\Delta_1(u)}; \tag{7.14}$$

определение остальных символов приведено в (7.10) и (7.12).

Мы не располагаем таблицами интегралов (7.11) и (7.14), но Егер [33] приводит графики $F(1, \alpha, \infty, \tau)$, $F(2, \alpha, \infty, \tau)$, $G(1, \alpha, \infty, \tau)$ и $G(2, \alpha, \infty, \tau)$, которые соответствуют кабелю без оболочки.

Если кабель окружен не бесконечной средой, а погружен на глубину a, считая от поверхности земли, то на равном расстоянии над землей должно быть помещено его «изображение». Этому изображению будет соответствовать непрерывный постоянный линейный источник (см. соотношение (4.7) гл. X).

IV. *Определение теплопроводности методом «зонда».*

Пусть цилиндр из идеального проводника радиуса a окружен неограниченной средой и при $t > 0$ в нем выделяется количество тепла, равное на единицу длины в единицу времени Q, причем начальная температура всей системы равна нулю; тогда температура V идеального проводника в момент времени t при наличии контактного сопротивления R (на единицу длины) между цилиндром и окружающей средой, будет, в соответствии с (7.13), равна

$$V = (Q/K)\, G(h, \alpha_1, \infty, \tau). \tag{7.15}$$

Отсюда, как и в § 3 данной главы, следует, что для небольших значений τ

$$V=\frac{Q\alpha_1}{2\pi K}\left\{\tau-\frac{\alpha_1\tau^2}{2h}+O(\tau^{5/2})\right\},\quad \text{если}\quad h\neq 0, \tag{7.16}$$

или

$$V=\frac{Q\alpha_1}{2\pi K}\left\{\tau-\frac{4\alpha_1}{3\pi^{1/2}}\tau^{3/2}+O(\tau^2)\right\},\quad \text{если}\quad h=0. \tag{7.17}$$

Для больших значений времени τ (как и в предыдущем параграфе) можем написать

$$V=\frac{Q}{4\pi K}\left\{2h+\ln\frac{4\tau}{C}-\frac{(4h-\alpha_1)}{2\alpha_1\tau}+\frac{\alpha_1-2}{2\alpha_1\tau}\ln\frac{4\tau}{C}+\ldots\right\}, \tag{7.18}$$

где $C=1{,}7811=\exp\gamma$ ($\gamma=0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера).

Из соотношения (7.18) следует, что во всех случаях кривая зависимости V от $\ln t$ имеет прямолинейную асимптоту с угловым коэффициентом, равным Q/K. Поэтому, если известно Q, то можно сразу же определить K. Если $\varkappa=0{,}01$ и $a=0{,}1$, то к концу промежутка времени 10 *мин* $\tau=\varkappa t/a^2$ будет равняться 600, и следовательно, в этом случае быстро получается асимптота. Вместе с тем, если $a=1$, то $\tau=\varkappa t/a^2$ равно 6 и время, необходимое для достижения асимптотического значения, оказывается существенно большим.

Методы зонда [38—41] *) очень удобны при измерении теплопроводности гранулированных материалов, почв и горных пород. В последнем случае зонд следует помещать в отверстие, просверленное в горной породе, и поэтому можно ожидать, что его радиус должен иметь порядок 1 *см*, и ввиду наличия воздушного зазора между зондом и породой термическое сопротивление окажется довольно значительным. Блэкуэлл [29, 42] подробно рассмотрел этот случай и указал на то, что, воспользовавшись соотношениями (7.16) и (7.18), можно из экспериментальных данных определить все три параметра R, $\varkappa$ и K.

§ 8. Составная цилиндрическая область

Задачи теплопроводности в случае составных или пустотелых цилиндров кругового сечения легко решаются при помощи преобразования Лапласа, но получаемые решения оказываются довольно сложными [43—48] **). Здесь мы рассмотрим два случая неограниченных составных областей.

I. *Область* $0\leqslant r<a$ *(в цилиндрических координатах) содержит материал с термическими коэффициентами* K_1, $\varkappa_1$ *и т. д., а область* $r>a$ *— материал с термическими коэффициентами* K_2, $\varkappa_2$ *и т. д. Начальная температура* V *в области* $0\leqslant r<a$ *постоянна, а в области* $r>a$ *— равна нулю.*

Обозначим через v_1 и v_2 температуры в обеих областях и запишем вспомогательные уравнения

$$\frac{d^2\bar v_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar v_1}{dr}-q_1^2\bar v_1=-\frac{V}{\varkappa_1},\quad 0\leqslant r<a, \tag{8.1}$$

$$\frac{d^2\bar v_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar v_2}{dr}-q_2^2\bar v_2=0,\quad r>a, \tag{8.2}$$

где $q_1=\sqrt{p/\varkappa_1}$ и $q_2=\sqrt{p/\varkappa_2}$.

Если принять, что на поверхности $r=0$ контактное сопротивление отсутствует (ср. пример Ж § 9 гл. I), то граничные условия запишутся в виде

$$\bar v_1=\bar v_2\quad\text{и}\quad K_1\frac{d\bar v_1}{dr}=K_2\frac{d\bar v_2}{dr},\quad\text{когда}\quad r=a. \tag{8.3}$$

*) Влияние конечной длины нагреваемого зонда рассмотрено в [29] и [42]; в них был сделан вывод, что длина зонда должна составлять по крайней мере 25—30 его диаметров.

**) В статье [49] приведены функции Грина для неограниченных составных областей.

Решения следует находить из условий, что при $r=0$ $\bar{v}_1$ имеет конечное значение, а при $r\to\infty$ величина $\bar{v}_2$ ограничена. Искомые решения имеют вид

$$\bar{v}_1=\frac{V}{p}-\frac{VK_2\varkappa_1^{1/2}}{p\Delta}K_1(q_2a)I_0(q_1r), \tag{8.4}$$

$$\bar{v}_2=\frac{VK_1\varkappa_2^{1/2}I_1(q_1a)K_0(q_2r)}{p\Delta}, \tag{8.5}$$

где

$$\Delta=K_2\varkappa_1^{1/2}I_0(q_1a)K_1(q_2a)+K_1\varkappa_2^{1/2}I_1(q_1a)K_0(q_2a). \tag{8.6}$$

Тогда, используя теорему обращения и контур, показанный на рис. 40, окончательно получим

$$v_1=\frac{4VK_1K_2\varkappa_2}{\pi^2a}\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa_1u^2t}\frac{J_0(ur)J_1(ua)\,du}{u^2[\varphi^2(u)+\psi^2(u)]}, \tag{8.7}$$

$$v_2=\frac{2VK_1\varkappa_2^{1/2}}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa_1u^2t}\frac{J_1(ua)[J_0(\varkappa ur)\varphi(u)-Y_0(\varkappa ur)\psi(u)]\,du}{u[\varphi^2(u)+\psi^2(u)]}, \tag{8.8}$$

где $\varkappa=\sqrt{\varkappa_1/\varkappa_2}$ и

$$\left.\begin{aligned}\psi(u)&=K_1\varkappa_2^{1/2}J_1(au)J_0(\varkappa au)-K_2\varkappa_1^{1/2}J_0(au)J_1(\varkappa au),\\ \varphi(u)&=K_1\varkappa_2^{1/2}J_1(au)Y_0(\varkappa au)-K_2\varkappa_1^{1/2}J_0(au)Y_1(\varkappa au).\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

II. *Та же область, что и в задаче I. В обеих областях начальная температура равна нулю. При $t>0$ в области $0\leqslant r<a$ в единицу времени на единицу объема выделяется постоянное количество тепла A_0.*

В этом случае уравнение (8.1) заменяется уравнением

$$\frac{d^2\bar{v}_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{v}_1}{dr}-q_1^2\bar{v}_1=-\frac{A_0}{K_1p},\qquad 0\leqslant r<a. \tag{8.10}$$

Остальные уравнения не изменяются. Уравнения (8.4) и (8.5) заменяются на уравнения

$$\bar{v}_1=\frac{\varkappa_1A_0}{K_1p^2}-\frac{A_0K_2\varkappa_1^{3/2}}{K_1p^2\Delta}K_1(q_2a)I_0(q_1r), \tag{8.11}$$

$$\bar{v}_2=\frac{A_0\varkappa_1\varkappa_2^{1/2}I_1(q_1a)K_0(q_2r)}{p^2\Delta}. \tag{8.12}$$

Решения будут иметь вид *)

$$v_1=\frac{4A_0K_2\varkappa_2}{\pi^2a}\int\limits_0^\infty\frac{(1-e^{-\varkappa_1u^2t})J_0(ur)J_1(ua)\,du}{u^4[\varphi^2(u)+\psi^2(u)]}, \tag{8.13}$$

$$v_2=\frac{2A_0\varkappa_2^{1/2}}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{(1-e^{-\varkappa_1u^2t})J_1(ua)[J_0(\varkappa ur)\varphi(u)-Y_0(\varkappa ur)\psi(u)]\,du}{u^3[\varphi^2(u)+\psi^2(u)]}, \tag{8.14}$$

где $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ определены соотношениями (8.9).

---

*) Искомые решения получаются из (8.7) и (8.8) при помощи (2.4) гл. XII. Если к (8.11) и (8.12) применить теорему обращения, то мы получим только интеграл по $(-\infty, 0+)$ (ср. примечание на стр. 333).

Полученные выражения являются точными решениями задач, приближенные решения которых приведены в предыдущем параграфе (см. стр. 337), и поэтому они позволяют проверить в частных случаях пригодность приближений, использованных в этом параграфе.

Нетрудно записать и изображения для температур в составных цилиндрических областях, воспользовавшись для этой цели методом матриц, разработанным в § 8 гл. XII для пластин. Проводимый в данном случае анализ аналогичен анализу, выполненному в § 3 гл. VII, для установившихся температур в составных цилиндрах, причем величина $kl^{1/2}$ заменяется величиной q. Решения, пригодные для больших или малых значений времени, можно получить при помощи метода, использованного в §§ 3 и 6 данной главы.

§ 9. Шар. Радиальный тепловой поток

Напомним, что задачи с радиальным тепловым потоком в шаре сводятся подстановкой $u = vr$ к задачам с линейным потоком в стержне, а последние исследованы достаточно полно; поэтому повторять здесь необходимые расчеты нецелесообразно. Однако если требуется получить решения для шара, а соответствующие решения для стержня отсутствуют, то лучше применить преобразование Лапласа непосредственно к задаче для шара. Ниже приводятся несколько примеров.

I. *Шар* $0 \leqslant r < a$ *(в сферических координатах) с постоянной начальной температурой* V *и нулевой температурой поверхности.*

В данном случае вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\bar{v}}{dr} - q^2\bar{v} = -\frac{V}{\varkappa}, \qquad 0 \leqslant r < a, \tag{9.1}$$

или

$$\frac{d^2(r\bar{v})}{dr^2} - q^2(r\bar{v}) = -\frac{rV}{\varkappa}, \qquad 0 \leqslant r < a. \tag{9.2}$$

Его следует решать при условии

$$\bar{v} = 0, \qquad \text{когда} \qquad r = a \tag{9.3}$$

и $\bar{v}$ при $r = 0$ имеет конечное значение.

Общее решение уравнения (9.2) имеет вид

$$r\bar{v} = A\,\mathrm{sh}\,qr + B\,\mathrm{ch}\,qr + \frac{rV}{p}; \tag{9.4}$$

для того чтобы получить конечное значение $\bar{v}$ при $r \to 0$, следует принять B равным нулю. Тогда

$$\bar{v} = \frac{V}{p} - \frac{aV\,\mathrm{sh}\,qr}{rp\,\mathrm{sh}\,qa}. \tag{9.5}$$

Использование теоремы обращения дает решение примера IV § 3 гл. IX. Кроме того, поступая так же, как и в § 5 гл. XII, можно найти решение, пригодное для малых значений времени. Из соотношения (9.5) получаем

$$\bar{v} = \frac{V}{p} - \frac{aV}{rp}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{-q[(2n+1)a-r]} - e^{-q[(2n+1)a+r]}\right\},$$

и поэтому

$$v = V - \frac{aV}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\Phi^*\left[\frac{(2n+1)a-r}{2\sqrt{\varkappa t}}\right] - \Phi^*\left[\frac{(2n+1)a+r}{2\sqrt{\varkappa t}}\right]\right\}. \tag{9.6}$$

При $r=0$ оно принимает вид

$$v = V - \frac{aV}{\sqrt{\pi\varkappa t}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 a^2}{4\varkappa t}\right].$$

II. *При $t>0$ в области $0 \leqslant r < a$, находящейся в неограниченной среде с нулевой начальной температурой, в единицу времени на единицу объема выделяется постоянное количество тепла A_0* [50] *).

В данном случае, как и выше (см. (9.2)), вспомогательные уравнения записываются следующим образом:

$$\frac{d^2(r\bar{v})}{dr^2} - q^2(r\bar{v}) = -\frac{rA_0}{Kp}, \qquad 0 \leqslant r < a, \tag{9.7}$$

$$\frac{d^2(r\bar{v})}{dr^2} - q^2(r\bar{v}) = 0, \qquad r > a. \tag{9.8}$$

Решение уравнения (9.7), конечное при $r \to 0$, имеет вид

$$r\bar{v} = \frac{r\varkappa A_0}{Kp^2} + A \operatorname{sh} qr. \tag{9.9}$$

Решение уравнения (9.8), конечное при $r \to \infty$, записывается в виде

$$r\bar{v} = Be^{-qr}. \tag{9.10}$$

A и B следует находить из условия непрерывности $\bar{v}$ и $d\bar{v}/dr$ при $r=0$. Отсюда

$$A = -\frac{a\varkappa A_0}{Kp^2}\left(1+\frac{1}{qa}\right)e^{-qa}, \qquad B = \frac{a\varkappa A_0}{Kp^2}\left(\operatorname{ch} qa - \frac{1}{qa}\operatorname{sh} qa\right). \tag{9.11}$$

Температуру при $r=0$ находим из соотношений (9.9) и (9.11):

$$\bar{v}_{r=0} = \frac{\varkappa A_0}{Kp^2} - \frac{\varkappa A_0}{Kp^2}(1+qa)e^{-qa}$$

и, следовательно,

$$v_{r=0} = \frac{a^2 A_0}{2K}\left\{1 + \left(\frac{2\varkappa t}{a^2} - 1\right)\Phi\left[\frac{a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] - 2\left(\frac{\varkappa t}{\pi a^2}\right)^{1/2} e^{-a^2/4\varkappa t}\right\}. \tag{9.12}$$

Кроме того, при $0 < r < a$ имеем

$$v = \frac{\varkappa A_0 t}{K}\left\{1 - \frac{2a}{r}\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left[\frac{a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] + \frac{2a}{r}\,\mathrm{i}^2\Phi^*\left[\frac{a+r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] - \frac{4(\varkappa t)^{1/2}}{r}\,\mathrm{i}^3\Phi^*\left[\frac{a-r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{4(\varkappa t)^{1/2}}{r}\,\mathrm{i}^3\Phi^*\left[\frac{a+r}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}, \tag{9.13}$$

а при $r > a$

$$v = \frac{2\varkappa A_0 t a}{rK}\left\{\mathrm{i}^2\Phi^*\left[\frac{r-a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] + \mathrm{i}^2\Phi^*\left[\frac{r+a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] - \frac{2(\varkappa t)^{1/2}}{a}\,\mathrm{i}^3\Phi^*\left[\frac{r-a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{2(\varkappa t)^{1/2}}{a}\,\mathrm{i}^3\Phi^*\left[\frac{r+a}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}. \tag{9.14}$$

---

*) В работе [51] рассмотрен случай, когда среда в областях $r > a$ и $r < a$ имеет различные теплопроводности. Там же приведены некоторые численные результаты.

Таким же путем можно получить решения для случая, когда количество тепла, выделяющегося в единицу времени, равно $A_0 t^n$, где n может принимать значения $-1/2$; 0; $1/2$; 1; ...

III. *В области $0 < r < a$ находится идеальный проводник с массой M и удельной теплоемкостью c_1. Он окружен неограниченной областью с теплопроводностью K и температуропроводностью $\varkappa$. На поверхности $r = a$ контактное сопротивление на единицу площади равно $1/H$. Начальная температура равна нулю. Внутри области $r = a$ в единицу времени выделяется количество тепла Q.*

Обозначая температуру идеального проводника через v_1, а температуру в области $r > a$ через v, находим

$$\bar{v}_1 = \frac{Qa^2 [1 + ah + aq]}{M_1 c_1 \varkappa p \, [a^3 q^3 + a^2 q^2 (1 + ah) + ka^2 hq + kah]}, \tag{9.15}$$

$$\bar{v} = \frac{hQa^4}{r \varkappa M_1 c_1 p \, [a^3 q^3 + a^2 q^2 (1 + ah) + ka^2 hq + kah]} e^{-q(r-a)}, \tag{9.16}$$

где

$$k = 4\pi a^3 \rho c / M_1 c_1 \quad \text{и} \quad h = H/K. \tag{9.17}$$

Если известны численные значения k и ah, то знаменатели в решениях (9.15) и (9.16) можно разложить на множители, а $\bar{v}_1$ и $\bar{v}$ выразить через сумму простых дробей со знаменателями типа $p(q + b)$; v_1 и v можно затем найти из (12) и (14) приложения 5.

Кроме того, можно воспользоваться теоремой обращения; тогда мы получим

$$v_1 = \frac{Q}{4\pi a K} \left\{ \frac{1 + ah}{ah} - \frac{2a^2 k^2 h^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa u^2 t / a^2} \, du}{[u^2 (1 + ah) - kah]^2 + [u^3 - kahu]^2} \right\}. \tag{9.18}$$

При малых значениях времени отсюда, как и в § 5 гл. XII, следует, что

$$v_1 = \frac{Q}{M_1 c_1} \left\{ t - \frac{kh\varkappa t^2}{2a} + \dots \right\}, \tag{9.19}$$

тогда как при больших значениях времени метод, изложенный в § 6 данной главы, дает

$$\frac{Q}{4\pi K a} \left\{ \frac{1 + ah}{ah} - \frac{a}{(\pi \varkappa t)^{1/2}} - \frac{a^2 [2 + ah(2 - k)]}{2hk\pi^{1/2} (\varkappa t)^{3/2}} + \dots \right\}. \tag{9.20}$$

Эта задача соответствует задаче, приведенной в § 7 данной главы, в которой цилиндр заменен шаром. Аналогичным образом можно поступить и при определении теплопроводности.

IV. *Та же задача, что и III *), но $Q = 0$ и начальная температура шара равна V_0.*

Температура шара v_1 в момент времени t равна

$$v_1 = \frac{2ka^2 h^2 V_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa u^2 t / a^2} u^2 \, du}{[u^2 (1 + ah) - kah]^2 + [u^3 - kahu]^2}. \tag{9.21}$$

Для малых значений времени получим

$$v_1 = V_0 \left\{ 1 - \frac{kh\varkappa t}{a} + \dots \right\}; \tag{9.22}$$

для больших значений времени найдем

$$v_1 = \frac{V_0 a^3}{2k\pi^{1/2} (\varkappa t)^{3/2}} + \frac{3V_0 a^4 [2 + ah(2 - k)]}{4hk^2 \pi^{1/2} (\varkappa t)^{5/2}} + \dots \tag{9.23}$$

V. *В области $0 < r < a$ находится идеальный проводник с массой M_1 и удельной теплоемкостью c_1. В области $a < r < b$ находится твердое тело с тепло-*

---

*) В работе [52] рассмотрен случай выделения тепла в области $r > a$.

проводностью K и температуропроводностью $\varkappa$. На границе $r=a$ контактное сопротивление отсутствует. Начальная температура всей системы постоянна и равна V_0, а при $t>0$ поверхность $r=b$ поддерживается при нулевой температуре.

Если обозначить температуру в области $a \leqslant r \leqslant b$ через v, то

$$v=\frac{4kbV_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n(b-r)}{2k(b-a)\alpha_n+4a\alpha_n\sin^2\alpha_n(b-a)-k\sin 2(b-a)\alpha_n}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{9.24}$$

где α_n $(n=1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения

$$ka\alpha\cos\alpha(b-a)=(a^2\alpha^2-k)\sin\alpha(b-a) \tag{9.25}$$

и

$$k=4\pi a^3\rho c/M_1c_1. \tag{9.26}$$

VI. *Та же задача, что и V, но начальная температура равна нулю, а в шар $r=a$ поступает в единицу времени количество тепла, равное Q.*

В данном случае

$$v=\frac{Q}{4\pi K}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)-$$

$$-\frac{Qk}{r\pi Ka}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n(b-a)\sin\alpha_n(b-r)}{\alpha_n[2k(b-a)\alpha_n+4a\alpha_n\sin^2\alpha_n(b-a)-k\sin 2\alpha_n(b-a)]}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{9.27}$$

где α_n — положительные корни уравнения (6.25).

VII. *Составные сферические твердые тела.*

Рассмотрим задачу для шара радиуса b из твердого материала, в котором центральная часть, $0 \leqslant r < a$, имеет теплопроводность, температуропроводность и температуру K_1, $\varkappa_1$, v_1; в наружной оболочке, $a<r<b$, соответствующие величины равны K_2, $\varkappa_2$ и v_2. Примем, что при $r=a$ контактное сопротивление отсутствует.

Пусть в начальный момент времени температура твердого тела равна постоянной величине V, а при $t>0$ наружная поверхность $r=b$ поддерживается при нулевой температуре.

Введем, как обычно, обозначения $u_1=rv_1$, $u_2=rv_2$; тогда подлежащие решению уравнения принимают вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\varkappa_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2},\quad 0\leqslant r<a,\quad t>0;\qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}=\varkappa_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2},\quad a<r<b,\quad t>0, \tag{9.28}$$

при условиях

$$u_1=u_2,\qquad r=a,\qquad t>0, \tag{9.29}$$

$$K_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}-\frac{u_1}{r^2}\right)=K_2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}-\frac{u_2}{r^2}\right),\qquad r=a,\quad t>0, \tag{9.30}$$

$$u_2=0,\qquad r=b,\qquad t>0,$$

$$u_1=rV,\qquad u_2=rV,\qquad t=0$$

и v_1 имеет при $r=0$ конечное значение.

Необходимо отметить, что вследствие формы граничного условия (9.30) решения для составных шаров не вытекают непосредственно из соответствующих решений для составных пластин.

Вводя обозначения $q_1^2=p/\varkappa_1$ и $q_2^2=p/\varkappa_2$, получим вспомогательные уравнения в виде

$$\frac{d^2\bar{u}_1}{dr^2}-q_1^2\bar{u}_1=-\frac{rV}{\varkappa_1},\quad 0\leqslant r<a;\qquad \frac{d^2\bar{u}_2}{dr^2}-q_2^2\bar{u}_2=-\frac{rV}{\varkappa_2},\quad a<r<b;$$

и граничные условия

$$\bar{u}_1=\bar{u}_2\ \text{ при }\ r=a,\qquad \bar{u}_2=0\ \text{ при }\ r=b,$$

$$K_1\left(a\frac{d\bar{u}_1}{dr}-\bar{u}_1\right)=K_2\left(a\frac{d\bar{u}_2}{dr}-\bar{u}_2\right)\ \text{ при }\ r=a,$$

а $\bar{v}_1$ при $r=0$ имеет конечное значение.

Решая эти уравнения, получим

$$\bar{v}_1 = \frac{V}{p} - \frac{abVK_2q_2 \operatorname{sh} rq_1}{rp\{K_2\psi_2(b) \operatorname{sh} q_1a + K_1\psi_1(a) \operatorname{sh} q_2(b-a)\}}, \tag{9.31}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{V}{p} - \frac{bV\{K_2\psi_2(r) \operatorname{sh} q_1a + K_1\psi_1(a) \operatorname{sh} q_2(r-a)\}}{rp\{K_2\psi_2(b) \operatorname{sh} q_1a + K_1\psi_1(a) \operatorname{sh} q_2(b-a)\}}, \tag{9.32}$$

где

$$\psi_1(r) = aq_1 \operatorname{ch} q_1r - \operatorname{sh} q_1r, \tag{9.33}$$

$$\psi_2(r) = aq_2 \operatorname{ch} q_2(r-a) + \operatorname{sh} q_2(r-a). \tag{9.34}$$

Далее рассуждения очень похожи на рассуждения для случая составной пластины, рассмотренной в § 8 гл. XII. Ко вторым членам соотношений (9.31) и (9.32) применяется теорема обращения, в результате чего мы получим интегралы, подынтегральные функции которых имеют простые полюсы при $\lambda = 0$ (дающие вклады $-V$) и простые полюсы при $\lambda = -\varkappa_1\alpha_m^2$, где $\pm\alpha_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — корни уравнения

$$K_2\{ka\alpha \cos k(b-a)\alpha + \sin k(b-a)\alpha\} \sin a\alpha + K_1\{a\alpha \cos a\alpha - \sin a\alpha\} \sin k(b-a)\alpha = 0, \tag{9.35}$$

$$k = \sqrt{\varkappa_1/\varkappa_2}, \qquad \sigma = K_1/kK_2. \tag{9.36}$$

Корни уравнения (9.35) служат корнями уравнения

$$K_2\{ka\alpha \operatorname{ctg} k(b-a)\alpha + 1\} + K_1\{a\alpha \operatorname{ctg} a\alpha - 1\} = 0 \tag{9.37}$$

и общими корнями уравнений

$$\sin a\alpha = 0, \qquad \sin k(b-a)\alpha = 0. \tag{9.38}$$

Если $k(b-a)/a$ — величина иррациональная, то последние уравнения общих корней не имеют, и из (9.31) и (9.32) получим

$$v_1 = \frac{2bV}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(\alpha_n)} \sin r\alpha_n \sin a\alpha_n \sin k(b-a)\alpha_n e^{-\varkappa_1\alpha_n^2 t}, \tag{9.39}$$

$$v_2 = \frac{2bV}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(\alpha_n)} \sin^2 a\alpha_n \sin k(b-r)\alpha_n e^{-\varkappa_1\alpha_n^2 t}, \tag{9.40}$$

где $\pm\alpha_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — корни уравнения (9.37) и

$$\varphi(\alpha_n) = \sigma a\alpha_n \sin^2 k\alpha_n(b-a) + k(b-a)\alpha_n \sin^2 a\alpha_n + \frac{1-k\sigma}{ka\alpha_n} \sin^2 a\alpha_n \sin^2 k(b-a)\alpha_n. \tag{9.41}$$

Если $k(b-a)/a$ — рациональная величина, то можно предположить, что она является несократимой дробью, равной l/m. В таком случае уравнения (9.38) имеют общие положительные корни

$$\alpha = \frac{mn\pi}{a}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9.42}$$

Эти корни уравнения (9.35) приводят к появлению в выражениях для v_1 и v_2 дополнительных членов

$$-\frac{2bV}{r\pi(l\sigma + m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(l+m)n}}{n} \sin \frac{mn\pi r}{a} e^{-\varkappa_1 m^2n^2\pi^2 t/a^2}, \tag{9.43}$$

и

$$\frac{2bV\sigma}{r\pi(l\sigma + m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi l(b-r)}{b-a} e^{-\varkappa_1 m^2n^2\pi^2 t/a^2} \tag{9.44}$$

соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldstein, Proc. Lond. Math. Soc. **34**, 51 (1932).
2. Carslaw, Jaeger, Proc. Lond. Math. Soc. **46**, 361 (1940).
3. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, ed. 2, 1944 (Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.)
4. Lowan, Phil. Mag. **17**, 849 (1934).
5. Jaeger, Proc. Roy. Soc. N. S. W. **74**, 342 (1940); **75**, 130 (1941).
6. Goldenberg, Engineer **197**, 779—780 (1954).
7. Carslaw, Jaeger, Operational Methods in Applied Mathematics, Oxford, ed. 2, 1948. (Г. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948, перев. с 1-го изд. 1941 г.)
8. Carsten, McKerrow, Phil. Mag. **35**, 812 (1944).
9. Walters, Phil. Mag. **38**, 70—78 (1947).
10. Comenetz, Quart. Appl. Math. **5**, 503—510 (1947).
11. Fischer, Ann. Physik **34**, 669 (1939).
12. Stephens, Phil. Mag. **15**, 857 (1933).
13. Awbery, Phil. Mag. **28**, 447 (1939).
14. Buchholz, Z. angew. Math. Mech. **9**, 280 (1929).
15. Bogert, J. Math. Phys. **30**, 102 (1951).
16. Lipow, Zwick, J. Math. Phys. **34**, 308—315 (1955).
17. Geckler, Jet Propulsion **25**, 31—35 (1955).
18. Nicholson, Proc. Roy. Soc. **A100**, 226 (1921).
19. Smith, J. Appl. Phys. **8**, 441 (1937).
20. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of Conduction of Heat in Solids, Macmillan, ed. 2, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1947.)
21. Jaeger, Proc. Roy. Soc. Edin. **A61**, 223 (1942).
22. Jaeger, Clarke, Proc. Roy. Soc. Edin. **A61**, 229 (1942).
23. Jaeger, J. Math. Phys. **34**, 316—321 (1956).
24. Computation Laboratory of Harvard University, Problem Report No. 76, 1954.
25. Perry, Berggren Univ. California Publ. in Engng **5**, 59 (1944).
26. Goldenberg, Proc. Phys. Soc. **B69**, 256—260 (1956).
27. Erdélyi, Kermack, Proc. Cambr. Phil. Soc. **41**, 74 (1945).
28. Ingersoll, Adler, Plass, Ingersol, Heat. Pip. Air. Condit. **22**, 113—122 (1950).
29. Blackwell, Canad. J. Phys. **31**, 472—479 (1953).
30. McLachlan, Complex Variable and Operational Calculus, Cambridge, 1939.
31. Ritchie, Sakakura, J. Appl. Phys. **27**, 1453 (1956).
32. Bullard, Proc. Roy. Soc. **A222**, 408—429 (1954).
33. Jaeger, Aust. J. Phys. **9**, 167—179 (1956).
34. Whitehead, Hutchings, J. Instn. Elect. Engrs **83**, 517 (1938).
35. Whitehead, Proc. Phys. Soc. **56**, 358—366 (1944).
36. Jaeger, Newstead, Instn. Elect. Engrs Monograph No. 253S, 1957.
37. Schubert, Z. angew. Phys. **2**, 174—179 (1950).
38. De Vries, Soil Sci. **73**, 83—89 (1952).
39. Van der Held, Hardebol, Kalshoven, Physica **19**, 208—216 (1953).
40. Buettner, Trans. Am. Geophys. Union **36**, 831—837 (1955).
41. Blackwell, J. Appl. Phys. **25**, 137—144 (1954).
42. Blackwell, Canad. J. Phys. **34**, 412—417 (1956).
43. Jaeger, Phil. Mag. **32**, 324 (1941).
44. Penner, Sherman, J. Chem. Phys. **15**, 569—574 (1947).
45. Schaaf, Quart. Appl. Math. **3**, 356—360 (1945).
46. Tranter, Phil. Mag. **38**, 131—134 (1947).
47. Thiruvenkatachar, Ramakrishna, Quart. Appl. Math. **10**, 255—262 (1952).
48. Levy, Trans. ASME **78**, 1627—1635 (1956).
49. Jaeger, Phil. Mag. **35**, 169 (1944).
50. Goldenberg, Brit. J. Appl. Phys. **2**, 233 (1951).
51. Goldenberg, Tranter, Brit. J. Appl. Phys. **3**, 296—298 (1952).
52. Paterson, Proc. Glasgow Math. Ass. **1**, 164—169 (1953).

ГЛАВА XIV
ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 1. Введение

Применение функций Грина в теории потенциала известно очень хорошо. Удобнее всего определить эту функцию внутри замкнутой поверхности S как потенциал, который обращается в нуль на данной поверхности, а в точке $P(x', y', z')$, находящейся внутри нее, стремится к бесконечности как $1/r$, когда $r \to 0$. Обозначим такое решение уравнения $\nabla^2 u = 0$ через $G(P)$; тогда решение этого уравнения, не обращающееся в бесконечность внутри данной поверхности и принимающее на ней произвольное значение V, запишется в виде

$$u = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\partial}{\partial n} G(P) \, \text{l}$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по внешней нормали [1—4].

Мы покажем, что подобную функцию можно с успехом применить и в теории теплопроводности. Мы определяем в этом случае *функцию Грина как температуру в точке (x, y, z) в момент времени t, обусловленную действием мгновенного точечного источника единичной мощности, помещенного в точку $P(x', y', z')$ в момент τ, полагая, что начальная температура тела равна нулю и его поверхность поддерживается при нулевой температуре.*

Такое решение можно написать следующим образом:

$$u = F(x, y, z \; x', y', z', t - \tau) \qquad (t > \tau).$$

Оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \nabla^2 u \qquad (t > \tau).$$

Однако поскольку t входит только в форме $(t - \tau)$, то мы получим также

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \varkappa \nabla^2 u = 0 \qquad (\tau < t).$$

Кроме того, $\lim\limits_{t \to \tau} u = 0$ во всех точках внутри S, за исключением точки $P(x', y', z')$. Внутри S решение имеет вид

$$\frac{1}{8\,[\pi \varkappa (t - \tau)]^{3/2}} \exp\left[- \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4 \varkappa t\,(t - \tau)}\right].$$

Наконец, на поверхности S $u = 0$ $(\tau < t)$.

Пусть v — распределение температуры в твердом теле в момент времени t, обусловленное температурой поверхности $\varphi(x, y, z, t)$ и начальной температурой $f(x, y, z)$.

Тогда v удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \nabla^2 v \qquad (t > 0)$$

и условиям

$$v = f(x, y, z) \quad \text{в начальный момент внутри } S,$$

$$v = \varphi(x, y, z, t) \quad \text{на поверхности } S \text{ при } t > 0.$$

Кроме того, поскольку время τ в приведенных формулах лежит внутри интересующего нас интервала времени, мы можем написать

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varkappa \nabla^2 v \qquad (\tau < t),$$

$$v = \varphi(x, y, z, \tau) \quad \text{на поверхности.}$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial \tau} + v\frac{\partial u}{\partial \tau} = \varkappa\left[u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right]$$

и

$$\int_0^{t-\varepsilon}\left[\int\int\int \frac{\partial}{\partial \tau}(uv)\,dx\,dy\,dz\right]d\tau = \varkappa\int_0^{t-\varepsilon}\left[\int\int\int (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,dx\,dy\,dz\right]d\tau.$$

Тройной интеграл берется по всему твердому телу, а ε — некоторая положительная, сколь угодно малая величина, меньшая чем t.

Меняя порядок интегрирования в левой части равенства и применяя формулу Грина к правой части, получим

$$\int\int\int (uv)_{\tau=t-\varepsilon}\,dx\,dy\,dz - \int\int\int (uv)_{\tau=0}\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \varkappa\int_0^{t-\varepsilon}\left[\int\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\right]d\tau = \varkappa\int_0^{t-\varepsilon}\left[\int\int v\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i dS\right]d\tau,$$

где $\partial/\partial n_i$ означает дифференцирование по внутренней нормали; мы воспользовались здесь тем, что $u = 0$ на поверхности.

Перейдем теперь к пределу при $\varepsilon \to 0$. Левая часть равенства принимает вид

$$[v_P]_t\left[\int\int\int u_{\tau=t-0}\,dx\,dy\,dz\right] - \int\int\int (u)_{\tau=0}(v)_{\tau=0}\,dx\,dy\,dz.$$

Первый интеграл берется по элементу объема, внутри которого находится точка $P(x', y', z')$. В этой точке функция u в момент времени $t = \tau$ становится бесконечной. Второй интеграл берется по всему объему тела. $[v_P]_t$ является значением v в точке $P(x', y', z')$ в момент времени t.

Напомним, что u — это температура в момент времени t, обусловленная действием единичного источника в момент τ в точке $P(x', y', z')$; тогда

$$\int\int\int (u)_{\tau=t-0}\,dx\,dy\,dz = 1,$$

и мы получим

$$[v_P]_t = \int\int\int (u)_{\tau=0}(v)_{\tau=0}\,dx\,dy\,dz + \varkappa\int_0^t\left[\int\int v\frac{\partial u}{\partial n_i}\,dS\right]d\tau =$$

$$= \int\int\int (u)_{\tau=0} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz + \varkappa\int_0^t\left[\int\int \varphi(x, y, z, \tau)\frac{\partial u}{\partial n_i}\,dS\right]d\tau. \quad (1.1)$$

Этой формулой выражается температура в точке (x', y', z') в момент времени t при начальном распределении температур $f(x, y, z)$ и при температуре на поверхности*) $\varphi(x, y, z, t)$.

Если на поверхности происходит теплообмен, то мы определяем функцию Грина *и как температуру в точке* (x, y, z) *в момент* t, *обусловленную действием в момент* τ *мгновенного точечного источника единичной мощности, помещенного в точке* $P(x', y', z')$ *тела, на поверхности которого происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

Температура в точке $P(x', y', z')$ в момент t, обусловленная начальным распределением температур $f(x, y, z)$ и теплообменом со средой, имеющей температуру $\varphi(x, y, z, t)$, определяется из рассуждений, аналогичных приведенным. В конце концов, поскольку на выбранной поверхности $\partial u/\partial n_i = hu$, получим

$$[v_P]_t = \int\int\int (u)_{\tau=0} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz + h\varkappa\int_0^t\left[\int\int u\varphi(x, y, z, \tau)\,dS\right]d\tau =$$

$$= \int\int\int (u)_{\tau=0} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \varkappa\int_0^t\left[\int\int\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i \varphi(x, y, z, \tau)\,dS\right]d\tau. \quad (1.2)$$

Таким образом, найденный нами результат имеет такой же вид, как и (1.1).

Итак, решение общей задачи теории теплопроводности сводится к определению функции Грина для тела, температуру которого требуется найти.

Для случая линейного или двумерного теплового потока можно сразу же получить результаты, аналогичные (1.1) и (1.2). Вместо бесконечности порядка

$$\frac{1}{\{2\sqrt{\pi\varkappa t}\}^3}\exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right],$$

мы получим соответственно

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right]$$

и

$$\frac{1}{4\pi\varkappa t}\exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right].$$

*) Этот вывод принадлежит Минигероду и был опубликован в его диссертации [5] (см. также [6—14]). О применении вывода к уравнению $(\nabla^2 + \varkappa^2)u = 0$ см. [15, 16].

В связи с этими изменениями формулы, соответствующие (1.1) и (1.2), будут иметь вид

$$[v_P]_t = \int (u)_{\tau=0} f(x)\, dx + \varkappa \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial u}{\partial n_i}\, d\tau \qquad (1.3)$$

и

$$[v_P]_t = \int \int (u)_{\tau=0} f(x, y)\, dx\, dy + \varkappa \int_0^t \left[\int \varphi(x, y, \tau) \frac{\partial u}{\partial n_i}\, ds \right] d\tau, \qquad (1.4)$$

где интегрирование по s в (1.4) производится вдоль границы области.

Физическая интерпретация полученных решений очень проста и вместе с тем очень важна. Так, например, из соотношения (1.1) следует, что температура в момент времени t в теле с начальной температурой $f(x, y, z)$ и температурой поверхности, равной нулю, совпадает с температурой, обусловленной действием в момент $t=0$ распределенных по объему тела мгновенных источников, причем в элементе объема $dx\,dy\,dz$ в точке (x, y, z) выделяется количество тепла, равное $\rho c f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$. С физической точки зрения это можно считать очевидным. Аналогичным образом, если в теле выделяется тепло, то температуру можно найти из распределения непрерывных источников по всему объему этого тела. Кроме того, из соотношения (1.1) следует, что температура в момент времени t в теле с нулевой начальной температурой и заданной температурой поверхности равна температуре, обусловленной распределением по поверхности непрерывных дублетов с осями, нормальными к поверхности (см. § 8 гл. X).

В настоящей главе мы определим функции Грина для ряда важных областей и граничных условий. В нескольких случаях эти функции можно написать сразу. Но обычно мы будем пользоваться преобразованием Лапласа. Как отмечено в приложении 1, можно показать, что найденные таким путем функции Грина удовлетворяют требуемым условиям.

Если функция Грина известна, то решение задачи теплопроводности для заданной области, при заданных граничных условиях и начальной температуре, являющейся произвольной функцией пространственных координат, можно сразу же записать при помощи формул данного раздела. Некоторые из этих решений были уже получены другими методами, но при этом мы каждый раз допускали, что возможно такое разложение произвольной функции, которое требуется задачей. В излагаемом сейчас методе нет необходимости в подобном допущении *).

Полученные таким путем решения справедливы при $t > 0$. Когда $t \to 0$, они стремятся к заданному начальному значению. Полагая в них $t=0$, мы получаем формальные разложения произвольных функций. Например, приняв в выражении (8.6) данной главы $t=0$, получим

$$f(r) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1^2(a\alpha_n)} \int_0^a r' f(r') J_0(r'\alpha_n)\, dr', \qquad 0 < r < a, \qquad (1.5)$$

*) Ученый, занимающийся чистой математикой, в первую очередь исследовал бы форму разложения и условия, при которых оно возможно. В прикладной математике как форма разложения, так и ее применимость зачастую просто принимаются. Однако не всегда ясно, какова эта форма, и поэтому легко принять неправильную форму (ср., например, стр. 131 книги Карслоу [17], где опущен постоянный член; см. также соотношение (8.3) гл. VII и пример II § 8 данной главы). Одно из преимуществ метода преобразования Лапласа заключается в исключении ошибок такого типа.

где α_n — положительные корни уравнения $J_0(\alpha a)=0$. Мы получили разложение Фурье — Бесселя, которое использовалось в § 6 гл. VII. Функция Грина для каждой задачи дает, таким образом, соответствующую теорему разложения (или интегральную теорему); многие из них еще не исследованы *).

§ 2. Линейный тепловой поток. Полуограниченное твердое тело $x>0$

I. *Начальное распределение температур* $f(x)$. *Температура на границе поддерживается равной* $\varphi(t)$.

В данном случае функция Грина описывает температуру в момент времени t в плоскости x, обусловленную распределением единичных плоских мгновенных источников, расположенных в плоскости x' в момент τ; она имеет вид (ср. пример I § 10 гл. X)

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-\tau)}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]\right\}. \tag{2.1}$$

В таком случае, делая небольшие изменения в формуле (1.3) предыдущего параграфа, получим температуру в плоскости x в момент t в виде

$$v=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_0^\infty f(x')\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa t}\right]\right\}dx'+$$
$$+\frac{x}{2\sqrt{\pi\varkappa}}\int_0^t \varphi(\tau)\frac{\exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau, \tag{2.2}$$

что согласуется с решением, приведенным в § 5 гл. II.

II. *Единичный плоский мгновенный источник* **) *в плоскости* x' *в момент времени* $t=0$. *Теплообмен на плоскости* $x=0$ *со средой нулевой температуры.*

Будем исходить из решения для единичного мгновенного источника в плоскости $x'=0$ в момент времени $t=0$ в неограниченной среде. Оно имеет вид

$$u=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]. \tag{2.3}$$

Решение v нашей задачи будем искать в форме

$$v=u+w,$$

где w удовлетворяет уравнению теплопроводности при $x>0$, и обращается в нуль при $t=0$. Решение будет таким, что

$$\frac{\partial v}{\partial x}=hv, \quad \text{когда} \quad x=0, \quad t>0. \tag{2.4}$$

Применим преобразование Лапласа. Из (7) приложения 5 следует, что

$$\bar{u}=\frac{1}{2\varkappa q}e^{-q|x-x'|}, \tag{2.5}$$

---

*) Чтобы сделать строгой формулу (1.5), необходимо доказать допустимость изменения порядков интегрирования и суммирования, произведенных при выводе решения (8.6) данной главы из (8.5), а также допустимость того, что в решении (8.6) t считают равным нулю.

**) Здесь и далее под единичным плоским источником автор понимает распределение источников единичной мощности в некоторой плоскости. (*Прим. ред.*)

где, как обычно, $q=\sqrt{p/\varkappa}$. Вспомогательное уравнение для $\bar{w}$ имеет вид

$$\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}-q^2\bar{w}=0.$$

Его решение, ограниченное при $x\to\infty$, имеет вид Ae^{-qx}, и следовательно,

$$\bar{v}=\frac{1}{2\varkappa q}e^{-q|x-x'|}+Ae^{-qx},$$

где A — постоянная, подлежащая определению из условия

$$\frac{d\bar{v}}{dx}=h\bar{v}\quad \text{при}\quad x=0.$$

Таким образом, мы получим

$$\bar{v}=\frac{1}{2\varkappa q}e^{-q|x-x'|}+\frac{(q-h)}{2\varkappa q(q+h)}e^{-q(x+x')}=$$
$$=\frac{1}{2\varkappa q}e^{-q|x-x'|}+\frac{1}{2\varkappa q}e^{-q(x+x')}-\frac{h}{\varkappa q(q+h)}e^{-q(x+x')}.$$

Воспользовавшись (7) и (13) приложения 5, находим

$$v=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa t}\right]\right\}-$$
$$-h\exp\left[\varkappa th^2+h(x+x')\right]\Phi^*\left\{\frac{x+x'}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right\}. \quad (2.6)$$

Последний член в этом соотношении можно переписать в виде

$$-\frac{h}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_0^\infty \exp(-h\xi)\exp\left[-\frac{(x+x'+\xi)^2}{4\varkappa t}\right]d\xi.$$

Он дает распределение температур *), обусловленное действием стоков, распределенных вдоль прямой от $-x'$ до $-\infty$.

III. *Область $x>0$ с начальным распределением температур $f(x)$. Теплообмен на поверхности со средой с температурой $\varphi(t)$.*

Из решения (2.6) и из соотношения (1.3) предыдущего параграфа следует, что

$$v=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa t}\right]\right\}-h\exp\left[\varkappa th^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+h(x+x')\right]\Phi^*\left[\frac{x+x'}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right]\right\}f(x')\,dx'+$$
$$+\varkappa h\int_0^t\left\{\frac{\exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]}{\sqrt{\pi\varkappa(t-\tau)}}-\right.$$
$$\left.-h\exp\left[\varkappa h^2(t-\tau)+hx\right]\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa(t-\tau)}}+h\sqrt{\varkappa(t-\tau)}\right]\right\}\varphi(\tau)\,d\tau. \quad (2.7)$$

*) Первым это решение получил Бриан [18]. См. также [12, 19, 20].

§ 3. Линейный тепловой поток в области $0 < x < a$

I. *Единичный мгновенный плоский источник в плоскости x' в момент времени $t = 0$. Границы $x = 0$ и $x = a$ поддерживаются при температуре, равной нулю.*

Как и раньше, положим $v = u + w$, где

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right]$$

служит решением для единичного плоского мгновенного источника в плоскости x' при $t = 0$ в неограниченном твердом теле, а w — решение уравнения теплопроводности, обращающееся в нуль при $t = 0$ и выбранное таким образом, что на обеих границах v обращается в нуль. Вспомогательное уравнение для w имеет вид

$$\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} - q^2\bar{w} = 0.$$

Тогда, используя значение $\bar{u}$ из соотношения (2.5) предыдущего параграфа, получим

$$\bar{v} = \frac{1}{2\varkappa q} e^{-q(x-x')} + A \operatorname{sh} qx + B \operatorname{ch} qx.$$

Здесь A и B должны быть выбраны таким образом, чтобы $\bar{v} = 0$ при $x = 0$ и $x = a$, т. е. чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{1}{2\varkappa q} e^{-qx'} + B = 0, \qquad \frac{1}{2\varkappa q} e^{-q(a-x')} + A \operatorname{sh} qa + B \operatorname{ch} qa = 0.$$

Решая уравнение для $\bar{v}$ и производя подстановку, найдем

$$\bar{v} = \frac{\operatorname{ch} q(a + x - x') - \operatorname{ch} q(a - x - x')}{2\varkappa q \operatorname{sh} qa}, \quad \text{когда} \quad x < x'. \tag{3.1}$$

Когда $x' < x < a$, решение имеет тот же вид, только x и x' меняются местами.

Определяя v обычным путем при помощи теоремы обращения, получим *)

$$v = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[\frac{-\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right] \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x'}{a}. \tag{3.2}$$

Распределение температур в момент времени t при начальном распределении температур $f(x)$ и температурах поверхностей $x = 0$ и $x = a$, поддерживаемых при $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, получается из соотношения (1.3) данной главы в виде решения (5.2) гл. III.

II. *Единичный мгновенный плоский источник в плоскости x' при $t = 0$. Граничные условия имеют вид*

$$k_1 \frac{\partial v}{\partial x} - h_1 v = 0, \quad x = 0, \qquad k_2 \frac{\partial v}{\partial x} + h_2 v = 0, \quad x = a, \tag{3.3}$$

где k_1, h_1, h_2, k_2 — постоянные коэффициенты, равные нулю или положительным величинам (пары коэффициентов k_1 и h_1 или k_2 и h_2 не должны одновременно равняться нулю). Выбирая соответствующим образом эти коэффициенты, можно охватить все случаи, т. е. случаи нулевой температуры,

*) Этот результат можно получить при помощи метода изображений, как и в § 10 гл. X.

теплообмена или отсутствия теплового потока на той или иной поверхности. Решение, получаемое так же, как и в примере I, имеет вид

$$v=\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x)\, Z_n(x')\, e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{3.4}$$

где

$$Z_n(x)=\frac{\left[2\left(k_2^2\alpha_n^2+h_2^2\right)\right]^{1/2}\left(k_1\alpha_n\cos\alpha_n x+h_1\sin\alpha_n x\right)}{\left\{\left(k_1^2\alpha_n^2+h_1^2\right)\left[a\left(k_2^2\alpha_n^2+h_2^2\right)+k_2h_2\right]+k_1h_1\left(k_2^2\alpha_n^2+h_2^2\right)\right\}^{1/2}}, \tag{3.5}$$

а $\pm\alpha_n$, $n=1, 2, \ldots,$ — корни уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha a=\frac{\alpha\left(k_1h_2+k_2h_1\right)}{k_1k_2\alpha^2-h_1h_2}. \tag{3.6}$$

Если $h_1=h_2=0$, то в выражение (3.5) надо ввести член $(1/a)$. Это решение в явном виде написано ниже (см. (3.7)). Из решений (3.4) и (1.3) данной главы получается целый ряд решений, приведенных в §§ 10 и 12 гл. III.

III. *Единичный мгновенный плоский источник в плоскости x' при $t=0$. Тепловой поток на границах $x=0$ и $x=a$ равен нулю.*

В данном случае решение имеет вид

$$v=\frac{1}{a}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\right\}. \tag{3.7}$$

§ 4. Двумерные задачи. Тела с прямоугольным сечением

В таких случаях функция Грина описывает температуру в сечении $z=\text{const}$ в момент времени t в точке (x, y), обусловленную распределением единичных мгновенных линейных источников, расположенных вдоль прямой, параллельной оси z, проходящей через точку (x', y'), в момент времени τ. Иными словами, нам нужно получить решение v уравнения теплопроводности, удовлетворяющее заданным граничным условиям и ведущее себя при $t\to\tau$ как

$$u=\frac{1}{4\pi\varkappa(t-\tau)}\exp\left[-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]=$$

$$=\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]\right\}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]\right\}. \tag{4.1}$$

Поскольку функцию u можно представить в виде произведения (4.1), из рассуждений § 15 гл. I следует, что для любого из граничных условий (3.3) предыдущего параграфа решение v для двумерной области можно выразить через произведение соответствующих одномерных решений.

I. *Тело с сечением в виде квадранта $x>0$, $y>0$; температура граничной поверхности равна нулю.*

В соответствии с выражением (2.1) данной главы распределение температур, обусловленное действием мгновенного единичного линейного*)

*) Здесь под единичным линейным источником автор понимает распределение источников единичной мощности вдоль некоторой прямой, параллельной оси z. (*Прим. ред.*)

источника в точке (x', y') в момент времени τ, записывается в виде

$$\frac{1}{4\pi\varkappa(t-\tau)}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]\right\}\left\{\exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(y+y')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]\right\}. \quad (4.2)$$

Решение для этой области с заданными начальной температурой и температурами граничных поверхностей можно тогда написать, воспользовавшись соотношением (1.4) данной главы.

Аналогичным образом, если на граничной поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры, то функция Грина равна произведению двух выражений типа (2.6) данной главы.

II. *Тело с сечением в виде прямоугольника* $0<x<a$, $0<y<b$; *температура граничной поверхности равна нулю.*

Найденная из решения (3.2) предыдущего параграфа функция Грина для нулевой температуры граничной поверхности равна

$$\frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\varkappa\pi^2(t-\tau)\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x'}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y'}{b}. \quad (4.3)$$

III. *Тело с сечением в виде прямоугольника* $0<x<a$, $0<y<b$; *теплообмен на граничной поверхности отсутствует.*

Функция Грина (см. (3.7) данной главы) в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{ab}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x'}{a}\right\}\times\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{b^2}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{n\pi y'}{b}\right\}.$$

§ 5. Прямоугольный параллелепипед $0<x<a$, $0<y<b$, $0<z<c$

Как и в предыдущем параграфе, при любых граничных условиях (см. (3.3) данной главы) функцию Грина можно записать в виде произведения трех решений для одномерных случаев. Таким же путем можно получить решения для области $x>0$, $y>0$, $z>0$ и различных других полуограниченных областей. Здесь мы рассмотрим только конечную область.

В соответствии с условиями (3.3) данной главы функция Грина при температуре поверхности, равной нулю, имеет вид

$$\frac{8}{abc}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{l\pi x'}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{m\pi y'}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\sin\frac{n\pi z'}{c}\times\exp\left\{-\varkappa\pi^2(t-\tau)\left[\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right]\right\}. \quad (5.1)$$

Тогда решение для начальной температуры $f(x, y, z)$ и температуры поверхности, равной нулю, можно записать следующим образом:

$$\frac{8}{abc}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\exp\left\{-\varkappa\pi^2(t-\tau)\left[\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right]\right\}\times\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x', y', z')\sin\frac{l\pi x'}{a}\sin\frac{m\pi y'}{b}\sin\frac{n\pi z'}{c}\,dx'\,dy'\,dz'. \quad (5.2)$$

Если при начальной температуре, равной нулю, поверхность $x=0$ поддерживается при температуре $\varphi(y, z, t)$, а другие поверхности — при температуре, равной нулю, то мы получим решение в виде

$$\frac{8\varkappa\pi}{a^2bc}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} l\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\int_0^t d\tau\int_0^b\int_0^c \sin\frac{m\pi y'}{b}\sin\frac{n\pi z'}{c}\varphi(x', y', \tau)\times$$
$$\times\exp\left\{-\varkappa\pi^2(t-\tau)\left[\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right]\right\}dx'\,dy'. \quad (5.3)$$

Если при $t>0$ в твердом теле в единицу времени на единицу объема выделяется количество тепла $A(x, y, z, t)$, а поверхность поддерживается при нулевой температуре, то искомая температура будет равна следующей величине:

$$\frac{8\varkappa}{abcK}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\times$$
$$\times\int_0^t\int_0^a\int_0^b\int_0^c \sin\frac{l\pi x'}{a}\sin\frac{m\pi y'}{b}\sin\frac{n\pi z'}{c}A(x', y', z', \tau)\times$$
$$\times\exp\left\{-\varkappa\pi^2(t-\tau)\left[\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right]\right\}dx'\,dy'\,dz'\,d\tau. \quad (5.4)$$

Если $A(x, y, z, t)$ равно постоянной величине A_0, то мы получим

$$\frac{64\varkappa A_0}{K\pi^3}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\{(2l+1)\pi x/a\}\sin\{(2m+1)\pi y/b\}\sin\{(2n+1)\pi z/c\}\left(1-e^{-\alpha_{l,m,n}t}\right)}{(2l+1)(2m+1)(2n+1)\alpha_{l,m,n}}, \quad (5.5)$$

где

$$\alpha_{l,m,n}=\varkappa\pi^2\left[\frac{(2l+1)^2}{a^2}+\frac{(2m+1)^2}{b^2}+\frac{(2n+1)^2}{c^2}\right].$$

§ 6. Линейный тепловой поток. Составные твердые тела

Функции Грина для составных областей можно найти уже использовавшимися выше методами.

I. *В области $x>0$ находится материал с термическими коэффициентами K_1, $\varkappa_1$, ρ_1, c_1, v_1, а в области $x<0$ — материал, для которого эти коэффициенты равны K_2, $\varkappa_2$, ρ_2, c_2, v_2 соответственно. Контактное сопротивление на граничных поверхностях отсутствует. В области $x>0$ в плоскости x' в момент времени $t=0$ действует единичный мгновенный плоский источник* [21].

Распределение температур, обусловленное действием в плоскости x' неограниченного тела с термическими коэффициентами K_1, $\varkappa_1$ единичного мгновенного плоского источника в момент $t=0$, равно следующей величине:

$$u_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa_1 t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa_1 t}\right], \quad (6.1)$$

так что

$$\bar{u}_1=\frac{1}{2\varkappa_1 q_1}e^{-q_1|x-x'|}. \quad (6.2)$$

Здесь $q_1=\sqrt{p/\varkappa_1}$; в дальнейшем мы введем также $q_2=\sqrt{p/\varkappa_2}$.

Примем, что в области $x>0$

$$v_1=u_1+w_1.$$

где w_1 — решение уравнения для линейного теплового потока, обращающееся при $t=0$ и $x\to\infty$ в нуль; иными словами,

$$\bar{v}_1=\frac{1}{2\varkappa_1 q_1}e^{-q_1|x-x'|}+Ae^{-q_1 x}, \qquad x>0. \tag{6.3}$$

Для $x<0$ будем искать решение уравнения линейного теплового потока, которое должно обращаться в нуль при $x\to\infty$. Оно будет иметь вид

$$\bar{v}_2=Be^{q_2 x}, \qquad x<0. \tag{6.4}$$

A и B должны быть здесь выбраны так, чтобы

$$\bar{v}_1=\bar{v}_2, \qquad K_1\frac{d\bar{v}_1}{dx}=K_2\frac{d\bar{v}_2}{dx}, \quad \text{когда} \quad x=0. \tag{6.5}$$

Таким образом, находим

$$\bar{v}_1=\frac{1}{2\varkappa_1 q_1}e^{-q_1|x-x'|}+\frac{\left(K_1\varkappa_2^{1/2}-K_2\varkappa_1^{1/2}\right)}{2\varkappa_1 q_1\left(K_2\varkappa_1^{1/2}+K_1\varkappa_2^{1/2}\right)}e^{-q_1(x+x')}, \tag{6.6}$$

$$\bar{v}_2=\frac{K_1\varkappa_1^{-1/2}}{\left(K_1\varkappa_2^{1/2}+K_2\varkappa_1^{1/2}\right)q_2}e^{q_2 x-q_1 x'}. \tag{6.7}$$

Следовательно,

$$v_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa_1 t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa_1 t}\right]+ \\ +\frac{K_1\varkappa_2^{1/2}-K_2\varkappa_1^{1/2}}{2\left(K_1\varkappa_2^{1/2}+K_2\varkappa_1^{1/2}\right)\sqrt{\pi\varkappa_1 t}}\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa_1 t}\right], \tag{6.8}$$

$$v_2=\frac{K_1\varkappa_2\varkappa_1^{-1/2}}{\left(K_1\varkappa_2^{1/2}+K_2\varkappa_1^{1/2}\right)\sqrt{\pi\varkappa_2 t}}\exp\left[-\frac{\left(x-x'\sqrt{\varkappa_2/\varkappa_1}\right)^2}{4\varkappa_2 t}\right]. \tag{6.9}$$

Стало быть, решение в области $x>0$ является решением, обусловленным совместным действием первоначального источника и источника мощностью

$$\left(K_1\varkappa_2^{1/2}-K_2\varkappa_1^{1/2}\right)/\left(K_1\varkappa_2^{1/2}+K_2\varkappa_1^{1/2}\right)$$

в положении «изображения» $-x'$ в неограниченной среде с термическими коэффициентами K_1, $\varkappa_1$.

Решение в области $x<0$ служит решением для источника мощностью

$$2K_1\varkappa_2\varkappa_1^{-1/2}/\left(K_1\varkappa_2^{1/2}+K_2\varkappa_1^{1/2}\right),$$

действующего в плоскости $x'\sqrt{\varkappa_2/\varkappa_1}$ в неограниченном твердом теле с термическими коэффициентами K_2, $\varkappa_2$.

II. *Задача, аналогичная задаче I, но на поверхности $x=0$ имеется контактное сопротивление* *), *и следовательно, граничное условие имеет вид*

$$K_1\frac{\partial v_1}{\partial x}=K_2\frac{\partial v_2}{\partial x}=H(v_1-v_2), \qquad x=0. \tag{6.10}$$

*) В статьях [22, 23] рассмотрен источник в плоскости $x=0$; в этом случае существует несколько возможностей, поскольку тепло может выделяться либо в одной или другой среде, либо между ними.

Решения записываются следующим образом:

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa_1 t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa_1 t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa_1 t}\right]\right\} - \\ -\frac{H}{K_1}\exp\left[h_1(x+x')+h_1^2\varkappa_1 t\right]\Phi^*\left\{\frac{x+x'}{2\sqrt{\varkappa_1 t}}+h_1\sqrt{\varkappa_1 t}\right\}, \quad (6.11)$$

$$v - \frac{kH}{K_2}\exp\left[h_2^2\varkappa_2 t+h_2(kx'-x)\right]\Phi^*\left\{\frac{kx'-x}{2\sqrt{\varkappa_2 t}}+h_2\sqrt{\varkappa_2 t}\right\}, \quad (6.12)$$

где

$$k=\sqrt{\varkappa_2/\varkappa_1}, \qquad h_2=\frac{H\left(K_1\varkappa_2^{1/2}+K_2\varkappa_1^{1/2}\right)}{K_1K_2\varkappa_2^{1/2}}, \qquad h_1=kh_2.$$

III. *В области* $-l<x<0$ *находится материал с термическими коэффициентами* K_1, ρ_1, c_1, $\varkappa_1$, v_1, *а в области* $0<x<a$ — *материал с коэффициентами* K_2, ρ_2, c_2, $\varkappa_2$, v_2. *Контактное сопротивление на границе отсутствует. В области* $0<x<a$ *в плоскости* x' *в момент времени* $t=0$ *действует мгновенный единичный плоский источник. При* $t>0$ *поверхности* $x=a$ *и* $x=-l$ *поддерживаются при нулевой температуре.*

$$v_1 = 2k\sigma\sum_{n=l}^{\infty}\frac{\sin k(a-x')\beta_n\sin(x+l)\beta_n\sin l\beta_n\sin ka\beta_n}{l\sin^2 ka\beta_n+\sigma ka\sin^2 l\beta_n}e^{-\varkappa_1\beta_n t}+ \\ +\frac{2k\sigma s}{l(r+\sigma s)}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{nr\pi x'}{a}\sin\frac{ns\pi x}{l}\exp\left[-\frac{\varkappa_1 n^2s^2\pi^2t}{l^2}\right], \quad (6.13)$$

$$v_2 = 2k\sigma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k(a-x')\beta_n\sin^2 l\beta_n\sin k(a-x)\beta_n}{l\sin^2 ka\beta_n+\sigma ka\sin^2 l\beta_n}e^{-\varkappa_1\beta_n^2 t}+ \\ +\frac{2ks}{l(r+\sigma s)}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi rx'}{a}\sin\frac{n\pi rx}{a}\exp\left[-\frac{\varkappa_1 n^2s^2\pi^2t}{l^2}\right], \quad (6.14)$$

где $k=\sqrt{\varkappa_1/\varkappa_2}$, $\sigma=kK_2/K_1$, а $\pm\beta_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ — корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\beta l+\sigma\operatorname{ctg}k\beta a=0.$$

Вторые ряды в формулах (6.13) и (6.14) присутствуют только в тех случаях, когда $ka/l=r/s$ — несократимая рациональная дробь (см. § 8 гл. XII).

IV. *В области* $-l<x<0$ *содержится материал с термическими коэффициентами* K_1, ρ_1, c_1, $\varkappa_1$ *и* v_1, *а в области* $x>0$ — *материал с коэффициентами* K_2, ρ_2, $\varkappa_2$ *и* v_2. *Контактное сопротивление на границе отсутствует. В области* $x>0$ *в плоскости* x' *в момент времени* $t=0$ *действует единичный плоский мгновенный источник. При* $t>0$ *поверхность* $x=-l$ *поддерживается при нулевой температуре.*

Как и в § 8 гл. XII, решения можно представить либо в виде интегралов с бесконечными пределами, либо в виде бесконечных рядов, соответствующих бесконечному ряду изображений.

Так, например,

$$v_1 = \frac{2\sigma k}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\{\sin kux'\cos ul+\sigma\cos kux'\sin ul\}\sin u(l+x)}{\cos^2 ul+\sigma^2\sin^2 ul}e^{-\varkappa_1u^2t}\,du, \quad (6.15)$$

или

$$v_1 = \frac{\sigma}{(1+\sigma)\sqrt{\pi\varkappa_2 t}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left\{\exp\left[-\frac{(kx'-x+2nl)^2}{4\varkappa_1 t}\right]- \\ -\exp\left[-\frac{\{kx'+x+2(n+1)l\}^2}{4\varkappa_1 t}\right]\right\}, \quad (6.16)$$

где $\alpha=(\sigma-1)/(\sigma+1)$.

§ 7. Шар. Радиальный поток тепла

Фундаментальными решениями для радиального теплового потока в сферических областях *) служат решения для единичного мгновенного шарового поверхностного источника радиусом r', действующего в момент времени $t=0$. Решение для источника, действующего в неограниченной среде, имеет вид (см. (3.6) гл. X)

$$u = \frac{1}{8\pi r r' (\pi \varkappa t)^{1/2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(r-r')^2}{4\varkappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(r+r')^2}{4\varkappa t}\right] \right\}, \tag{7.1}$$

и, следовательно,

$$\bar{u} = \frac{1}{8\pi r r' \varkappa q} \{\exp[-q\,|r-r'|] - \exp[-q\,|r+r'|]\}. \tag{7.2}$$

Как и ранее, мы ищем решение в виде

$$v = u + w,$$

где w — решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 (rw)}{\partial r^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial (rw)}{\partial t} = 0; \tag{7.3}$$

кроме того, w должно обращаться в нуль при $t=0$ и должно иметь такое значение, чтобы v удовлетворяло граничным условиям.

I. *Шар $0 \leqslant r < a$ с температурой поверхности, равной нулю. В момент $t=0$ на поверхности $r=r'$ действует единичный поверхностный сферический мгновенный источник* **).

Здесь $\bar{w}$ должно удовлетворять вспомогательному уравнению

$$\frac{d^2 (rw)}{dr^2} - q^2 (r\bar{w}) = 0, \qquad 0 \leqslant r < a, \tag{7.4}$$

и иметь при $r=0$ конечное значение. Таким образом, мы должны иметь

$$\bar{w} = \frac{A \operatorname{sh} qr}{r}, \tag{7.5}$$

где A определяется из условия, что при $r=a$, $\bar{v}=0$, т. е. что

$$\frac{1}{8\pi a r' \varkappa q}\left\{e^{-q(a-r')} - e^{-q(a+r')}\right\} + \frac{A \operatorname{sh} qa}{a} = 0.$$

Используя это значение A, получим

$$\bar{v} = \frac{\operatorname{sh} qr \operatorname{sh} q(a-r')}{4\pi r r' \varkappa q \operatorname{sh} qa}, \qquad 0 < r < r'. \tag{7.6}$$

Если $a > r > r'$, то r и r' в этом соотношении следует поменять местами.

---

*) Функция Грина для шара, определенная в § 1 данной главы, служит решением для единичного мгновенного точечного источника в шаре (см. § 16 этой главы). Решение, которое приводится здесь для мгновенного шарового поверхностного источника, можно получить путем интегрирования (16.8) настоящей главы по источникам, равномерно распределенным по сфере. Однако задачи, в которых рассматривается радиальный тепловой поток, настолько важны, что нам представляется целесообразным вывести решение непосредственно, в частности при помощи метода, соответствующего методу, изложенному в § 2 для мгновенного плоского источника. Аналогичное замечание справедливо и для решений, приведенных в § 8 этой главы.

**) Здесь и далее автор имеет в виду равномерное распределение единичных источников на сферической поверхности. (*Прим. ред.*)

Используя обычным путем теорему обращения, найдем

$$v=\frac{1}{2\pi a r r'}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\sin\frac{n\pi r}{a}\sin\frac{n\pi r'}{a}. \tag{7.7}$$

Принимая, что на сфере $r=r'$ действует источник мощностью $4\pi r'^2 f(r')\,dr'$, и интегрируя по r' от 0 до a, получим для температуры в шаре с начальной температурой $f(r)$ и нулевой температурой поверхности величину, равную

$$\frac{2}{ar}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\sin\frac{n\pi r}{a}\int_0^a r' f(r')\sin\frac{n\pi r'}{a}\,dr'. \tag{7.8}$$

Решение для случая, когда температура поверхности равна $\varphi(t)$, получается таким же путем, как и в § 1 данной главы.

Вместе с тем, разлагая выражение (7.6) в ряд по отрицательным степеням показательных функций, находим решение

$$v=\frac{1}{8rr'\pi(\pi\varkappa t)^{1/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(2na-r+r')^2}{4\varkappa t}\right]-\exp\left[-\frac{(2na+r+r')^2}{4\varkappa t}\right]\right\}, \tag{7.9}$$

приводящее к решению (3.21) гл. IX для температуры в шаре с начальной температурой $f(r)$.

II. *Шар $0\leqslant r<a$, на поверхности которого происходит теплообмен*) со средой нулевой температуры. В момент времени $t=0$ на поверхности $r=r'$ действует единичный мгновенный поверхностный сферический источник.*

В данном случае

$$v=\frac{1}{2\pi a r r'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ah-1)^2+a^2\alpha_n^2}{a^2\alpha_n^2+ah(ah-1)}\sin r\alpha_n\sin r'\alpha_n e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{7.10}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$a\alpha\operatorname{ctg}a\alpha+(ah-1)=0. \tag{7.11}$$

III. *Шаровая оболочка $a<r<b$. В момент времени $t=0$ на поверхности $r=r'$ действует единичный мгновенный поверхностный сферический источник. Граничные условия имеют вид*

$$\left.\begin{aligned} &k_1\frac{\partial v}{\partial r}-h_1 v=0, \qquad r=a,\\ &k_2\frac{\partial v}{\partial r}+h_2 v=0, \qquad r=b, \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

где k_1, h_1, k_2 и h_2 — положительные величины или нули.

В данном случае

$$v=\frac{1}{2\pi rr'}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}R_n(r)R_n(r'), \tag{7.13}$$

---

*) Если $h=0$, т. е. тепловой поток на поверхности отсутствует, к правой части (7.10) надо добавить член $3/(4\pi a^3)$.

где

$$R_n(r)=\frac{\left(H^2+b^2k_2^2\alpha_n^2\right)^{1/2}\,[G\sin(r-a)\,\alpha_n+ak_1\alpha_n\cos(r-a)\,\alpha_n]}{\left\{(b-a)\left(a^2k_1^2\alpha_n^2+G^2\right)\left(b^2k_2^2\alpha_n^2+H^2\right)+(Hak_1+Gbk_2)\left(GH+abk_1k_2\alpha_n^2\right)\right\}^{1/2}} \qquad (7.14)$$

и α_n — положительные корни уравнения

$$(GH-abk_1k_2\alpha^2)\sin(b-a)\,\alpha+\alpha\,(ak_1H+bk_2G)\cos(b-a)\,\alpha=0. \qquad (7.15)$$

Если $h_1=h_2=0$, то к правой части решения (7.13) следует добавить член

$$\frac{3}{4\pi\,(b^3-a^3)}.$$

IV. *Область ограничена изнутри шаровой поверхностью $r=a$. В момент $t=0$ на поверхности $r=r'$ действует единичный мгновенный поверхностный сферический источник. Граничное условие на поверхности $r=a$ имеет вид*

$$k\frac{\partial v}{\partial r}-hv=0,$$

где $k\geqslant 0$, $h\geqslant 0$.

В данном случае

$$v=\frac{1}{8\pi rr'\,(\pi\varkappa t)^{1/2}}\left\{\exp\left[-\frac{(r-r')^2}{4\varkappa t}\right]+\exp\left[-\frac{(r+r'-2a)^2}{4\varkappa t}\right]-\right.$$
$$-\frac{ah+k}{ak}(4\pi\varkappa t)^{1/2}\exp\left[\varkappa t\left(\frac{ah+k}{ak}\right)^2+(r+r'-2a)\frac{ah+k}{ak}\right]\times$$
$$\left.\times\,\Phi^*\left[\frac{r+r'-2a}{2\sqrt{\varkappa t}}+\frac{ah+k}{ak}\sqrt{\varkappa t}\right]\right\}. \qquad (7.16)$$

§ 8. Цилиндр. Радиальный тепловой поток

В этом случае мы исходим из решения (3.5) гл. X для единичного мгновенного цилиндрического поверхностного источника, действующего в момент времени $t=0$ на поверхности $r=r'$ в неограниченной среде, т. е. из соотношения

$$u=\frac{1}{4\pi\varkappa t}\exp\left[-\frac{(r^2+r'^2)}{4\varkappa t}\right]I_0\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right). \qquad (8.1)$$

Отсюда, используя (22) приложения 5 при $\nu=0$, получим *)

$$\left.\begin{aligned}\bar u&=\frac{1}{2\pi\varkappa}I_0(qr')K_0(qr), \quad \text{когда} \quad r>r',\\ \bar u&=\frac{1}{2\pi\varkappa}I_0(qr)K_0(qr'), \quad \text{когда} \quad r<r'.\end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$

Как обычно, мы ищем решение в виде $v=u+w$, где $\bar w$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\bar w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar w}{dr}-q^2\bar w=0 \qquad (8.3)$$

и должно быть таким, чтобы $\bar v$ удовлетворяло граничным условиям.

I. *Область $0\leqslant r<a$ с температурой поверхности, равной нулю. В момент времени $t=0$ на поверхности $r=r'$ действует единичный мгновенный поверхностный цилиндрический источник.*

*) Эквивалентные решения приведены в [3, 24].

Решение уравнения (8.3), имеющее конечное значение в начале координат, записывается в виде $AI_0(qr)$, где A должно быть определено из условия, что $\bar{v}=0$ при $r=a$, т. е. что

$$AI_0(qa)+\frac{1}{2\pi\varkappa}I_0(qr')K_0(qa)=0.$$

Используя это значение A, получим

$$\bar{v}=\frac{I_0(qr')}{2\pi\varkappa I_0(qa)}\{I_0(qa)K_0(qr)-I_0(qr)K_0(qa)\},\qquad r>r'; \tag{8.4}$$

значение $\bar{v}$ для $0<r<r'$ получается, если поменять местами r и r' в соотношении (8.4). Используя обычным способом теорему обращения, найдем

$$v=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_n)J_0(r'\alpha_n)}{J_1^2(a\alpha_n)}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{8.5}$$

где $\pm\alpha_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — корни уравнения

$$J_0(a\alpha)=0.$$

Предполагая, что на поверхности r' действует источник мощностью $2\pi r'f(r')\,dr'$, интегрируя от 0 до a по r' и предполагая, что функция $f(r)$ такова, что можно поменять порядок интегрирования и суммирования, получим решение для цилиндра с температурой поверхности, равной нулю, и начальной температурой, равной $f(r)$, в виде

$$\frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1^2(a\alpha_n)}\int_0^a r'f(r')J_0(r'\alpha_n)\,dr'. \tag{8.6}$$

Таким же путем, воспользовавшись результатами § 1 данной главы, можно решать задачи с произвольными начальными температурами и произвольными температурами поверхности для рассматриваемых ниже областей.

II. *Цилиндр $0\leqslant r<a$. В момент $t=0$ на поверхности $r=r'$ действует единичный мгновенный поверхностный цилиндрический источник. Граничное условие при $r=a$ имеет вид*

$$k\frac{\partial v}{\partial r}+hv=0,$$

где $k\geqslant 0$, $h\geqslant 0$.

Этот случай включает в себя пример I, а также случай теплообмена на поверхности и случай равенства нулю теплового потока на поверхности.

$$v=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\frac{J_0(r\alpha_n)J_0(r'\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n)+J_1^2(a\alpha_n)}, \tag{8.7}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$k\alpha J_1(a\alpha)-hJ_0(a\alpha)=0.$$

Если $h=0$, то к правой части решения (8.7) надо прибавить член $1/\pi a^2$.

III. *Та же задача, что и* II, *но граничное условие* *) *при $r=a$ имеет вид*

$$k_1\frac{\partial v}{\partial t}+k_2\frac{\partial v}{\partial r}+k_3v=0, \tag{8.8}$$

---

*) Граничные условия этого типа рассмотрены в примере E § 9 гл. I. Легко произвести подобное обобщение и в приведенных ниже примерах IV и V.

где k_1, k_2, k_3 — положительные коэффициенты.

$$v = \frac{k_2}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n) J_0(r'\alpha_n)}{k_2 J_1^2(a\alpha_n) + (k_2 + 2\varkappa k_1/a) J_0^2(a\alpha_n)}, \tag{8.9}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$(k_3 - k_1\varkappa\alpha^2) J_0(a\alpha) - k_2\alpha J_1(a\alpha) = 0. \tag{8.10}$$

IV. *Полый цилиндр $a < r < b$. В момент времени $t = 0$ на поверхности $r = r'$ действует единичный мгновенный поверхностный цилиндрический источник. Граничные условия имеют вид*

$$k_1 \frac{\partial v}{\partial r} - k_2 v = 0, \quad r = a,$$

$$k_1' \frac{\partial v}{\partial r} + k_2' v = 0, \quad r = b.$$

В данном случае

$$v = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F(\alpha_n)} \alpha_n^2 \left[k_1'\alpha_n J_1(b\alpha_n) - k_2' J_0(b\alpha_n)\right]^2 C_0(r, \alpha_n) C_0(r', \alpha_n) e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{8.11}$$

где α_n — положительные корни уравнения (4.5) гл. XIII, а $F(\alpha_n)$ и $C_0(r, \alpha_n)$ определены соотношениями (4.9) и (4.11) той же главы; k_1, k_2, k_1', k_2' должны быть здесь больше или равны нулю. Если $k_2 = k_2' = 0$, то к правой части решения (8.11) следует прибавить член $\frac{1}{\pi(b^2 - a^2)}$.

V. *Область, ограниченная изнутри цилиндрической поверхностью $r = a$. В момент времени $t = 0$ на поверхности $r = r'$ действует мгновенный цилиндрический поверхностный источник. Граничное условие при $r = a$ имеет вид*

$$k \frac{\partial v}{\partial r} - hv = 0, \quad k \geqslant 0, \quad h \geqslant 0.$$

В данном случае

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\varkappa u^2 t} C(u, r) C(u, r') u \, du, \tag{8.12}$$

где

$$C(u, r) = \frac{J_0(ur)[kuY_1(au) + hY_0(au)] - Y_0(ur)[kuJ_1(au) + hJ_0(au)]}{\{[kuJ_1(au) + hJ_0(au)]^2 + [kuY_1(au) + hY_0(au)]^2\}^{1/2}}. \tag{8.13}$$

§ 9. Полуограниченное твердое тело $x > 0$. Трехмерные задачи

Для этого случая функция Грина, представляющая температуру в момент времени t в точке (x, y, z), обусловленную действием мгновенного единичного точечного источника в точке (x', y', z) в момент времени τ, когда граница $x = 0$ поддерживается при температуре, равной нулю (как и в примере II § 11 гл. X), имеет вид

$$u = \frac{1}{8[\pi\varkappa(t-\tau)]^{3/2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right] \right\}. \tag{9.1}$$

Кроме того, в обозначениях, принятых в § 1 данной главы, получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{x'}{8\pi^{3/2}\varkappa^{3/2}(t-\tau)^{5/2}} \exp\left[-\frac{x'^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right]. \tag{9.2}$$

Таким образом, если начальная температура тела равна $f(x, y, z)$, а при $t > 0$ температура на плоскости $x = 0$ поддерживается равной $F(y, z, t)$, то в соответствии с (1.1) данной главы решение имеет вид

$$v = \frac{1}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x', y', z') \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa t}\right] \right\} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\varkappa t}\right] f(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz' +$$
$$+ \frac{x}{8(\pi\varkappa)^{5/2}} \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{F(y', z', \tau)}{(t-\tau)^{5/2}} \exp\left\{-\frac{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right\} d\tau\,dy'\,dz'. \quad (9.3)$$

Для двумерной задачи, когда все величины не зависят от z, решение получается либо путем численной оценки в (9.3) интеграла по z', либо путем использования вместо (9.1) и (9.2) соответствующих решений для мгновенного линейного источника. Решение (9.3) подтверждает утверждение, сделанное в конце § 8 гл. X относительно непрерывных дублетов.

При наличии *на границе* $x = 0$ *теплообмена со средой нулевой температуры* функция Грина принимает вид

$$u = \frac{1}{8[\pi\varkappa(t-\tau)]^{3/2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right] \right\} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right] - \frac{h}{4\pi\varkappa(t-\tau)} \Phi^*\left\{ \frac{x+x'}{2\sqrt{\varkappa(t-\tau)}} + h\sqrt{\varkappa(t-\tau)} \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ h(x+x') + \varkappa h^2(t-\tau) - \frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\varkappa(t-\tau)} \right\}. \quad (9.4)$$

Чтобы подтвердить правильность этого решения, следует только отметить, что функция (9.4) удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности. Кроме того, в точке (x', y', z') оно стремится требуемым образом к бесконечности, а во всех остальных точках при $t \to 0$ оно равно нулю. При $x = 0$ оно удовлетворяет нашему граничному условию, поскольку этими свойствами обладает решение (2.6) настоящей главы. Иным способом решение можно найти методом, изложенным в следующем параграфе. Решение для области $x > 0$ при начальной температуре $f(x, y, z)$ и теплообмене со средой, имеющей температуру $\varphi(y, z, t)$, можно получить, воспользовавшись соотношением (1.2) данной главы.

§ 10. Область, ограниченная двумя параллельными плоскостями

Приведем сначала несколько изображений для температуры, обусловленной действием мгновенного точечного источника, которые являются основными при рассмотрении задач в цилиндрических областях.

Распределение температуры в неограниченной среде, обусловленное действием единичного источника в точке (x', y', z'), записывается следующим образом:

$$u = \frac{1}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{R^2+(z-z')^2}{4\varkappa t}\right], \quad (10.1)$$

где

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 = r'^2 + r^2 - 2rr'\cos(\theta-\theta'), \quad (10.2)$$

а (r, θ) и (r', θ') — координаты точек (x, y) и (x', y') в полярной системе. Используя (6) приложения 5, получим

$$\bar{u} = \frac{\exp\left[-q\sqrt{R^2+(z-z')^2}\right]}{4\pi\varkappa\sqrt{R^2+(z-z')^2}}. \quad (10.3)$$

или

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi^2\varkappa} \int_0^\infty \cos\xi(z - z') K_0(\eta, R)\, d\xi, \tag{10.4}$$

или

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi\varkappa} \int_0^\infty e^{-\eta|z-z'|} \frac{J_0(\xi R)}{\eta} \xi\, d\xi, \tag{10.5}$$

где

$$\eta = \sqrt{(\xi^2 + q^2)}. \tag{10.6}$$

При решении различных задач в цилиндрических областях изображения *) $\bar{u}$ (10.4) и (10.5) оказываются весьма полезными. Здесь нам потребуется только последнее.

I. *Плоскости имеют температуру, равную нулю.*

Рассмотрим плоскости $z = 0$ и $z = l$. Определим температуру в точке (x, y, z), обусловленную действием в момент времени $t = 0$ единичного мгновенного точечного источника в точке (x', y', z').

Ищем, как обычно, решение в виде $v = u + w$, где w должно удовлетворять дифференциальному уравнению теплопроводности и обращаться при $t = 0$ в нуль. Кроме того, оно должно быть таким, чтобы v удовлетворяло граничным условиям. Вспомогательное уравнение для w имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - q^2\bar{w} = 0. \tag{10.7}$$

Ему удовлетворяет функция

$$\bar{w} = \frac{1}{4\pi\varkappa} \int_0^\infty \frac{\xi}{\eta} J_0(\xi R) \{A \operatorname{sh} \eta z + B \operatorname{sh} \eta(l - z)\}\, d\xi, \tag{10.8}$$

где A и B — произвольные функции ξ. Они должны быть выбраны таким образом, чтобы $\bar{v}$, равное сумме выражений (10.5) и (10.8), обращалось при $z = 0$ и $z = l$ в нуль. Следовательно,

$$B \operatorname{sh} \eta l = -e^{-\eta z'} \quad \text{и} \quad A \operatorname{sh} \eta l = -e^{-\eta(l-z')}.$$

Используя эти значения и выражение (25) приложения 3, мы получим для $0 < z < z'$ соотношение

$$\bar{v} = \frac{1}{2\pi\varkappa} \int_0^\infty \frac{\xi J_0(\xi R) \operatorname{sh} \eta(l - z') \operatorname{sh} \eta z}{\eta \operatorname{sh} \eta l}\, d\xi. \tag{10.9}$$

Если $z' < z < l$, то решение имеет тот же вид, но z и z' меняются местами. Для того чтобы по $\bar{v}$ найти v, можно идти двумя путями. В первом случае мы представляем интеграл (10.9) в виде

$$\frac{1}{2\pi^2 i\varkappa} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\xi K_0(\xi R) \operatorname{sh}(l - z')(q^2 - \xi^2)^{1/2} \operatorname{sh} z(q^2 - \xi^2)^{1/2}\, d\xi}{(q^2 - \xi^2)^{1/2} \operatorname{sh} l(q^2 - \xi^2)^{1/2}} \tag{10.10}$$

и вычисляем его путем замыкания контура интегрирования дугой большой окружности в правой полуплоскости. Подынтегральная функция имеет полюсы при $\xi = q_m$, где $q_m = (q^2 + m^2\pi/l^2)^{1/2}$, $m = 1, 2, \ldots$

*) Эти изображения соответствуют случаям $\mu = -1/2$, $\nu = 0$ и $\mu = 0$, $\nu = 1/2$ [24].

Находя вычеты относительно них, окончательно получим

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi \varkappa l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z'}{l} K_0(q_m R). \tag{10.11}$$

Используя (23) приложения 5 и соотношение (2.6) гл. XII, находим

$$v = \frac{\exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right]}{2\pi\varkappa t l} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\varkappa m^2\pi^2 t}{l^2}\right] \sin \frac{m\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z'}{l}. \tag{10.12}$$

Отыскивая решение другим путем, можно написать функцию, изображение которой имеет вид

$$\frac{\operatorname{sh}(l-z')(q^2+\xi^2)^{1/2} \operatorname{sh} z(q^2+\xi^2)^{1/2}}{(q^2+\xi^2)^{1/2} \operatorname{sh} l(q^2+\xi^2)^{1/2}}, \tag{10.13}$$

в любой из двух следующих форм:

$$\frac{2\varkappa}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{l} \sin \frac{n\pi z'}{l} \exp\left[-\varkappa\xi^2 t - \frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right], \tag{10.14}$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa}{\pi t}\right)^{1/2} \exp(-\varkappa\xi^2 t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\exp\left[-\frac{(2nl+z'-z)^2}{4\varkappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(2nl-z'-z)^2}{4\varkappa t}\right]\right\}. \tag{10.15}$$

Допуская, что порядок интегрирования и обращения изображения в соотношении (10.9) можно изменить, и используя для интегрирования по ξ форму (10.14) и соотношение (29) приложения 3, снова получим решение (10.12). С другой стороны, аналогичное использование формы (10.15) дает следующее выражение:

$$v = \frac{1}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\exp\left[-\frac{(2nl+z'-z)^2}{4\varkappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(2nl-z'-z)^2}{4\varkappa t}\right]\right\}, \tag{10.16}$$

которое можно получить непосредственно в виде бесконечного ряда изображений в плоскостях $z=0$ и $z=l$. Равнозначность форм (10.14) и (10.15) дает другое доказательство справедливости этого решения, которое уже упоминалось в § 10 гл. X.

II. *Теплообмен на плоскостях $z=0$ и $z=l$ со средой, температура которой равна нулю.*

Этот случай можно рассматривать аналогичным образом. Решение для случая единичного мгновенного источника в точке (x', y', z), действующего в момент времени $t=0$, имеет вид

$$v = \frac{e^{-R^2/4\varkappa t}}{2\pi\varkappa t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n \cos\alpha_n z + h\sin\alpha_n z)(\alpha_n \cos\alpha_n z' + h\sin\alpha_n z')}{l\left(\alpha_n^2+h^2\right)+2h} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}, \tag{10.17}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha l = \frac{2\alpha h}{\alpha^2-h^2}.$$

III. *Тепловые потоки через плоскости $z=0$ и $z=l$ равны нулю.*

Решение для случая единичного мгновенного источника в точке (x', y', z'), действующего в момент времени $t=0$, имеет вид

$$v=\frac{1}{4\pi l\varkappa t}\exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right]\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\cos\frac{n\pi z}{l}\cos\frac{n\pi z'}{l}\right\}, \quad (10.18)$$

или

$$v=\frac{1}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}}\exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(2nl+z'-z)^2}{4\varkappa t}\right]+\exp\left[-\frac{(2nl-z'-z)^2}{4\varkappa t}\right]\right\}. \quad (10.19)$$

Последнее соотношение можно получить из рассмотрения бесконечного ряда изображений. Следует отметить, что решение (10.18) нельзя получить, положив в формуле (10.17) $h=0$.

IV. *Совокупность источников, образующих в неограниченной среде прямоугольную решетку.*

Если в решении (10.18) принять $z'=\frac{1}{2}l$, то мы получим температуру в точке (x, y, z), обусловленную действием в точках $z'=\frac{1}{2}l\pm nl$ ряда мгновенных точечных источников. Аналогичным образом температура, обусловленная действием бесконечной прямоугольной решетки мгновенных источников, расположенных в точках $x'=\frac{1}{2}a\pm na$, $z'=\frac{1}{2}l\pm nl$, записывается в виде *)

$$\frac{1}{2al(\pi\varkappa t)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4\varkappa t}\right]\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left[-\frac{4\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\cos\frac{2\pi nz}{l}\right\}\times$$
$$\times\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left[-\frac{4\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\cos\frac{2n\pi x}{a}\right\}. \quad (10.20)$$

Соответствующие решения для расположения источников в трехмерном пространстве можно получить аналогичным путем. Для случая прямоугольной решетки линейных источников, параллельных оси y, интегрирование выражения (10.20) дает

$$\frac{1}{al}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left[-\frac{4\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\cos\frac{2n\pi z}{l}\right\}\times$$
$$\times\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left[-\frac{4\varkappa n^2\pi^2 t}{a^2}\right]\cos\frac{2n\pi x}{a}\right\}. \quad (10.21)$$

§ 11. Полуограниченное твердое тело $z>0$ с тонкой пленкой на плоскости $z=0$ из материала, имеющего значительно бо́льшую теплопроводность **). В точке $(0, 0, z')$ расположен единичный мгновенный источник

Следует решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0, \qquad r>0,\ z>0, \quad (11.1)$$

при граничном условии (см. (9.21) гл. I)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+h\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial v}{\partial t}=0, \qquad r>0,\ z=0, \quad (11.2)$$

*) Решение (10.20) проще всего вывести, записав выражение для ряда изображений в направлении x и использовав общее решение, которое получается из формул (10.18) и (10.19).

**) Здесь мы имеем дело с функцией Грина для полубесконечного твердого тела при диффузии на его поверхности. Другие задачи подобного типа рассмотрены в [29, 30].

где $h = K/dK$. Если из уравнения (11.1) при $z=0$ вычесть (11.2), то наше граничное условие примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - h\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{1}{\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad r > 0, \quad z = 0. \tag{11.3}$$

Как и в предыдущем параграфе, ищем решение в виде $v = u + w$, где $\bar{u}$ определяется соотношением (10.5) данной главы, а

$$\bar{w} = \frac{1}{4\pi\varkappa}\int_0^\infty \frac{A\xi J_0(\xi r)}{\eta} e^{-\eta z}\, d\xi. \tag{11.4}$$

Здесь A следует найти из условия (11.3). Действуя далее так же, как и в предыдущем параграфе, окончательно получим для $z' > z > 0$

$$\bar{v} = \frac{1}{2\pi\varkappa}\int_0^\infty \frac{\xi J_0(\xi r)\,[(p + \varkappa_1\xi^2)\operatorname{sh}\eta z + \varkappa_1 h\eta \operatorname{ch}\eta z]}{\eta\,(p + \varkappa_1\xi^2 + \varkappa_1 h\eta)} e^{-\eta z'}\, d\xi. \tag{11.5}$$

Для простоты определим v только для плоскости $z=0$. Тогда соотношение (11.5) принимает вид

$$\bar{v} = \frac{h\varkappa_1}{2\pi\varkappa}\int_0^\infty \frac{\xi J_0(\xi r)\, e^{-\eta z'}\, d\xi}{\varkappa_1\xi^2 + \varkappa_1 h\eta + p} =$$

$$= \frac{h\varkappa_1}{2\pi\varkappa}\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\, d\xi \int_1^\infty \exp\{-\eta z' - (\zeta - 1)[\varkappa_1\xi^2 + \varkappa_1 h\eta + p]\}\, d\zeta. \tag{11.6}$$

Применим теперь к этому соотношению теорему обращения, помня, что $\eta = [(p/\varkappa) + \xi^2]^{1/2}$, и допуская здесь и далее, что порядки интегрирования можно изменять. Используя теоремы VI и VII, приведенные в § 2 гл. XII, и выражение (6) приложения 5, получим

$$v = \frac{h\varkappa_1}{2\pi\varkappa}\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\, d\xi \int_1^\infty \exp\left\{-\xi^2[\varkappa t + (\varkappa_1 - \varkappa)(\zeta - 1)] - \frac{[z' + (\zeta - 1)h\varkappa_1]^2}{4\varkappa(t + 1 - \zeta)}\right\} \times$$

$$\times \frac{[z' + h\varkappa_1(\zeta - 1)]\, H(t - \zeta + 1)}{2(\pi\varkappa)^{1/2}(t + 1 - \zeta)^{3/2}}\, d\zeta.$$

Используя при взятии интеграла по ξ выражение (29) приложения 3, окончательно получим

$$v = \frac{hk}{8(k-1)^{1/2}(\pi\varkappa t)^{3/2}}\int_1^k \exp\left\{-\frac{[z'(k-1) + hk\varkappa t(x-1)]^2}{4\varkappa t(k-1)(k-x)} - \frac{r^2}{4\varkappa t x}\right\} \times$$

$$\times \frac{[z'(k-1) + hk\varkappa t(x-1)]\, dx}{x(k-x)^{3/2}}, \tag{11.7}$$

где $k = \varkappa_1/\varkappa$.

§ 12. Неограниченное составное твердое тело. В точке *) (0, 0, z') действует мгновенный единичный источник

Предположим, что в области $z > 0$ находится вещество с термическими коэффициентами K_1, ρ_1, c_1, $\varkappa_1$, а в области $z < 0$ — вещество с коэффициентами K_2, ρ_2, c_2, $\varkappa_2$ и что на границе $z = 0$ контактное сопротивление отсутствует. Обозначим температуру в области $z > 0$ через v_1, а в области $z < 0$ — через v_2. Тогда, если в точке

*) Эта задача имеет большое практическое значение, поскольку с ней довольно часто сталкиваются на практике, например при нагревании трением или при «охлаждении» нейтронов. Изложение этой задачи приведено в [25].

$(0, 0, z')$ в области $z > 0$ находится единичный источник, то, используя метод, изложенный в § 10 данной главы, получим изображения для температур в этих двух областях в виде

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{4\pi\varkappa_1}\int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\eta_1|z-z'|}}{\eta_1} - \frac{e^{-\eta_1(z+z')}}{\eta_1} + \frac{2K_1 e^{-\eta_1(z+z')}}{K_1\eta_1 + K_2\eta_2} \right\} \xi J_0(\xi r)\, d\xi \qquad (12.1)$$

и

$$\bar{v}_2 = \frac{K_1}{2\pi\varkappa_1}\int_0^\infty \frac{e^{\eta_2 z - \eta_1 z'}}{K_1\eta_1 + K_2\eta_2}\, \xi J_0(\xi r)\, d\xi, \qquad (12.2)$$

где

$$\eta_1 = [\xi^2 + (p/\varkappa_1)]^{1/2}, \qquad \eta_2 = [\xi^2 + (p/\varkappa_2)]^{1/2}. \qquad (12.3)$$

Чтобы определить v_2, исключим из знаменателя формулы (12.2) величину $K_1\eta_1 + K_2\eta_2$, воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{K_1\eta_1 + K_2\eta_2} = \int_0^\infty e^{-\zeta(K_1\eta_1 + K_2\eta_2)}\, d\zeta.$$

Допуская, что порядки интегрирования можно менять, получим (см. (2.10) гл. XII и (6) приложения 5)

$$v_2 = \frac{K_1}{2\pi\varkappa_1}\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\, d\xi \int_0^\infty d\zeta \int_0^t \frac{(\zeta K_1 + z')(\zeta K_2 - z)\, d\tau}{4\pi(\varkappa_1\varkappa_2)^{1/2}\tau^{3/2}(t-\tau)^{3/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{ -\varkappa_1\xi^2\tau - \varkappa_2\xi^2(t-\tau) - \frac{(\zeta K_1 + z')^2}{4\varkappa_1\tau} - \frac{(\zeta K_2 - z)^2}{4\varkappa_2(t-\tau)} \right\}.$$

Интеграл по ξ можно взять при помощи соотношения (29) приложения 3, а интеграл по ζ хотя и сложен, но элементарен. Окончательное решение, выраженное через безразмерные величины,

$$Z = -\frac{z}{(\varkappa_1 t)^{1/2}}, \quad Z' = \frac{z'}{(\varkappa_1 t)^{1/2}}, \quad R = \frac{r}{(\varkappa_1 t)^{1/2}}, \quad \sigma = \frac{K_2\varkappa_1^{1/2}}{K_1\varkappa_2^{1/2}}, \quad k = \frac{\varkappa_1^{1/2}}{\varkappa_2^{1/2}}, \qquad (12.4)$$

будет иметь вид

$$v_2 = \frac{k^2}{8\pi^2(\varkappa_1 t)^{3/2}}\int_0^1 \frac{\exp[-k^2R^2/4(k^2u + 1 - u)]}{(k^2u + 1 - u)\, u^{1/2}(1-u)^{1/2}} \cdot f(Z, Z', k, \sigma, u)\, du, \qquad (12.5)$$

где

$$f(Z, Z', k, \sigma, u) = \frac{kZ(1-u) + \sigma^3 uZ'}{(1 - u + \sigma^2 u)^2}\exp\left\{ -\frac{Z'^2(1-u) + k^2Z^2u}{4u(1-u)} \right\} +$$
$$+ \frac{\sigma\pi^{1/2}u^{1/2}(1-u)^{1/2}}{(1 - u + \sigma^2 u)^{5/2}}\left\{ 1 - \frac{(kZ - \sigma Z')^2}{2(1 - u + \sigma^2 u)} \right\} \times$$
$$\times \Phi^*\left\{ \frac{(1-u)Z' + \sigma kZu}{2u^{1/2}(1-u)^{1/2}(1 - u + \sigma^2 u)^{1/2}} \right\}\exp\left\{ -\frac{(\sigma Z' - kZ)^2}{4(1 - u + \sigma^2 u)} \right\}. \qquad (12.6)$$

Аналогичным путем можно найти и выражение для v_1, имеющее такой же вид.

§ 13. Области, ограниченные цилиндрической поверхностью $r = a$

I. *Рассмотрим сперва температуру в точке* (r, θ, z) *внутри цилиндра* $r \leqslant a$, *обусловленную действием в момент времени* $t = 0$ *единичного мгновенного источника в точке* $(r', \theta', 0)$. *Температура поверхности* $r = a$ *поддерживается равной нулю.*

В данном случае мы исходим из формулы (10.4) этой главы для $\bar{u}$ и используем для входящей в нее функции Бесселя $K_0(\eta R)$ теорему сложения [3,24].

$$\left.\begin{aligned} K_0(\eta R) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\theta-\theta') I_n(\eta r) K_n(\eta r'), \quad r < r', \\ K_0(\eta R) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\theta-\theta') I_n(\eta r') K_n(\eta r), \quad r > r'. \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

Ищем, как и ранее, решение в виде $v = u + w$, где $\bar{w}$ должно удовлетворять (10.7) данной главы, должно быть ограниченным при $r = 0$ и должно быть таким, чтобы $\bar{u} + \bar{w} = 0$ при $r = a$. Тогда

$$\bar{w} = -\frac{1}{2\pi^2\varkappa} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\theta-\theta') \int_0^{\infty} \cos \xi z \frac{I_n(\eta r) I_n(\eta r') K_n(\eta a)}{I_n(\eta a)} d\xi, \tag{13.2}$$

где η определяется соотношением (10.6) этой главы. Отсюда следует, что для $r > r'$

$$\bar{v} = \frac{1}{2\pi^2\varkappa} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\theta-\theta') \int_0^{\infty} \cos \xi z \frac{I_n(\eta r') F_n(\eta a, \eta r)\, d\xi}{I_n(\eta a)}, \tag{13.3}$$

где

$$F_n(x, y) = I_n(x) K_n(y) - K_n(x) I_n(y).$$

Если $r < r'$, то в соотношении (13.3) следует поменять местами r и r'. Интегралы в соотношении (13.3) берут, рассматривая интеграл

$$\int e^{i\xi z} \frac{I_n(\eta r') F_n(\eta a, \eta r)\, d\xi}{I_n(\eta a)}$$

по контуру, состоящему из вещественной оси и большой полуокружности в верхней полуплоскости (для $z > 0$), не проходящей ни через один из полюсов подынтегральной функции. Эти полюсы находятся в точках $\xi = i\sqrt{q^2 + \alpha^2}$, где α — положительные корни уравнения

$$J_n(a\alpha) = 0. \tag{13.4}$$

Обозначая символом $\sum_{\alpha}$ суммирование по таким корням и находя вычеты относительно этих полюсов, окончательно получим

$$\bar{v} = \frac{1}{2\pi\varkappa a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\theta-\theta') \sum_{\alpha} \frac{e^{-|z|\sqrt{q^2+\alpha^2}}}{\sqrt{(q^2+\alpha^2)}} \frac{J_n(\alpha r) J_n(\alpha r')}{[J_n'(a\alpha)]^2}. \tag{13.5}$$

Отсюда, используя выражение (7) приложения 5, находим

$$v = \frac{e^{-z^2/4\varkappa t}}{2\pi a^2 \sqrt{\pi\varkappa t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\theta-\theta') \sum_{\alpha} e^{-\varkappa\alpha^2 t} \frac{J_n(\alpha r) J_n(\alpha r')}{[J_n'(a\alpha)]^2}. \tag{13.6}$$

Решение для линейного источника, параллельного оси z, получается путем интегрирования соотношения (13.6) по z; его можно получить и непосредственно методом, аналогичным описанному выше. Решение (8.5) данной главы для цилиндрического поверхностного источника получается путем интегрирования по θ'.

II. *Задача, аналогичная задаче I, но на поверхности $r = a$ происходит теплообмен со средой, температура которой равна нулю.*

$$v = \frac{\exp\left[-\frac{z^2}{4\varkappa t}\right]}{2\pi a^2 \sqrt{\pi\varkappa t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\theta - \theta') \sum_{\alpha} \exp(-\varkappa\alpha^2 t) \frac{\alpha^2 J_n(\alpha r) J_n(\alpha r')}{[\alpha^2 + h^2 - (n^2/a^2)] J_n(\alpha a)}, \qquad (13.7)$$

где суммирование производят по положительным корням уравнения $\alpha J_n'(\alpha a) + hJ_n(\alpha a) = 0$. Если $h = 0$, то к соотношению (13.7) необходимо прибавить дополнительный член

$$\frac{\exp\left[-\frac{z^2}{4\varkappa t}\right]}{2a^2\pi(\pi\varkappa t)^{1/2}}.$$

III. *В момент времени $t = 0$ в области, ограниченной изнутри поверхностью $r = a$, в точке $(r', \theta', 0)$ действует единичный мгновенный точечный источник. Поверхность $r = a$ поддерживается при температуре, равной нулю.*

$$v = \frac{\exp\left[-\frac{z^2}{4\varkappa t}\right]}{4\pi\sqrt{\pi\varkappa t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\theta - \theta') \int_0^{\infty} \alpha \exp[-\varkappa\alpha^2 t] \frac{U_n(\alpha r) U_n(\alpha r')}{J_n^2(a\alpha) + Y_n^2(a\alpha)} d\alpha, \qquad (13.8)$$

где

$$U_n(\alpha r) = J_n(\alpha r) Y_n(\alpha a) - J_n(\alpha a) Y_n(\alpha r). \qquad (13.9)$$

IV. *Задача, аналогичная задаче III, но на поверхности $r = a$ происходит теплообмен со средой, температура которой равна нулю.*

$$v = \frac{\exp\left[-\frac{z^2}{4\varkappa t}\right]}{4\pi\sqrt{\pi\varkappa t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\theta - \theta') \int_0^{\infty} C_n(ur) C_n(ur') u e^{-\varkappa u^2 t} du,$$

где

$$C_n(z) = \frac{J_n(z)\left[uY_n'(au) - hY_n(au)\right] - Y_n(z)\left[uJ_n'(au) - hJ_n(au)\right]}{\left\{\left[uJ_n'(au) - hJ_n(au)\right]^2 + \left[uY_n'(au) - hY_n(au)\right]^2\right\}^{1/2}}.$$

§ 14. Клин $0 < \theta < \theta_0$

I. *Температура поверхности равна нулю.*

Рассмотрим случай, когда в момент $t = 0$ в точке $(r', \theta', 0)$ действует единичный мгновенный источник. Используя формулу (10.4) данной главы для $\bar{u}$, а также тот факт *), что при действительных и положительных r, r' и λ $0 < \theta - \theta' < 2\pi$ и $r > r'$, получим

$$K_0(\lambda R) = P.V. \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\cos\nu(\pi - \theta + \theta')}{\sin\nu\pi} K_\nu(\lambda r) I_\nu(\lambda r') i\, d\nu, \qquad (14.1)$$

где $P.V.$ означает, что при $\nu = 0$ берется главное значение **). Таким образом, при $\theta_0 > \theta > \theta'$ и $r > r'$, можем написать

$$\bar{u} = \frac{i}{2\pi^2\varkappa} \int_0^{\infty} \cos\xi z \left[P.V. \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\cos\nu(\pi - \theta + \theta')}{\sin\nu\pi} I_\nu(\eta r') K_\nu(\eta r)\, d\nu\right] d\xi. \quad (14.2)$$

---

*) Это легко доказать, замкнув контур большой полуокружностью на правой полуплоскости и использовав теорему Коши [3].

**) $P.V. \int_a^b f(\nu)\,d\nu = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{-\varepsilon} f(\nu)\,d\nu + \int_{\varepsilon}^b f(\nu)\,d\nu\right\}$ — это главное значение интеграла при $\nu = 0$ в смысле Коши. (*Прим. ред.*)

Тогда

$$\bar{w} = -\frac{i}{2\pi^2\varkappa}\int_0^\infty \cos\xi z \times$$

$$\times\left[P.V. \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\cos\nu(\pi-\theta_0+\theta')\sin\nu\theta+\cos\nu(\pi-\theta')\sin\nu(\theta_0-\theta)}{\sin\nu\pi\sin\nu\theta_0} I_\nu(\eta r')K_\nu(\eta r)\,d\nu\right]d\xi,$$

поскольку это выражение удовлетворяет уравнению для $\bar{w}$ и при $\theta=0$ и $\theta=\theta_0$ $\bar{v}$, равное $\bar{u}+\bar{w}$, обращается в нуль. Кроме того, поскольку путь интегрирования может проходить через $\nu=0$,

$$\bar{v} = -\frac{i}{\pi^2\varkappa}\int_0^\infty \cos\xi z\left[\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\sin\nu\theta'\sin\nu(\theta_0-\theta)}{\sin\nu\theta_0} I_\nu(\eta r')K_\nu(\eta r)\,d\nu\right]d\xi. \tag{14.3}$$

Если $0<\theta<\theta'$, то θ и θ' в соотношении (14.3) следует поменять местами, а если $0<r<r'$, то следует поменять местами r и r'.

Интеграл в скобках берут, замыкая контур $(-\infty i, \infty i)$ большой полуокружностью в правой полуплоскости и вычисляя вычеты относительно полюсов $n\pi/\theta_0$ подынтегральной функции. Положим, что

$$s=\frac{n\pi}{\theta_0}, \tag{14.4}$$

а суммирование по значениям s от $n=1$ до ∞ обозначим символом $\sum_s$. Тогда для $r>r'$ и $0<\theta<\theta_0$ получим

$$\bar{v}=\frac{2}{\pi\varkappa\theta_0}\sum_s \sin s\theta\sin s\theta'\int_0^\infty \cos\xi z I_s(\eta r')K_s(\eta r)\,d\xi. \tag{14.5}$$

Далее, из (22) приложения 5 и соотношения (2.6) гл. XII следует, что если $r>r'$, то $I_s(\eta r')K_s(\eta r)$ есть изображение функции

$$\frac{1}{2t}\exp\left\{-\varkappa\xi^2 t-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right\}I_s\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right). \tag{14.6}$$

Из формулы (14.5) вытекает, что для всех значений r и θ

$$v=\frac{1}{\pi\varkappa\theta_0 t}\sum_s \sin s\theta\sin s\theta' I_s\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right)\exp\left[-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right]\int_0^\infty \cos\xi z\exp(-\varkappa\xi^2 t)\,d\xi,$$

или

$$v=\frac{1}{2\theta_0\pi^{1/2}(\varkappa t)^{3/2}}\exp\left[-\frac{z^2}{4\varkappa t}\right]\sum_s \exp\left[-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right]I_s\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right)\sin s\theta\sin s\theta'. \tag{14.7}$$

II. *Тепловой поток на поверхности равен нулю.*

Аналогичные рассуждения показывают, что решение для единичного мгновенного точечного источника, находящегося в $(r', \theta', 0)$ в момент $t=0$, имеет вид

$$v=\frac{1}{4\theta_0\pi^{1/2}(\varkappa t)^{3/2}}\exp\left[-\frac{z^2+r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right]\left\{I_0\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right)+2\sum_s \cos s\theta\cos s\theta' I_s\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right)\right\}. \tag{14.8}$$

III. *Клин с углом раствора* 2π.

В этом частном случае [26] *), когда граничная поверхность представляет собой полуплоскость $y=0$, $x>0$, для функции Грина существует простое явное выражение, а именно:

$$\frac{1}{16(\pi\varkappa t)^{3/2}}\left\{\exp\left[-\frac{z^2+R^2}{4\varkappa t}\right]\left[1+\Phi\left\{\left(\frac{rr'}{\varkappa t}\right)^{1/2}\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta')\right\}\right]\mp\right.$$
$$\left.\mp\exp\left[-\frac{z^2+R'^2}{4\varkappa t}\right]\left[1+\Phi\left\{\left(\frac{rr'}{\varkappa t}\right)^{1/2}\cos\frac{1}{2}(\theta+\theta')\right\}\right]\right\}, \quad (14.9)$$

где

$$R^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta'),\qquad R'^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta+\theta'). \quad (14.10)$$

Отрицательный знак берется в тех случаях, когда полуплоскость имеет нулевую температуру, а положительный — когда тепловой поток через нее равен нулю.

§ 15. Цилиндрическая область

Функции Грина для любой области, ограниченной координатными поверхностями цилиндрической системы координат, можно получить с помощью методов, изложенных в нескольких предыдущих параграфах [27].

Например, для изображения температуры в точке (r, θ, z), обусловленной действием в момент времени $t=0$ в точке (r', θ', z') области $0<z<l$, $0\leqslant r<a$ единичного мгновенного точечного источника, когда поверхность поддерживается при нулевой температуре, имеем

$$\bar{v}=\frac{1}{\pi\varkappa l}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi z}{l}\sin\frac{m\pi z'}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{I_n(rq_m)F_n(aq_m, r'q_m)}{I_n(aq_m)}\cos n(\theta-\theta'), \quad (15.1)$$

где

$$q_m=\sqrt{(q^2+m^2\pi^2/l^2)},\quad r<r' \quad \text{и} \quad F_n(x, y)=I_n(x)K_n(y)-K_n(x)I_n(y).$$

При $r\geqq r'$ получим

$$v=\frac{2}{\pi a^2 l}\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa m^2\pi^2 t}{l^2}\right]\sin\frac{m\pi z}{l}\sin\frac{m\pi z'}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos n(\theta-\theta')\times$$
$$\times\sum_{\alpha}\exp(-\varkappa\alpha^2 t)\frac{J_n(\alpha r)J_n(\alpha r')}{[J_n'(\alpha a)]^2}, \quad (15.2)$$

где α — положительные корни уравнения $J_n(\alpha a)=0$.

С другой стороны, если поверхность области $a<r<b$, $0<r<l$, $0<\theta<\theta_0$ подерживается при нулевой температуре, а в точке (r', θ', z') в момент времени $t=0$ действует единичный мгновенный точечный источник, то температура в точке (r, θ, z) в момент времени t записывается в виде

$$\frac{2\pi^2}{l\theta_0}\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa m^2\pi^2 t}{l^2}\right]\sin\frac{m\pi z}{l}\sin\frac{m\pi z'}{l}\sum_{s}\sin s\theta\sin s\theta'\times$$
$$\times\sum_{\alpha}\frac{\alpha^2\exp(-\varkappa\alpha^2 t)J_s^2(\alpha b)U_s(\alpha r)U_s(\alpha r')}{J_s^2(\alpha a)-J_s^2(\alpha b)}, \quad (15.3)$$

где s и $U_s(\alpha r)$ определены соответственно выражениями (14.4) и (13.9) данной главы а α — положительные корни уравнения $U_s(\alpha b)=0$.

*) Это решение легко получить методом изображений в римановом пространстве (см. § 12 гл. X).

§ 16. Области, ограниченные сферической поверхностью $r=a$

Требуется найти температуру в точке со сферическими координатами (r, θ, φ), обусловленную действием единичного мгновенного точечного источника, расположенного в начальный момент времени в точке $(r', 0, 0)$.

Температура u в точке (r, θ, φ), обусловленная действием такого источника в неограниченной среде, равна

$$u=\frac{1}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}}\exp\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right], \tag{16.1}$$

где

$$R^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta. \tag{16.2}$$

Тогда из выражения (6) приложения 5 получим

$$\bar{u}=\frac{1}{4\pi\varkappa R}e^{-qR}. \tag{16.3}$$

Применяя одну из теорем сложения для функций Бесселя (см. [24]) можно выразить $\bar{u}$ в форме, удобной для использования в сферической системе координат, а именно в форме

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=\frac{1}{4\pi\varkappa\sqrt{rr'}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)K_{n+\frac{1}{2}}(qr')I_{n+\frac{1}{2}}(qr)P_n(\mu), \quad \text{когда} \quad r<r',\\ \bar{u}&=\frac{1}{4\pi\varkappa\sqrt{rr'}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)K_{n+\frac{1}{2}}(qr)I_{n+\frac{1}{2}}(qr')P_n(\mu), \quad \text{когда} \quad r>r',\end{aligned}\right\} \tag{16.4}$$

где $\mu=\cos\theta$.

I. *В шаре* $0\leqslant r<a$ *действует источник. Поверхность* $r=a$ *имеет температуру, равную нулю.*

Пусть, как обычно, $v=u+w$, где функция w должна удовлетворять уравнению теплопроводности, обращаться в нуль при $t=0$ и быть такой, чтобы v (равное $u+w$) при $r=a$ обращалось в нуль.

Функция $\bar{w}$ должна удовлетворять вспомогательному уравнению

$$\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\bar{w}}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)-q^2\bar{w}=0. \tag{16.5}$$

Его решение, имеющее конечное значение в начале координат, имеет вид

$$\bar{w}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n r^{-1/2}I_{n+1/2}(qr)P_n(\mu), \tag{16.6}$$

где коэффициенты A_n следует определять из условия, что $\bar{u}+\bar{w}$ при $r=a$ обращается в нуль. Тогда, используя соотношение (16.4), получим

$$A_n=-\frac{(2n+1)K_{n+1/2}(qa)I_{n+1/2}(qr')}{4\pi\varkappa\sqrt{r'}\,I_{n+1/2}(qa)}.$$

Таким образом, когда $0 < r < r'$,

$$\bar{v} = \frac{1}{4\pi\varkappa\sqrt{rr'}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_{n+1/2}(qr')\, I_{n+1/2}(qa) - I_{n+1/2}(qr')\, K_{n+1/2}(qa)}{I_{n+1/2}(qa)} \times$$

$$\times (2n+1)\, I_{n+1/2}(qr)\, P_n(\mu). \quad (16.7)$$

Если же $r' < r < a$, то r и r' в соотношении (16.7) следует поменять местами.

Функцию v находят, применяя обычным образом теорему обращения к членам соотношения (16.7). Это дает

$$v = \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{rr'}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha} e^{-\varkappa\alpha^2 t} \frac{J_{n+1/2}(\alpha r)\, J_{n+1/2}(\alpha r')}{\left[J'_{n+1/2}(a\alpha)\right]^2} (2n+1)\, P_n(\mu), \quad (16.8)$$

где α — положительные корни уравнения

$$J_{n+1/2}(a\alpha) = 0. \quad (16.9)$$

Чтобы найти температуру в точке $P(r, \theta, \varphi)$, обусловленную действием в точке $P'(r', \theta', \varphi')$ единичного мгновенного источника, используем решение (16.8), в котором μ заменено на $\cos\gamma$, где γ — угол POP'. Кроме того, известно, что

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\mu)\, P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu)\, P_n^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (16.10)$$

где $\mu = \cos\theta$, а $\mu' = \cos\theta'$. При помощи этих результатов можно найти температуру в шаре $0 \leqslant r < a$ с произвольной начальной температурой и произвольной температурой поверхности.

II. *Задача, аналогичная задаче I, но на поверхности $r = a$ происходит теплообмен со средой, температура которой равна нулю*

$$v = \frac{1}{2\pi\sqrt{rr'}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(\mu) \sum_{\alpha} \frac{\alpha^2 e^{-\varkappa\alpha^2 t} J_{n+1/2}(r\alpha)\, J_{n+1/2}(r'\alpha)}{\left[\left(ah - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2\alpha^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right] J^2_{n+1/2}(a\alpha)}, \quad (16.11)$$

где α — положительные корни уравнения

$$\left(ah - \frac{1}{2}\right) J_{n+1/2}(a\alpha) + a\alpha J'_{n+1/2}(a\alpha) = 0. \quad (16.12)$$

Если тепловой поток равен нулю ($h = 0$), то к правой части (16.11) следует добавить член $(3/4\pi a^3)$.

III. *Область ограничена изнутри сферой $r = a$. В момент времени $t = 0$ в точке $(r', 0, 0)$ действует единичный мгновенный точечный источник. Поверхность $r = a$ поддерживается при температуре, равной нулю.*

$$v = \frac{1}{4\pi\sqrt{rr'}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(\mu) \int_0^{\infty} \frac{C_{n+1/2}(ur)\, C_{n+1/2}(ur')}{J^2_{n+1/2}(au) + Y^2_{n+1/2}(au)} e^{-\varkappa u^2 t} u\, du, \quad (16.13)$$

где

$$C_{n+1/2}(z) = J_{n+1/2}(z)\,Y_{n+1/2}(ua) - Y_{n+1/2}(z)\,J_{n+1/2}(ua).$$

IV. *Задача, аналогичная задаче III, но на поверхности $r = a$ происходит теплообмен со средой, температура которой равна нулю.*

$$v = \frac{1}{4\pi\sqrt{rr'}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) \int_0^{\infty} e^{-\varkappa u^2 t} F_{n+1/2}(ur)\, F_{n+1/2}(ur')\, u\, du, \qquad (16.14)$$

где

$$F_\nu(ur) = \frac{(2ah+1)\,[J_\nu(ur)\,Y_\nu(ua) - Y_\nu(ur)\,J_\nu(ua)] - 2au\,[J_\nu(ur)\,Y'_\nu(ua) - Y_\nu(ur)\,J'_\nu(ua)]}{\left\{[(2ah+1)\,J_\nu(ua) - 2uaJ'_\nu(ua)]^2 + [(2ah+1)\,Y_\nu(ua) - 2uaY'_\nu(ua)]^2\right\}^{1/2}}. \qquad (16.15)$$

§ 17. Конус $0 \leqslant \theta < \theta_0$

Предположим, что в момент времени $t = 0$ в точке $(r', 0, 0)$ действует единичный мгновенный источник. Как и раньше, будем исходить из значений u и $\bar{u}$, определяемых уравнениями (16.1) и (16.3) предыдущего параграфа. Будем искать выражение для $\bar{u}$, пригодное в случае конической граничной поверхности. Это достигается путем использования интеграла для e^{-qR}/R или $(2q/\pi R)^{1/2} K_{1/2}(qR)$, аналогичного интегралу (14.1) данной главы для $K_0(qR)$, полученному для соответствующей задачи с клином.

Требуемое решение *) [28] для случая, когда $r > r'$ и $\operatorname{Re}(q) > 0$, имеет вид

$$\int_C \frac{(2\nu+1)\, I_{\nu+1/2}(qr')\, K_{\nu+1/2}(qr)\, P_\nu(-\mu)\, d\nu}{\sin \nu\pi} =$$

$$= 2i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, K_{n+1/2}(qr)\, I_{n+1/2}(qr')\, P_n(\mu), \qquad (17.1)$$

где C — контур, начинающийся на бесконечности в первом квадранте, проходящий через точку $(-1/2)$ и заканчивающийся на бесконечности в четвертом квадранте.

Чтобы найти температуру в точке (r, θ, φ), обусловленную действием источника в случае, когда поверхность конуса $\theta = \theta_0$ поддерживается при температуре, равной нулю, будем исходить из величины, определяемой соотношениями (17.1) и (16.4) данной главы, а именно

$$\bar{u} = \frac{1}{8\pi i\varkappa\sqrt{rr'}} \int_C \frac{(2\nu+1)\, J_{\nu+1/2}(qr')\, K_{\nu+1/2}(qr)\, P_\nu(-\mu)\, d\nu}{\sin \nu\pi} \qquad (17.2)$$

при $r > r'$. Если $r < r'$, то в этом соотношении r и r' следует поменять местами. Функция $\bar{w}$ должна удовлетворять уравнению (16.5) предыдущего

*) Решение получается замыканием контура в правой полуплоскости дугой большой окружности и применением теоремы Коши. В статье [28] получены и другие решения, которые потребуются нам ниже, например решение (17.5) данной главы.

параграфа, и поэтому мы можем написать

$$\bar{w}=\frac{1}{8\pi i\varkappa\sqrt{rr'}}\int\limits_C\frac{(2\nu+1)J_{\nu+1/2}(qr')K_{\nu+1/2}(qr)P_\nu(\mu)}{\sin\nu\pi}f(\nu)\,d\nu,$$

где функцию $f(\nu)$ следует выбрать так, чтобы $\bar{u}+\bar{w}=0$ при $\mu=\mu_0=\cos\theta_0$.

Это условие требует, чтобы $f(\nu)=-P_\nu(-\mu_0)/P_\nu(\mu_0)$, и, следовательно, при $r>r'$ мы получим

$$\bar{v}=\frac{1}{8\pi i\varkappa\sqrt{rr'}}\int\limits_C(2\nu+1)I_{\nu+1/2}(qr')K_{\nu+1/2}(qr)\times$$
$$\times\frac{[P_\nu(-\mu)P_\nu(\mu_0)-P_\nu(-\mu_0)P_\nu(\mu)]}{\sin\nu\pi\,P_\nu(\mu_0)}d\nu. \qquad (17.3)$$

Если $r<r'$, то в этом соотношении r и r' нужно поменять местами.

Интеграл в (17.3) берут, замыкая контур дугой большой окружности в правой полуплоскости и применяя теорему Коши. Подынтегральная функция имеет полюсы в нулях*) функции $P_\nu(\mu_0)$, рассматриваемой как функция ν; она не имеет полюсов при целых значениях ν, поскольку для них $P_n(\mu)=(-1)^nP_n(-\mu)$. Определяя вычеты относительно полюсов, окончательно получим

$$\bar{v}=-\frac{1}{4\varkappa\sqrt{rr'}}\sum_\nu\frac{(2\nu+1)I_{\nu+1/2}(qr')K_{\nu+1/2}(qr)}{\sin\nu\pi}\,\frac{P_\nu(-\mu_0)P_\nu(\mu)}{(d/d\nu)[P_\nu(\mu_0)]}.$$

Суммирование по ν проводится по корням, большим $-1/2$, уравнения

$$P_\nu(\mu_0)=0. \qquad (17.4)$$

Однако для этих значений ν

$$(1-\mu_0^2)P_\nu(-\mu_0)\left[\frac{d}{d\mu}P_\nu(\mu)\right]_{\mu=\mu_0}=\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi. \qquad (17.5)$$

Поэтому

$$\bar{v}=-\frac{1}{2\pi\varkappa\sqrt{rr'}}\sum_\nu(2\nu+1)I_{\nu+1/2}(qr')K_{\nu+1/2}(qr)P_\nu(\mu)\times$$
$$\times\left[(1-\mu_0^2)\left\{\frac{d}{d\mu_0}P_\nu(\mu_0)\right\}\left\{\frac{d}{d\nu}P_\nu(\mu_0)\right\}\right]^{-1}. \qquad (17.6)$$

И окончательно, используя (22) приложения 5, получим для $r\lessgtr r'$

$$v=-\frac{1}{4\pi\varkappa t\sqrt{rr'}}\sum_\nu\exp\left[-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right](2\nu+1)I_{\nu+1/2}\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right)P_\nu(\mu)\times$$
$$\times\left[(1-\mu_0^2)\left\{\frac{d}{d\mu_0}P_\nu(\mu_0)\right\}\left\{\frac{d}{d\nu}P_\nu(\mu_0)\right\}\right]^{-1}, \qquad (17.7)$$

причем суммирование проводится по корням уравнения (17.4).

---

*) Известно, что все нули функций $P_\nu(\mu)$ и $P_\nu^{-m}(\mu)$ различны и действительны [31]. Кроме того, поскольку $P_\nu^{-m}(\mu)=P_{-\nu-1}^{-m}(\mu)$, они расположены симметрично относительно точки $\nu=-1/2$, через которую проходит контур C.

Если источник находится не на оси, а в точке (r', θ', φ'), то функцию $P_n(\mu)$ в соотношении для $\bar{u}$ следует заменить на $P_n(\cos\gamma)$, где γ — угол между радиусами-векторами от начала координат до точек (r, θ, φ) и (r', θ', φ').

Если ввести обозначения $\mu = \cos\theta$ и $\mu' = \cos\theta'$, то при $\theta > \theta'$ теорема сложения для сферических гармонических функций дает

$$P_\nu(-\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\Gamma(\nu+m+1)\,\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu)} P_\nu^{-m}(-\mu)\, P_\nu^{-m}(\mu') \cos m(\varphi-\varphi'), \tag{17.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_m &= 1 \quad \text{при} \quad m = 0, \\ \varepsilon_m &= 2 \quad \text{при} \quad m = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{17.9}$$

Если $\theta < \theta'$, то в соотношении (17.8) θ и θ' следует поменять местами.

Подставляя величину $P_\nu(-\cos\gamma)$ из выражения (17.8) в (17.2) и производя такие же операции, как и выше, за исключением того, что вместо соотношения (17.5) используется его обобщенная форма [28], т. е.

$$-\left(1-\mu_0^2\right) P_\nu^{-m}(-\mu_0) \frac{d}{d\mu_0} P_\nu^{-m}(\mu_0) = \frac{2}{\Gamma(m+\nu+1)\,\Gamma(m-\nu)}, \tag{17.10}$$

окончательно получим

$$v = \frac{1}{4\pi\varkappa t\sqrt{rr'}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu} \varepsilon_m \exp\left[-\frac{r^2+r'^2}{4\varkappa t}\right] I_{\nu+1/2}\left(\frac{rr'}{2\varkappa t}\right)(2\nu+1) P_\nu^{-m}(\mu) \times$$
$$\times \cos m(\varphi-\varphi')\, P_\nu^{-m}(\mu') \left[(1-\mu_0)^2 \frac{d}{d\mu_0} P_\nu^{-m}(\mu_0) \frac{d}{d\nu} P_\nu^{-m}(\mu_0)\right]^{-1}, \tag{17.11}$$

где суммирование по ν проводится по корням, большим $-{}^1/_2$, уравнения

$$P_\nu^{-m}(\mu_0) = 0. \tag{17.12}$$

При помощи соотношения (17.11) можно найти температуру в любой точке конуса при произвольной начальной температуре и произвольной температуре поверхности. Аналогичным образом можно рассматривать и задачи для твердых тел, ограниченных другими поверхностями в полярной системе координат.

§ 18. Непрерывные источники

Решения для непрерывных точечных или линейных источников в областях, рассмотренных в настоящей главе, можно получить путем интегрирования соответствующих функций Грина. Однако эти решения очень просто получаются и непосредственно. В качестве примера рассмотрим *непрерывный линейный источник, выделяющий при* $t > 0$ *в единицу времени на единицу длины количество тепла, равное* Q. *Источник располагается параллельно оси* z *цилиндра* $r \leqslant a$ *и проходит через точку* $(r', 0)$. *Начальная температура цилиндра равна нулю. Теплообмен на его границе отсутствует.*

Требуется найти решение вспомогательного уравнения

$$\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{v}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\theta^2} - q^2\bar{v} = 0, \qquad 0 \leqslant r < a, \tag{18.1}$$

при условиях

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial r} = 0, \qquad r = a, \tag{18.2}$$

и

$$\lim_{R\to 0} R\frac{\partial\bar{v}}{\partial R} = -\frac{Q}{2\pi Kp}, \tag{18.3}$$

где

$$R = \sqrt{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)}. \tag{18.4}$$

Решение уравнения (18.1) с условием (18.3) имеет вид

$$\frac{Q}{2\pi Kp} K_0(qR).$$

Согласно теореме сложения (см. пример I § 13 данной главы) его можно записать в виде

$$\frac{Q}{2\pi Kp} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(qr) K_n(qr') \cos n\theta, \qquad \text{когда} \qquad r < r', \tag{18.5}$$

где $\varepsilon_n = 1$, если $n = 0$, и $\varepsilon_n = 2$, если $n = 1, 2, \ldots$ Если $r > r'$, то в выражении (18.5) r и r' нужно поменять местами. Таким образом, для решения уравнения (18.1) при условиях (18.2) — (18.4) мы получим

$$\left.\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{Q}{2\pi Kp} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \{I_n(qr) K_n(qr') + a_n I_n(qr)\} \cos n\theta, \qquad 0 \leqslant r < r', \\ \bar{v} &= \frac{Q}{2\pi Kp} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \{I_n(qr') K_n(qr) + a_n I_n(qr)\} \cos n\theta, \qquad a > r > r', \end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

где a_n следует выбрать так, чтобы функции (18.6) удовлетворяли условию (18.2). Для этого нужно, чтобы

$$a_n = -\frac{I_n(qr') K'_n(qa)}{I'_n(qa)}.$$

Поэтому, если $0 \leqslant r < r'$, то

$$\bar{v} = \frac{Q}{2\pi Kp} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\theta \, \frac{I_n(qr)\left[K_n(qr') I'_n(qa) - I_n(qr') K'_n(qa)\right]}{I'_n(qa)}. \tag{18.7}$$

Если же $a > r > r'$, то в соотношении (18.7) r и r' следует поменять местами. Из теоремы обращения получим

$$v = \frac{Q}{4\pi^2 iK} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\theta \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{I_n(\mu r)\left[K_n(\mu r') I'_n(\mu a) - I_n(\mu r') K'_n(\mu a)\right] e^{\lambda t}\, d\lambda}{\lambda I'_n(\mu a)}. \tag{18.8}$$

Если $n = 0$, то в начале координат имеется полюс второго порядка с вычетом

$$\frac{2\varkappa t}{a^2} + \frac{r^2 + r'^2}{2a^2} + \ln \frac{a}{r'} - \frac{3}{4}. \tag{18.9}$$

Если $n > 0$, то в начале координат имеются простые полюсы с вычетом

$$\frac{r^n (r'^{2n} + a^{2n})}{2na^{2n} r'^n}. \tag{18.10}$$

Тогда полюсы при $\lambda = 0$ дают

$$\frac{Q}{2\pi K} \left\{ \frac{2\varkappa t}{a^2} + \frac{r + r'^2}{2a^2} + \ln \frac{a}{r'} - \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n (r'^{2n} + a^{2n})}{na^{2n} r'^n} \cos n\theta \right\} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi K} \left\{ \frac{2\varkappa t}{a^2} + \frac{r^2 + r'^2}{2a^2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2rr'}{a^2} \cos \theta + \frac{r^2 r'^2}{a^4}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r'^2}{a^2} - \frac{2rr'}{a^2} \cos \theta + \frac{r^2}{a^2}\right) \right\}. \tag{18.11}$$

Другие нули знаменателей (18.8) дают

$$-\frac{Q}{\pi K}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cos n\theta\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\varkappa\alpha_{n,m}^2 t}\frac{J_n(r\alpha_{n,m})\,J_n(r'\alpha_{n,m})}{\left(a^2\alpha_{n,m}^2-n^2\right)J_n^2(a\alpha_{n,m})}, \tag{18.12}$$

где $\alpha_{n,m}$ — положительные корни уравнения

$$J_n'(a\alpha)=0.$$

Общее решение нашей задачи равно сумме соотношений (18.11) и (18.12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell, Electricity and Magnetism, v. I, § 97 (b).
2. Webster, Electricity and Magnetism, p. 290.
3. Gray, Mathews, Treatise on Bessel Functions, Macmillan, ed. 2, 1922. (Э. Грэй, Г. Мэтьюз, Функции Бесселя и их применение к физике и механике, ИЛ, М., 1953.)
4. Sommerfeld, Partial Differential Equations in Physics, New York, 1949. (А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных, ИЛ, М., 1950.)
5. Minnigerode, Über die Wärmeleitung in Krystallen, Göttingen, 1862.
6. Betti, Ann. Univ. tosc. Pisa **10**, 143 (1868).
7. Betti, Ann. Mat. pura appl., Milano **1**, 373 (1868).
8. Betti, Mem. Soc. Ital. Sci. Firenze **1**, 373 (1868).
9. Betti, Collectanea Mathematica inedita in Memoriam Domenici Chelini, Milano, 238 1881.
10. Sommerfeld, Math. Ann. **45**, 274 (1894).
11. Weber — Riemann, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 1912. (Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.)
12. Carslaw, Phil. Mag. **4**, 162 (1902).
13. Carslaw, Proc. Edin. Math. Soc. **21**, 40 (1903).
14. Carslaw, Proc. Lond. Math. Soc. **8**, 365 (1910); **13**, 236 (1914).
15. Pockels, Über die Partielle-Differentialgleichung $(\nabla^2+\varkappa^2)u=0$, Leipzig, 1891.
16. Schwarzschild, Math. Ann. **55**, 177 (1902).
17. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, Macmillan, ed. 2, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1947.)
18. Bryan, Proc. Camb. Phil. Soc. **7**, 246 (1891).
19. Bryan, Proc. Lond. Math. Soc. **22**, 424 (1891).
20. Hobson, Proc. Lond. Math. Soc. **19**, 279 (1887).
21. Sommerfeld, Math. Ann. **45**, 263 (1894).
22. Mersman, Trans. Am. Math. Soc. **53**, 14 (1943).
23. Schaaf, Quart. Appl. Math. **5**, 107—111 (1947).
24. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge, ed. 2, 1944. (Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.)
25. Bellman, Marshak, Wing, Phil. Mag. **40**, 297 (1949).
26. Carslaw, Proc. Lond. Math. Soc. (1) **30**, 121—163 (1899).
27. Carslaw, Jaeger, J. Lond. Math. Soc. **15**, 273 (1940).
28. Carslaw, Math. Ann. **75**, 133 (1914).
29. Jaeger, Quart. J. Mech. Appl. Math. **8**, 101—106 (1955).
30. Whipple, Phil. Mag. **45**, 1225—1236 (1954).
31. MacDonald, Proc. Lond. Math. Soc. **31**, 265 (1900).

ГЛАВА XV

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

§ 1. Введение

В настоящей главе мы рассмотрим различные задачи, которые нельзя отнести ни к одной из изученных ранее; они объединены лишь тем, что для их исследования хорошо подходит метод преобразования Лапласа, который в большинстве случаев приводит к изображениям более сложным, чем рассматривавшиеся ранее. Мы вкратце покажем применение этого метода к задачам теплопроводности в движущихся твердых телах, к теории теплообменников, при наличии в твердых телах источников тепла, при расчете установившихся периодических температур, к задачам о тепловом потоке в неоднородных материалах и к ряду других задач. В дополнение к уже использовавшимся методам мы рассмотрим также прямое применение преобразования Лапласа к задачам с несколькими пространственными переменными.

§ 2. Теплопроводность в движущемся теле*

Задач подобного типа решено сравнительно мало. В своем большинстве это задачи для полуограниченного твердого тела, которое движется со скоростью u_x вдоль оси x и имеет на плоскости $x=0$ различные граничные условия. Положительные значения u_x соответствуют увеличению объема среды (например, снежный покров, толщина которого непрерывно увеличивается вследствие выпадения осадков [1, 2]). Отрицательные значения u_x соответствуют удалению вещества с плоскости $x=0$ из-за эрозии [3, 4] *), плавления, сублимации, при горных разработках [5] или аналогичных процессах.

Было рассмотрено также несколько задач о протекании жидкости по трубам [7, 9]; при этом предполагалось, что по всему поперечному сечению трубы скорость жидкости одинакова. При помощи излагаемого здесь метода можно также решить задачи с движущимися тепловыми источниками, но непосредственное интегрирование, проведенное в § 7 гл. X, здесь более эффективно и его легче выполнить. Перейдем к решению типичных задач.

I. *Область* **) $x>0$ *движется со скоростью* U. *Начальная температура равна* V_0+ax, *а плоскость* $x=0$ *при* $t>0$ *поддерживается при температуре* V_1+bt. *В теле равномерно распределены источники мощностью* A_0.

---

*) Вопрос о теплопроводности в движущихся и деформируемых телах рассмотрен в [б. 1, б. 3, б. 5], приведенных в предисловии редактора. *(Прим. ред.).*

**) В этих работах рассматривается также влияние выделения тепла в движущейся среде.

***) То есть полуограниченное твердое тело. (*Прим. ред.*)

При различных значениях постоянных V_0, V_1, a, b и A_0 этот случай охватывает множество упомянутых выше задач. Найденные решения остаются справедливыми при обоих знаках U. Искомое дифференциальное уравнение (см. (7.2) гл. I) имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{U}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{A_0}{K} \qquad (2.1)$$

с граничными условиями

$$v=V_0+ax,\quad x>0,\quad t=0, \qquad (2.2)$$

$$v=V_1+bt,\quad x=0,\quad t>0. \qquad (2.3)$$

Вспомогательное уравнение

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}-\frac{U}{\varkappa}\frac{d\bar{v}}{dx}-\frac{p}{\varkappa}\bar{v}=-\frac{A}{Kp}-\frac{V_0+ax}{\varkappa} \qquad (2.4)$$

должно быть решено при условии

$$\bar{v}=\frac{V_1}{p}+\frac{b}{p^2},\qquad x=0. \qquad (2.5)$$

Решение (2.4), (2.5) имеет вид

$$\bar{v}=\left[\frac{V_1-V_0}{p}+\frac{b+aU-(\varkappa A_0/K)}{p^2}\right]\exp\left\{\frac{Ux}{2\varkappa}-x\left(\frac{U^2}{4\varkappa^2}+\frac{p}{\varkappa}\right)^{1/2}\right\}+$$

$$+\left(\frac{\varkappa A_0}{K}-aU\right)\frac{1}{p^2}+\frac{V_0+ax}{p}. \qquad (2.6)$$

Используя формулы (19) и (29) приложения 5, а также теорему VI § 2 гл. XII, получим

$$v=V_0+ax+(\varkappa A_0t/K)-aUt+\frac{1}{2}(V_1-V_0)\left\{\Phi^*\left[\frac{x-Ut}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+e^{Ux/\varkappa}\Phi^*\left[\frac{x+Ut}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}+\frac{1}{2U}\left(b+aU-\frac{\varkappa A_0}{K}\right)\left\{(x+Ut)\,e^{Ux/\varkappa}\Phi^*\left[\frac{x+Ut}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+(Ut-x)\,\Phi^*\left[\frac{x-Ut}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]\right\}. \qquad (2.7)$$

II. *Область $x>0$ с начальной температурой V_0 движется со скоростью U. Граничное условие на плоскости $x=0$ имеет вид*

$$\frac{\partial v}{\partial x}-hv=0. \qquad (2.8)$$

В этом случае нужно решить дифференциальное уравнение (2.1) при $A_0=0$ с граничным условием (2.8). Решение вспомогательного уравнения записывается следующим образом:

$$\bar{v}=\frac{V_0}{p}-\frac{hV_0}{p\left\{\left[\left(p/\varkappa+\left(\frac{U^2}{4\varkappa^2}\right)\right]^{1/2}+\left[h-\left(\frac{U}{2\varkappa}\right)\right]\right\}}\exp\left\{\frac{Ux}{2\varkappa}-x\left(\frac{U^2}{4\varkappa^2}+\frac{p}{\varkappa}\right)^{1/2}\right\}. \qquad (2.9)$$

Используя формулу (31) приложения 5, получим искомое решение в виде

$$v=V_0-\frac{1}{2}V_0\left\{\Phi^*\left[\frac{x-Ut}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]+\frac{\varkappa h}{\varkappa h-U}e^{Ux/\varkappa}\Phi^*\left[\frac{x+Ut}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{V_0(2\varkappa h-U)}{2(\varkappa h-U)}\exp\left[hx-ht(U-\varkappa h)\right]\Phi^*\left[\frac{x+(2\varkappa h-U)t}{2(\varkappa t)^{1/2}}\right]. \qquad (2.10)$$

Это решение справедливо при обоих знаках U и $2\varkappa h-U$. Оно встречается при решении задач о диффузии примесей в расплавленном металле [6, 8].

III. *Установившееся периодическое изменение температуры в области $x > 0$, движущейся со скоростью U и имеющей при $x = 0$ температуру $V_0 \cos(\omega t + \theta)$.*

Ищем решение в виде

$$v = \operatorname{Re}\{V(x)\, e^{i(\omega t + \theta)}\}; \tag{2.11}$$

тогда функция $V(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{U}{\varkappa}\frac{dV}{dx} - \frac{i\omega}{\varkappa}V = 0. \tag{2.12}$$

Решение уравнения (2.12), ограниченное при $x \to \infty$, имеет вид

$$\exp\left\{\frac{Ux}{2\varkappa} - x\left(\frac{U^2}{4\varkappa^2} + \frac{i\omega}{\varkappa}\right)^{1/2}\right\}.$$

Используя показательную форму комплексного числа

$$\left(\frac{U^2}{4\varkappa^2} + \frac{i\omega}{\varkappa}\right) = ae^{i\varphi}, \tag{2.13}$$

получим искомое решение в виде

$$v = V_0 \exp\left\{\frac{Ux}{2\varkappa} - xa^{1/2}\cos\frac{1}{2}\varphi\right\}\cos\left(\omega t - xa^{1/2}\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) + \theta\right). \tag{2.14}$$

IV. *Радиальное течение с диффузией в двух измерениях.*

Предположим, что при установившемся радиальном течении несжимаемой жидкости через каждую окружность в 1 *сек* проходит масса жидкости m. Тогда радиальная скорость жидкости u_r равна

$$u_r = \frac{m}{2\pi\rho r}. \tag{2.15}$$

Тогда в цилиндрической системе дифференциальное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u_r}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{2.16}$$

где u_r — определяется равенством (2.15). Вспомогательное уравнение для (2.16) при нулевой начальной температуре запишется следующим образом:

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r}(1 - 2\nu)\frac{d\bar{v}}{dr} - q^2\bar{v} = 0, \tag{2.17}$$

где $\nu = m/4\pi\varkappa\rho$. Решение этого уравнения, ограниченное при $r \to \infty$, имеет вид

$$r^\nu K_\nu(qr). \tag{2.18}$$

В качестве одного из примеров применения решения (2.18) укажем, что, согласно формуле (33) приложения 5, функция с изображением

$$\frac{Q(qr)^\nu}{2^{\nu+1}\pi K\Gamma(\nu+1)}K_\nu(qr) \tag{2.19}$$

имеет вид

$$\frac{Q}{4\pi Kt\,\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)^\nu e^{-r^2/4\varkappa t}. \tag{2.20}$$

Решение (2.20) обладает тем свойством, что полное количество тепла в области $r > 0$ постоянно и равно Q. Таким образом, оно аналогично решению для линейного источника (см. § 3 гл. X) применительно к данному случаю радиального движения среды.

Приведем еще один пример: из (2.18) (как и в § 5 гл. XIII) следует, что решение уравнения (2.16) для области $r > 0$ при нулевой начальной температуре и постоянной температуре V_0 в плоскости $r = a$ имеет вид

$$V_0 + \frac{2V_0}{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa u^2 t}\left[J_\nu(ur)Y_\nu(ua) - Y_\nu(ur)J_\nu(ua)\right]du}{u\left[J_\nu^2(ua) + Y_\nu^2(ua)\right]}. \tag{2.21}$$

V. *Неограниченное твердое тело с постоянной начальной температурой V_0 движется вдоль оси x со скоростью $-U$. При $t>0$ поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$ поддерживается при нулевой температуре* *).

В этом случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{U}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0. \tag{2.22}$$

Полагая

$$v=ue^{-Ux/2\varkappa}+V_0, \tag{2.23}$$

получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{U^2}{4\varkappa^2}\bar{u}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{2.24}$$

Переходя к полярным координатам в плоскости xy, получим следующее вспомогательное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2}-q^2\bar{u}=0, \tag{2.25}$$

где

$$q^2=\frac{p}{\varkappa}+\frac{U^2}{4\varkappa^2}. \tag{2.26}$$

Граничное условие для (2.25) имеет вид

$$\bar{u}=-\frac{V_0}{p}\exp\left[Ur\cos\theta/2\varkappa\right] \quad \text{при} \quad r=a,$$

или

$$\bar{u}=-\frac{V_0}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n I_n\left(\frac{Ua}{2\varkappa}\right)\cos n\theta, \tag{2.27}$$

где

$$\varepsilon_0=1, \quad \text{а} \quad \varepsilon_n=2 \quad \text{при} \quad n\geqslant 1. \tag{2.28}$$

Уравнение (2.25) имеет решение

$$\bar{u}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\theta K_n(qr), \tag{2.29}$$

где коэффициенты a_n находят, подставляя (2.29) при $r=a$ в (2.27).

Окончательно получим

$$\bar{u}=-\frac{V_0}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n I_n(Ua/2\varkappa)K_n(qr)}{K_n(qa)}\cos n\theta. \tag{2.30}$$

Отсюда следует, что

$$u=-V_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n I_n(Ua/2\varkappa)K_n(Ur/2\varkappa)}{K_n(Ua/2\varkappa)}\cos n\theta-$$

$$-\frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{U^2t}{4\varkappa}\right]\varepsilon_n\cos n\theta I_n\left(\frac{Ua}{2\varkappa}\right)\int_0^{\infty}\frac{e^{-\varkappa u^2 t}\left[J_n(ur)Y_n(ua)-Y_n(ur)J_n(ua)\right]u\,du}{\left[u^2+(U^2/4\varkappa^2)\right]\left[J_n^2(ua)+Y_n^2(ua)\right]}. \tag{2.31}$$

VI. *Тонкий стержень $0<x<l$ с нулевой начальной температурой движется со скоростью U. При $t>0$ его конец $x=l$ поддерживается при постоянной температуре V, а конец $x=0$ — при нулевой температуре. На поверхности стержня происходит теплообмен со средой с нулевой температурой* **).

---

*) В качестве примера Консер приводит случай, когда цилиндрическое отверстие поддерживается при нулевой температуре; материал, удаляемый с одной стороны отверстия, помещается на другую.

**) Ряд задач подобного типа рассмотрен в [9].

В этом случае дифференциальное уравнение (9.1) гл. IV принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{U}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\nu}{\varkappa}v-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0, \qquad 0<x<l; \tag{2.32}$$

его нужно решать при граничных условиях $v=V$ при $x=l$, $v=0$ при $x=0$ и нулевой начальной температуре. Вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}-\frac{U}{\varkappa}\frac{d\bar{v}}{dx}-\frac{p+\nu}{\varkappa}\bar{v}=0, \qquad 0<x<l,$$

а граничными условиями служат $\bar{v}=V/p$ при $x=l$ и $\bar{v}=0$ при $x=0$. Тогда

$$\bar{v}=\frac{V\,\mathrm{sh}\,\{x[U^2+4\varkappa(p+\nu)]^{1/2}/2\varkappa\}}{p\,\mathrm{sh}\,\{l\,[U^2+4\varkappa(p+\nu)]^{1/2}/2\varkappa\}}\exp\left[\frac{U(x-l)}{2\varkappa}\right]. \tag{2.33}$$

Используя теорему обращения, получим

$$v=\frac{V}{2\pi i}\exp\left[\frac{U(x-l)}{2\varkappa}\right]\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{\lambda t}\frac{\mathrm{sh}\,\{x\,[U^2+4\varkappa(\lambda+\nu)]^{1/2}/2\varkappa\}}{\mathrm{sh}\,\{l\,[U^2+4\varkappa(\lambda+\nu)]^{1/2}/2\varkappa\}}\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{2.34}$$

Подынтегральная функция в соотношении (2.34) имеет простые полюсы при $\lambda=0$, а также в корнях уравнений

$$\frac{l\,[U^2+4\varkappa(\lambda+\nu)]^{1/2}}{2\varkappa}=n\pi i, \qquad n=1,2,\ldots,$$

т. е. при

$$\lambda=-\nu-\frac{U}{4\varkappa}-\frac{\varkappa n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n=1,2,\ldots \tag{2.35}$$

Находя вычеты относительно этих полюсов, окончательно получим

$$v=V\frac{\mathrm{sh}\,[x\,(U^2+4\varkappa\nu)^{1/2}/2\varkappa]}{\mathrm{sh}\,[l\,(U^2+4\varkappa\nu)^{1/2}/2\varkappa]}\exp\left[\frac{U(x-l)}{2\varkappa}\right]+$$
$$+\frac{2V\pi}{l^2}\exp\left[\frac{U(x-l)}{2\varkappa}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin(n\pi x/l)}{[(\nu/\varkappa)+(U^2/4\varkappa^2)+(n^2\pi^2/l^2)]}\exp\left\{-\left[\nu+\frac{U^2}{4\varkappa}+\frac{\varkappa n^2\pi^2}{l^2}\right]t\right\}. \tag{2.36}$$

§ 3. Тепловые регенераторы и теплообменники

Передача тепла от движущейся горячей жидкости к холодной имеет очень большое практическое значение. Имеются системы двух основных типов, при помощи которых передается тепло: теплообменники и регенераторы.

В теплообменнике горячая и холодная жидкости текут по обеим сторонам тонкой перегородки, которая предназначена просто для их разделения; тепло передается от одной жидкости к другой через эту перегородку, которая в идеальном случае настолько тонка, что ее теплоемкостью можно пренебречь, а сама она ведет себя при теплопередаче просто как контактное сопротивление (см. пример Г § 9 гл. I). Жидкости могут течь либо в одном направлении (параллельное течение, или прямоток), либо в противоположных направлениях (встречное течение, или противоток); установившееся состояние достигается очень быстро, и решения для него приводятся во всех работах по теплообмену (см., например, [10]).

В регенераторах горячая и холодная жидкости попеременно проходят по твердой стенке; когда по ней протекает горячая жидкость, она поглощает тепло, а затем отдает его холодной жидкости, причем этот процесс циклически повторяется. Здесь наиболее важно сохранение тепла стенкой, и поэтому следует тщательно изучить поток тепла в ней. Следует отметить,

что данная задача оказывается достаточно сложной. Для практики основной интерес представляет окончательный установившийся периодический режим.

Изложим несколько приложений метода преобразования Лапласа к неустановившимся режимам в идеализированных системах обоих описанных типов.

Пусть поверхность стенки*) представляет собой плоскость $z=0$, и пусть в области $z<0$ в направлении оси x течет равномерный поток жидкости со скоростью U. Предполагается, что жидкость хорошо перемешивается и, следовательно, ее температура в любой плоскости, перпендикулярной направлению потока, одинакова; однако при этом предполагается также, что тепло не распространяется в направлении течения жидкости. Пусть M — масса жидкости, соприкасающейся с единицей поверхности стенки, c' — удельная теплоемкость жидкости, u — ее температура в момент времени t в точке x (т. е. во всей полуплоскости $x=\text{const}$, $z<0$), v_s — температура поверхности стенки в точке x (т. е. во всех точках прямой $x=\text{const}$, $z=0$) в момент t, а H — коэффициент теплоотдачи стенки.

Как и в § 9 гл. IV, температура жидкости должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}+b'(u-v_s)=0, \tag{3.1}$$

где

$$b'=\frac{H}{M'c'}. \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1) и

$$K\frac{\partial v}{\partial z}=H(v-u), \qquad z=0, \tag{3.3}$$

служат граничными условиями для уравнения теплопроводности в теле

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0.$$

Совершенно очевидно, что решение этих уравнений связано со значительными трудностями**), и поэтому на практике принимают различные упрощающие предположения. Обычно полагают, что коэффициент теплопроводности тела в направлении течения жидкости равен нулю и конечен [12] или бесконечен в перпендикулярном ему направлении.

I. *Твердое тело с бесконечно большим коэффициентом теплопроводности в направлении, перпендикулярном направлению течения, и нулевым коэффициентом в направлении течения****).

Пусть M — масса твердого тела, приходящаяся на единицу поверхности стенки, c — его удельная теплоемкость; пусть, далее, температура тела на его поверхности равна $v_s(x, t)$; эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}+b(v_s-u)=0, \tag{3.4}$$

где

$$b=\frac{H}{Mc}. \tag{3.5}$$

*) Под стенкой автор понимает здесь полуограниченное твердое тело $z\geqslant 0$. (*Прим. ред.*)

**) В статье [11] рассматривается установившийся периодический режим в регенераторах.

***) На практике это приближенно реализуется в случае, когда жидкость течет сквозь гранулированную набивку, частицы которой настолько малы, что температуру по всему их объему можно считать постоянной.

В нашей задаче мы должны рассматривать дифференциальные уравнения (3.1) и (3.4). Рассмотрим*) область $x > 0$, причем начальная температура как твердого тела, так и жидкости**) равна нулю и при $t > 0$ температура жидкости в плоскости $x = 0$ поддерживается равной единице.

Вспомогательные уравнения, соответствующие (3.1) и (3.4), имеют вид

$$U\frac{d\bar{u}}{dx} + (p + b')\bar{u} - b'\bar{v}_s = 0, \qquad x > 0, \tag{3.6}$$

$$(p + b)\bar{v}_s - b\bar{u} = 0, \qquad x > 0. \tag{3.7}$$

Их следует решать при условии, что при $x = 0$, $\bar{u} = 1/p$. Отсюда получим

$$\bar{u} = \frac{1}{p}\exp\left\{-\frac{x(p + b')}{U} + \frac{xbb'}{U(p + b)}\right\}, \tag{3.8}$$

$$\bar{v}_s = \frac{b}{p(p + b)}\exp\left\{-\frac{x(p + b')}{U} + \frac{xbb'}{U(p + b)}\right\}. \tag{3.9}$$

Чтобы найти v_s и u отметим, что, согласно формуле (24) приложения 5,

$$\frac{1}{p}e^{ax/p} = L\left\{I_0[2(axt)^{1/2}]\right\}. \tag{3.10}$$

Тогда из (2.6) гл. XII находим

$$\frac{1}{p + b}\exp\left[\frac{ax}{p + b}\right] = L\left\{e^{-bt}I_0[2(axt)^{1/2}]\right\}. \tag{3.11}$$

В таком случае, в соответствии с теоремой IV (см. § 2 гл. XII), получим

$$\frac{1}{b}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + b}\right]\exp\left(\frac{ax}{p + b}\right) = \frac{1}{p(p + b)}\exp\left(\frac{ax}{p + b}\right) =$$
$$= L\left\{\int_0^t e^{-b\tau}I_0[2(ax\tau)^{1/2}]\,d\tau\right\}, \tag{3.12}$$

из равенств (3.11) и (3.12) следует, что

$$\frac{1}{p}\exp\left(\frac{ax}{p + b}\right) = L\left\{e^{-bt}I_0[2(axt)^{1/2}] + b\int_0^t e^{-b\tau}I_0[2(ax\tau)^{1/2}]\,d\tau\right\}, \tag{3.13}$$

или

$$\frac{1}{p}\exp\left(\frac{ax}{p + b}\right) = L\left\{1 + (ax)^{1/2}\int_0^t e^{-b\tau}I_1[2(ax\tau)^{1/2}]\,\tau^{-1/2}\,d\tau\right\}, \tag{3.14}$$

---

*) Это задача о начальном разогреве идеального регенератора. Она рассматривалась в [13—16]. Общий обзор и библиографию можно найти в [17]. В работах [18, 19] получено решение для случая установившегося периодического режима в виде интегрального уравнения и рассмотрено его решение. В работе [20] приведено другое рассмотрение случая установившегося периодического режима. Опубликованы также приближенные решения для этого случая [21]. Применение численных методов рассмотрено в [22].

**) Область $x > 0$ состоит из двух частей: твердого тела $x > 0$, $z > 0$ и жидкости $x > 0$, $z < 0$. (*Прим. ред.*)

или

$$\frac{1}{p}\exp\left(\frac{ax}{p+b}\right)=$$
$$=L\left\{\exp\left(\frac{ax}{b}\right)-\frac{a}{b}\exp\left[\frac{ax}{b}-bt\right]\int_0^x \exp\left(-\frac{ax'}{b}\right)I_0\left[2(ax't)^{1/2}\right]dx'\right\}, \quad (3.15)$$

где (3.14) получается из (3.13) путем интегрирования по частям, а другая важная форма (3.15) легко получается умножением обеих частей (3.11) на $\exp\left(-\frac{ax}{b}\right)$ и интегрированием по x от 0 до x.

Используя выражения (3.12) и (3.14), а также теорему VII § 2 гл. XII, получим из (3.8) и (3.9), что если $t < x/U$, то u и v_s равны нулю, а если $t > x/U$, то

$$u=e^{-b'x/U}\left\{1+(ax)^{1/2}\int_0^{t-x/U} e^{-b\tau}I_1\left[2(ax\tau)^{1/2}\right]\tau^{-1/2}\,d\tau\right\}, \quad (3.16)$$

$$v_s=be^{-b'x/U}\int_0^{t-x/U} e^{-b\tau}I_0\left[2(ax\tau)^{1/2}\right]d\tau, \quad (3.17)$$

где $a=bb'/U$. Решения для других значений температуры подводимой жидкости можно получить, воспользовавшись теоремой Дюамеля.

Уравнения, аналогичные приведенным выше, появляются в теории ионообменных колонн; недавно они привлекли к себе большое внимание [23, 24] *). Поскольку такие уравнения встречаются очень часто, функцию

$$J(x,\ y)=1-e^{-y}\int_0^x e^{-\tau}I_0\left[2(\tau y)^{1/2}\right]d\tau, \quad (3.18)$$

которая появляется в выражениях (3.12), (3.13) и (3.15), называют фундаментальной; равенство двух последних выражений дает следующий важный результат:

$$J(x,\ y)+J(y,\ x)=1+e^{-x-y}I_0\left[2(xy)^{1/2}\right]. \quad (3.19)$$

Свойства этой функции были достаточно полно рассмотрены Гольдштейном [23].

II. *Случай выделения тепла в твердом теле* **).

Пусть при $t>0$ в твердом теле выделяется в единицу времени на единицу массы постоянное количество тепла, равное Q. Начальные температуры как тела, так и жидкости равны нулю. При $t>0$ температура жидкости в плоскости $x=0$ поддерживается равной нулю.

В этом случае уравнение (3.4) заменяется уравнением

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}+b(v_s-u)=\frac{Q}{c}. \quad (3.20)$$

*) Следует отметить, что Томас [24] вместо функции (3.18) использовал функцию

$$\varphi(x,\ y)=[1-J(x,\ y)]\exp(x+y)$$

и что некоторые авторы последовали его примеру. Другие источники указаны в списке литературы к работе [23].

**) Выделение тепла в шаре, погруженном в движущуюся жидкость, рассмотрено в [25].

Решая уравнения (3.1) и (3.20) с $u = v_s = 0$ при $t = 0$, $x > 0$ и $u = 0$ при $x = 0$, $t > 0$, получаем для вспомогательного уравнения

$$\bar{u} = \frac{Qb'}{c(b+b')^2}\left\{\frac{b+b'}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+b+b'}\right\}\left\{1 - \exp\left[-\frac{b'x}{U} - \frac{px}{U} + \frac{ax}{p+b}\right]\right\}, \quad (3.21)$$

где

$$a = \frac{bb'}{U}. \quad (3.22)$$

Чтобы найти $\bar{u}$, нам необходимы выражения

$$\frac{1}{p^2}\exp\left(\frac{ax}{p+b}\right) = \left(\frac{1}{p} + \frac{b}{p^2}\right)\frac{1}{p+b}\exp\left(\frac{ax}{p+b}\right) =$$
$$= L\left\{\int_0^t [1 + bt - b\tau]\, e^{-b\tau} I_0[2(ax\tau)^{1/2}]\, d\tau\right\}. \quad (3.23)$$

и

$$\frac{1}{p+b'}\exp\left(\frac{ax}{p}\right) = \left[\frac{1}{p} - \frac{b'}{p(p+b')}\right]\exp\left(\frac{ax}{p}\right) =$$
$$= L\left\{I_0[2(axt)^{1/2} - b'e^{-b't}\int_0^t e^{b'\tau} I_0[2(ax\tau)^{1/2}]\, d\tau\right\}, \quad (3.24)$$

которые вытекают из (3.11) и теоремы X § 2 гл. XII. Используя их и теоремы VI и VII того же параграфа, получим

$$u = \frac{Qb'\{(b+b')t - 1 + \exp[-(b+b')t]\}}{c(b+b')^2}, \quad \text{если} \quad t < \frac{x}{U}. \quad (3.25)$$

Если $t > x/U$, то

$$u = \frac{Qb'\{(b+b')t - 1 + \exp[-(b+b')t]\}}{c(b+b')^2} -$$
$$- \frac{Qb'}{c(b+b')^2}\exp\left(-\frac{b'x}{U}\right)\int_0^{t-x/U}\left\{\left[b(b+b')\left[t - \tau - \left(\frac{x}{U}\right)\right] + b'\right] e^{-b\tau} -\right.$$
$$\left. - b'\exp\left[-(b+b')\left[t - \left(\frac{x}{U}\right)\right] + b'\tau\right]\right\} I_0[2(ax\tau)^{1/2}]\, d\tau. \quad (3.26)$$

Если вплоть до момента $t = x/U$ количество тепла, выделяемого в единицу времени, равно нулю *), а при $t > x/U$ оно равно постоянной величине Q (т. е. после того, как частицы жидкости, находившиеся в момент времени $t = 0$ в плоскости $x = 0$ достигнут плоскости x), то (3.21) примет вид

$$\bar{u} = \frac{Q}{cp^2}\exp\left(-\frac{px}{U}\right)\left\{1 - \exp\left[-\frac{b'x}{U} + \frac{bb'x}{U(p+b)}\right]\right\}. \quad (3.27)$$

Используя (3.23) и теорему VII (см. § 2 гл. XII), получим, что при $t < x/U$ u равно нулю, а при $t > x/U$

$$u = \frac{Q}{c}\left\{t - \frac{x}{U} - \exp\left(-\frac{b'x}{U}\right)\int_0^{t-x/U}\left\{b\left[t - \left(\frac{x}{U}\right) - \tau\right] + 1\right\} e^{-b\tau} I_0\left[2\left(\frac{bb'x\tau}{U}\right)^{1/2} d\tau\right\}. \quad (3.28)$$

Это решение можно выразить также через функцию $J(x, y)$, определяемую соотношением (3.19).

---

*) Этот случай рассмотрен в [26]. Он имеет место, когда тепло выделяется в результате химической реакции. Аналогичным путем легко рассмотреть и случай, когда количество выделяющегося тепла является линейной функцией v_s, т. е. когда $Q = Q_0(1 + \beta v_s)$.

III. *Коэффициент теплопроводности твердого тела K в направлении, перпендикулярном движению жидкости, конечен, а в направлении движения жидкости равен нулю.*

В качестве примера, в котором получается простое решение, рассмотрим полуограниченное твердое тело $z>0$, предположив, что в любой точке температура его поверхности равна температуре жидкости (например, случай очень большой величины H в уравнении (3.1)).

В твердом теле температура v должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0, \quad z>0, \quad x>0, \quad t>0 \tag{3.29}$$

при условии на поверхности

$$v=u, \quad x>0, \quad t>0, \quad z=0, \tag{3.30}$$

$$K\frac{\partial v}{\partial z}=M'c'\left(\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x>0, \quad t>0, \quad z=0, \tag{3.31}$$

где u — температура жидкости в плоскости x, а условие (3.31) вытекает из (3.1) и (3.3). Как и раньше, рассмотрим случай нулевой начальной температуры в области $z>0$, $x>0$ и $u=1$ при $t>0$ на плоскости $x=0$. Здесь вспомогательные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}-q^2\bar{v}=0, \qquad z>0, \quad x>0, \tag{3.32}$$

$$\bar{v}=\bar{u}, \qquad z=0, \quad x>0, \tag{3.33}$$

$$U\frac{d\bar{u}}{dx}+p\bar{u}-k\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}=0, \qquad x>0, \quad z=0, \tag{3.34}$$

где

$$k=\frac{K}{M'c'}. \tag{3.35}$$

Их нужно решить при условии, что $\bar{u}=1/p$, когда $x=0$; кроме того, $\bar{v}$ при $z\to\infty$ ограничено, а при $x\to\infty$ $\bar{u}$ и $\bar{v}$ ограничены. Искомые решения имеют вид

$$\bar{u}=\frac{1}{p}\exp\left\{-\frac{px}{U}-\frac{kxp^{1/2}}{U\varkappa^{1/2}}\right\}, \tag{3.36}$$

и

$$\bar{v}=\frac{1}{p}\exp\left\{-\frac{px}{U}-\left(\frac{kx}{U}+z\right)\frac{p^{1/2}}{\varkappa^{1/2}}\right\}. \tag{3.37}$$

Таким образом, из формулы (8) приложения 5 и из теоремы VII § 2 гл. XII следует, что u и v при $t<x/U$ равны нулю, а при $t>x/U$

$$u=\Phi^*\left[\frac{kx}{2U\{\varkappa(t-x/U)\}^{1/2}}\right], \tag{3.38}$$

$$v=\Phi^*\left[\frac{kx+zU}{2U\{\varkappa(t-x/U)\}^{1/2}}\right]. \tag{3.39}$$

Решение вспомогательных уравнений в случае более общих граничных условий (3.1) и (3.3), или для тела в форме пластины или цилиндра, не наталкивается на трудности, хотя изображения получаются значительно более сложными.

IV. *Задача, аналогичная задаче* III, *но с конечной величиной H.*

Положив $h=H/K$ и $k=K/M'c'$, получим

$$\bar{u}=\frac{1}{p}\exp\left\{-\frac{px}{U}-\frac{kxhq}{U(q+h)}\right\} \tag{3.40}$$

и решение

$$u=1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{d\xi}{\xi}\exp\left\{-\varkappa\xi^2\left(t-\frac{x}{U}\right)-\frac{kxh\xi^2}{U(h^2+\xi^2)}\right\}\sin\frac{kh^2x\xi}{U(h^2+\xi^2)}, \tag{3.41}$$

которое при $h \to \infty$ сводится к (3.38). Выражение для небольших значений времени можно получить, разлагая показательные функции в (3.40) по степеням $(q+h)^{-1}$ и используя формулы типа (14) и (18) приложения 5.

V. *Задача, аналогичная задаче* III, *но при* $t > 0$ *в плоскости (на единицу массы за единицу времени) выделяется постоянное количество тепла* Q. *При* $t > 0$ *в плоскости* $x = 0$ *температура жидкости равна нулю. Начальные температуры жидкости и тела равны нулю.*

Температура жидкости u записывается следующим образом:

$$\frac{c'\varkappa k'^2 u}{Q} = 2k'\left(\frac{\varkappa t}{\pi}\right)^{1/2} - 1 + e^{\varkappa t k'^2}\Phi^*[k'(\varkappa t)^{1/2}] -$$
$$- H\left(t - \frac{x}{U}\right)\left\{\left[\frac{4k'^2\varkappa(Ut-x)}{U\pi}\right]^{1/2}\exp\left[-\frac{k^2x^2}{4\varkappa U(Ut-x)}\right] -\right.$$
$$- \frac{kk'x+U}{U}\Phi^*\left(\frac{kx}{2[\varkappa U(Ut-x)]^{1/2}}\right) +$$
$$\left. + e^{\varkappa k'^2 t}\Phi^*\left[\frac{kx}{2[\varkappa U(Ut-x)]^{1/2}} + k'\left[\frac{\varkappa(Ut-x)}{U}\right]^{1/2}\right]\right\}, \quad (3.42)$$

где k определяется равенством (3.35), а $k' = k/\varkappa = \rho c/M'c'$.

VI. *Неустановившийся режим теплообменников.*

В качестве примера условий, имеющих место в теплообменнике до наступления установившегося состояния, рассмотрим случай противотока в области $x > 0$. Пусть по одну сторону тонкой перегородки (с нулевой теплоемкостью) в плоскости $z = 0$ жидкость течет со скоростью U в направлении оси x; пусть, далее, M' — масса жидкости на единицу поверхности, c' — удельная теплоемкость этой жидкости, u — температура в плоскости x в момент времени t. Пусть по другую сторону перегородки на единицу поверхности приходится масса жидкости M_1 с удельной теплоемкостью c_1; пусть, далее, u_1 — температура жидкости в плоскости x в момент времени t, а $-U_1$ — ее скорость в направлении x. Пусть, наконец, H общий коэффициент теплопередачи*), так что тепловой поток в единицу времени через стенку в точках $x = \text{const}$, $z = 0$ равен

$$H(u - u_1). \quad (3.43)$$

Дифференциальным уравнением для u служит (3.1), т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + b'(u - u_1) = 0, \quad x > 0; \quad (3.44)$$

для u_1 мы получим аналогичное уравнение, в котором U заменено на $-U_1$, т. е.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - U_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - b_1(u - u_1) = 0, \quad x > 0, \quad (3.45)$$

где

$$b' = \frac{H}{M'c'}, \quad b_1 = \frac{H}{M_1 c_1}. \quad (3.46)$$

Предположим, что начальная температура обеих жидкостей равна нулю и что при $t > 0$ в плоскости $x = 0$ $u = 1$. Соответствующие вспомогательные уравнения имеют вид

$$U\frac{d\bar{u}}{dx} + (p + b')\bar{u} - b'\bar{u}_1 = 0, \quad x > 0, \quad (3.47)$$

$$U_1\frac{d\bar{u}_1}{dx} - (p + b_1)\bar{u}_1 + b_1\bar{u} = 0, \quad x > 0. \quad (3.48)$$

Их следует решать при условии, что при $x = 0$, $\bar{u} = 1/p$, а при $x \to \infty$ $\bar{u}_1$ стремится к нулю. Решая уравнение относительно $\bar{u}$, получим

$$\bar{u} = \frac{1}{p}\exp\left\{-\frac{(p+b')x}{U} + kx\left[(p+\rho) - \sqrt{\{(p+\rho)^2 - \sigma^2\}}\right]\right\}, \quad (3.49)$$

*) Для однослойной стенки $H = K/d$, где K — теплопроводность стенки, а d — ее толщина (см. § 9 гл. I).

где

$$\rho = \frac{Ub_1 + U_1 b'}{U + U_1}, \quad \sigma^2 = \frac{4UU_1 b' b_1}{(U+U_1)^2}, \quad k = \frac{U + U_1}{2UU_1}. \tag{3.50}$$

Величину u находят при помощи формулы (25) приложения 5, применяя анализ использованного выше типа (см. (3.11) — (3.16)).

Искомое решение имеет вид

$$u = 0, \quad \text{если} \quad t < \frac{x}{U},$$

и

$$u = e^{-b'x/U} + \sigma k x e^{-b'x/U} \int_0^{t-x/U} e^{-\rho\tau} I_1 \{\sigma \sqrt{[\tau(\tau + 2kx)]}\} \frac{d\tau}{[\tau(\tau+2kx)]^{1/2}}, \tag{3.51}$$

$$\text{если } t > \frac{x}{U}.$$

Функция u_1 определяется аналогичным образом: если $t < x/U$, она равна нулю, а если $t > x/U$, то

$$u_1 = \frac{\sigma k U}{b'} e^{-b'x/U} \int_0^{t-x/U} e^{-\rho\tau} \left\{ \frac{I_1 \{\sigma [\tau(\tau+2kx)]^{1/2}\}}{[\tau(\tau+2kx)]^{1/2}} + \frac{\sigma k x I_2 \{\sigma [\tau(\tau+2kx)]^{1/2}\}}{\tau + 2kx} \right\} d\tau.$$

Встречное течение в ограниченной области $0 < x < l$ рассматривается аналогичным путем: u будет иметь заданное значение при $x = 0$, а u_1 — при $x = l$. При прямотоке в области $x > 0$ как u, так и u_1 точно определяются в плоскости $x = 0$.

§ 4. Тепловой поток в слоистых системах

Выше неоднократно отмечалось, что в составных системах, в которых имеются как хорошие, так и плохие проводники тепла, простое и адекватное приближение получается в том случае, если хороший проводник считать идеальным проводником с конечной теплоемкостью. То же решение получается и тогда, когда n относительно плохих проводников с температурами $v_1, \ldots, v_n$ и площадями поверхностей $\omega_1, \ldots, \omega_n$ прилегают к одному общему идеальному проводнику с массой M, температурой v и удельной теплоемкостью c'.

В этом случае граничные условия на поверхности идеального проводника записываются в виде

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_n = v, \tag{4.1}$$

$$Mc' \frac{dv}{dt} + \omega_1 f_1 + \ldots + \omega_n f_n = Q, \tag{4.2}$$

где $f_1, \ldots, f_n$ — тепловые потоки, втекающие в проводники, а Q — количество тепла выделяющееся в идеальном проводнике в единицу времени.

Условия (4.1) и (4.2), вместе с граничными условиями на других поверхностях проводников, дают достаточное число уравнений для определения $v_1, \ldots, v_n$. Ниже приводится несколько примеров.

I. *В областях* *) $0 < x < a$ *и* $x > a$ *находится одинаковый материал с термическими коэффициентами* K, ρ, c, $\varkappa$. *При* $x = 0$ *тепловой поток равен нулю. При* $x = a$ *обе области соприкасаются с массой* M *(на единицу поверхности) идеального проводника с удельной теплоемкостью* c'. *Начальная температура идеального проводника равна* V_0, *а окружающих областей — нулю.*

В данном случае температура идеального проводника равна

$$\frac{4kV_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos^2 u \, du}{1 + 2ku \sin 2u + 4k^2u^2 \cos^2 u} \exp\left[-\frac{\varkappa u^2 t}{a^2}\right] du, \tag{4.3}$$

*) В данной задаче рассматривается полуограниченное тело с плоскостью $x = a$, являющейся идеальным проводником. (*Прим. ред.*)

где

$$k = \frac{Mc'}{2\rho c a}. \tag{4.4}$$

II. *В области* $0 \leqslant r < a$ *находится материал с термическими коэффициентами* K_1, ρ_1, c_1, $\varkappa_1$, v_1, *в области* $a < r < b$ — *идеальный проводник с коэффициентами* ρ, c, v, *в области* $r > b$ — *материал с коэффициентами* K_2, ρ_2, c_2, $\varkappa_2$, v_2. *В начальный момент область* $a < r < b$ *находится при температуре* V_0, *другие области — при нулевой температуре* *).

Температура v_1 в области $0 \leqslant r \leqslant a$ определяется формулой

$$v_1 = \frac{4V_0 k'' K_2}{\pi^2 K_1} \int\limits_0^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{\varkappa_1 u^2 t}{a^2}\right] J_0(u) J_0\left(\frac{ur}{a}\right) du}{u \Delta(u)}, \tag{4.5}$$

где

$$k = \frac{b \varkappa_1^{1/2}}{a \varkappa_2^{1/2}}, \quad k' = \frac{b K_2 \varkappa_1^{1/2}}{a K_1 \varkappa_2^{1/2}}, \quad k'' = \frac{(b^2 - a^2)\rho c}{2a^2 \rho_1 c_1} \tag{4.6}$$

и

$$\Delta(u) = [J_1(u) J_0(ku) - k' J_0(u) J_1(ku) + k'' u J_0(u) J_0(ku)]^2 + \\ + [J_1(u) Y_0(ku) - k' J_0(u) Y_1(ku) + k'' u J_0(u) Y_0(ku)]^2. \tag{4.7}$$

Если начальная температура всей системы равна нулю, а в область $a < r < b$ в единицу времени поступает количество тепла Q, то

$$v_1 = \frac{2K_2 Q}{K_1^2 \pi^3} \int\limits_0^{\infty} \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{\varkappa_1 u^2 t}{a^2}\right)\right] J_0(u) J_0\left(\frac{ur}{a}\right) du}{u^3 \Delta(u)}. \tag{4.8}$$

§ 5. Установившийся периодический режим

Во многих практических задачах тело подвергается воздействию периодического изменения температуры или тепловых потоков; тогда желательно найти установившийся периодический режим, наступающий после затухания переходных процессов, на которые влияют начальные условия. Это можно сделать путем разложения заданной температуры по компонентам Фурье и их последующего раздельного рассмотрения, как в § 6 гл. III. Однако на практике получающийся ряд Фурье медленно сходится вблизи наиболее интересных значений времени, и для нахождения более удобных форм решения долгое время использовались такие же приемы, как и в § 6 гл. III и § 8 гл. IV.

Один из удобных методов нахождения таких решений заключается в применении преобразования Лапласа. Излагаемый ниже метод почти точно совпадает с методом операционного исчисления [29—31] для установившихся состояний, но не предполагает предварительного знакомства с ним.

Для определенности рассмотрим только наиболее важный случай, а именно волны прямоугольной формы; аналогичным путем можно исследовать и другие случаи. При расчете мы предполагаем, что при $t > 0$ температура или тепловой поток меняется по периодическому закону, а начальная температура твердого тела равна нулю. Таким образом, температуру или тепловой поток,

---

*) Такую систему предлагали в качестве приближенной модели кабеля с маслом [27, 28]. В тех же статьях приведено несколько приближенных решений для небольших значений времени.

воздействующий на тело, можно представить в виде функции

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(t)=0, && t<0, \\ &\varphi(t)=1, && nT<t<nT+T_1, && n=0,\ 1,\ \ldots, \\ &\varphi(t)=0, && nT+T_1<t<(n+1)T, && n=0,\ 1,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Например, пусть $F_0\varphi(t)$ — поток, равный F_0 в течение времени T_1 и нулю в течение $T-T_1$ и т. д., т. е. период функции $F_0\varphi(t)$ равен T. Из теоремы VIII § 2 гл. XII следует, что

$$\bar{\varphi}=\frac{1-e^{-pT_1}}{p(1-e^{-pT})}. \tag{5.2}$$

Для пояснения метода рассмотрим задачу, которую мы уже обсуждали в § 6 гл. III, именно: *при* $x=0$ *область* $0<x<l$ *имеет температуру* $v=0$, *а при* $x=l$ — *температуру* $v=\varphi(t)$.

Как и выше (см. § 6 гл. XII), используя (5.2), получим

$$\bar{v}=\frac{(1-e^{-pT_1})\operatorname{sh} qx}{p(1-e^{-pT})\operatorname{sh} ql}, \tag{5.3}$$

или

$$\bar{v}=(1-e^{-pT_1}+e^{-pT}-e^{-p(T+T_1)}+\ldots)\frac{\operatorname{sh} qx}{p\operatorname{sh} ql}. \tag{5.4}$$

Вначале нужно найти значения v в первый период после $t=0$. Из формулы (5.4) данной главы, (6.10) гл. XII и теоремы VII § 2 той же главы следует, что

$$v=\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad 0<t<T_1, \tag{5.5}$$

$$v=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left\{\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]-\exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2(t-T_1)}{l^2}\right]\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad T_1<t<T. \tag{5.6}$$

Эти решения, конечно, можно было получить и в гл. XII, и пока мы еще не видим их очевидной связи с решением для установившегося периодического режима.

Для его нахождения применим к выражению (5.3) теорему обращения

$$v=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}(1-e^{-\lambda T_1})\operatorname{sh}\mu x\,d\lambda}{\lambda(1-e^{-\lambda T})\operatorname{sh}\mu l}, \tag{5.7}$$

где, как обычно, $\mu=(\lambda/k)^{1/2}$. Подынтегральная функция в (5.7) имеет простой полюс в точке $\lambda=0$, который дает член (xT_1/lT), и простые полюсы при

$$\lambda=\frac{2m\pi i}{T}, \qquad m=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{5.8}$$

которые в свою очередь дают ряд членов, описывающих колебания с периодами T, $\frac{1}{2}T$, ... Они составляют ряд Фурье для установившейся периодической части решения (температуры); ее мы сейчас не определяем; обозначив через v_s ее величину, мы затем будем искать ее в более удобной форме. Наконец, подынтегральная функция имеет еще ряд полюсов при

$$\lambda=-\frac{\varkappa n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{5.9}$$

Определяя вычеты относительно этих полюсов и комбинируя найденные результаты, мы получим решение, содержащее члены, дающие установившуюся периодическую его часть, и члены, дающие переходную часть

$$v = v_s + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left[\exp\left(-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right) - \exp\left(-\frac{\varkappa n^2\pi^2 (t-T_1)}{l^2}\right)\right]}{n\left(1-e^{kn^2\pi^2 T/l^2}\right)} \sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (5.10)$$

Итак, (5.10) служит общим решением, справедливым для всех значений времени; поэтому оно должно совпадать с решением (5.5), если $0 < t < T_1$, и с решением (5.6), если $T_1 < t < T$. Таким образом, приравнивая (5.10) и (5.5), мы получаем при $0 < t < T$ соотношение

$$v_s = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left[\exp\left(\frac{\varkappa n^2\pi^2 (T_1-t)}{l^2}\right) - \exp\left(\frac{\varkappa n^2\pi^2 (T-t)}{l^2}\right)\right]}{n\left[1-\exp\left(\frac{\varkappa n^2\pi^2 T}{l^2}\right)\right]} \sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (5.11)$$

Поскольку левая часть в формуле (5.11) является периодической функцией с периодом T, отсюда следует, что правая часть представляет собой ее значение u в момент времени $rT + t$, где r — любое целое число. Аналогичным образом, используя (5.6), получим, что установившаяся температура в момент $rT + t$, где $T_1 < t < T$, равна следующей величине:

$$v_s = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left[\exp\left(\frac{\varkappa n^2\pi^2 (T+T_1-t)}{l^2}\right) - \exp\left(\frac{\varkappa n^2\pi^2 (T-t)}{l^2}\right)\right]}{n\left(1-\exp\left(\frac{\varkappa n^2\pi^2 T}{l^2}\right)\right]} \sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (5.12)$$

Эти решения согласуются с решениями (6.17), (6.19) гл. III, полученными при помощи теоремы Дюамеля. Ниже мы приведем другие решения того же типа.

I. *Полуограниченное твердое тело* $x > 0$, *поверхность* $x = 0$ *нагревается пульсирующим* *) *тепловым потоком* $F_0\varphi(t)$.

В этом случае температура поверхности в конце концов становится равной

$$\frac{2F_0T_1}{KT}\left(\frac{\varkappa t}{\pi}\right)^{1/2} + v_p. \quad (5.13)$$

Она складывается из периодической части v_p, накладывающейся на возрастающую температуру, обусловленную средним потоком на поверхности, равным F_0T_1/T. Величина v_p через промежуток времени bT после начала периода нагрева имеет следующее значение:

$$v_p = \frac{2F_0T_1}{Ka}\left(\frac{\varkappa}{\pi T}\right)^{1/2}\left\{(1-a)\,b^{1/2} - \pi^{-1/2} I(a, b)\right\}, \quad 0 < b < a, \quad (5.14)$$

$$v_p = \frac{2F_0T_1}{Ka}\left(\frac{\varkappa}{\pi T}\right)^{1/2}\left\{(1-a)\,b^{1/2} - (b-a)^{1/2} - \pi^{-1/2} I(a, b)\right\}, \quad a < b < 1, \quad (5.15)$$

где $a = T_1/T$, а

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-b\xi^2}\left[(1-a)\,e^{-\xi^2} - e^{-(1-a)\,\xi^2} + a\right] d\xi}{\xi^2\left(1-e^{-\xi^2}\right)}. \quad (5.16)$$

---

*) Эта задача появляется в качестве приближения для многих практических задач, например для задачи о нагревании пулеметов и для задачи о нагревании цилиндра трением на участке его поверхности. Нагревание вращающегося анода рентгеновской трубки рассматривается в статье [32]. Пульсирующий тепловой поток через круглую площадку на поверхности полуограниченного тела рассмотрен в работе Егера [33].

Интегралы (5.16) взять сравнительно легко. Некоторые их значения приведены в [33].

II. *Пульсирующий точечный источник в неограниченной среде.*

Пусть в начале координат находится источник мощностью (на единицу длины) $Q\varphi(t)$. Тогда при достижении установившегося режима температура на расстоянии r от начала координат через время bT после начала периода нагрева равна $(Qa/4\pi Kr)+v_p$, где периодическая часть v_p имеет вид

$$v_p=\frac{Q}{4\pi Kr}\left\{\Phi^*\left(\frac{C}{2b^{1/2}}\right)-a+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-b\xi^2}[e^{-(1-a)\xi^2}-e^{-\xi^2}]\sin C\xi}{\xi(1-e^{-\xi^2})}d\xi\right\},\quad 0<b<a,\quad (5.17)$$

где

$$a=\frac{T_1}{T},\qquad C=r(\varkappa T)^{-1/2}. \quad (5.18)$$

III. *Пульсирующий линейный источник в неограниченной среде.*

Предположим, что вдоль некоторой прямой расположен линейный источник тепла мощностью (на единицу длины) $Q\varphi(t)$. Тогда при больших значениях времени температура на расстоянии r от этой прямой равна

$$-\frac{Qa}{4\pi K}\operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)+v_p, \quad (5.19)$$

где периодическая часть v_p при $0<b<a$ в свою очередь равна

$$v_p=-\frac{Q(1-a)}{4\pi K}\operatorname{Ei}\left(-\frac{C^2}{4b}\right)-\frac{Q}{2\pi K}\int_0^\infty\frac{e^{-b\xi^2}J_0(C\xi)\left[(1-a)e^{-\xi^2}-e^{-(1-a)\xi^2}+a\right]d\xi}{\xi(1-e^{-\xi^2})}. \quad (5.20)$$

Величины a, b и C определены выше в примере II.

§ 6. Линейная асимптотика и запаздывание

Если изображение $\bar{y}$ какой-нибудь величины имеет вид

$$\bar{y}=\frac{f(p)}{p^2\Delta(p)}, \quad (6.1)$$

где дробь $f(p)/\Delta(p)$ при $p=0$ не имеет особенности, то y определяется соотношением *)

$$y=\frac{f(0)}{\Delta(0)}(t-L)+\ldots, \quad (6.2)$$

где

$$L=\frac{f(0)\Delta'(0)-\Delta(0)f'(0)}{f(0)\Delta(0)}. \quad (6.3)$$

Таким образом, при больших значениях времени y представляет собой в пределе прямую с наклоном $f(0)/\Delta(0)$, отсекающую на оси t отрезок, или «запаздывание», L. В теории теплопроводности встречается много величин, обладающих аналогичными свойствами, например: 1) суммарный тепловой поток через стенку, поверхности которой поддерживаются при постоянных температурах; 2) температура в теле при линейном росте температуры поверхности и 3) температура в замкнутой, термически изолированной системе, к которой в единицу времени подводится постоянное количество тепла.

Эта асимптотика имеет большое значение по двум причинам: 1) она дает приближенные значения температуры, что во многих случаях является достаточным; 2) измерение наклона и отсеченного отрезка служит методом одновременного опре-

*) В соотношении (6.2) все члены, кроме первого, содержат отрицательные степени t, т. е. затухают с увеличением t. (*Прим. ред.*)

деления *) K и $\varkappa$. Кроме того, запаздывание служит удобной мерой возможных ошибок измерительных приборов, подвергающихся воздействию переменных температур.

Выше уже приводилось много примеров для простых случаев, но описываемый здесь метод применим также для таких сложных систем, что получение для них полного решения в явном виде становится практически невозможным. Например, для расчета запаздываний в случае сложных стенок с произвольным числом слоев был дан обычный простой метод **).

Ниже мы приводим решение для запаздывания температуры в замкнутых системах. Во всех случаях K, ρ, c и $\varkappa$ — термические коэффициенты твердого тела.

I. *Пластина* $0 < x < a$. *В плоскости* $x = 0$ *тепловой поток отсутствует. Плоскость* $x = a$ *соприкасается с хорошо перемешиваемой жидкостью или идеальным проводником с массой* M (*на единицу поверхности*) *и удельной теплоемкостью* c', *к которой при* $t > 0$ *в единицу времени подводится постоянное количество тепла. На поверхности* $x = a$ *контактное сопротивление равно* $1/hK$. $\mu = Mc'/a\rho c$.

Запаздывания L_x в твердом теле и L_f в жидкости равны соответственно

$$L_x = \frac{a^2}{\varkappa(1+\mu)}\left\{\frac{\mu}{2} + \frac{1}{6} + \frac{\mu}{ah}\right\} - \frac{x^2}{2\varkappa}, \quad L_f = -\frac{a^2}{\varkappa(1+\mu)}\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{ah}\right\}. \qquad (6.4)$$

II. *Цилиндр* $0 \leqslant r < a$ *находится в контакте с хорошо перемешиваемой жидкостью с массой* M (*на единицу длины*). *Подвод тепла и контактное сопротивление такие же, как и в примере* I. $\mu = Mc'/\pi a^2\rho c$.

В данном случае

$$L_r = \frac{a^2}{\varkappa(1+\mu)}\left\{\frac{\mu}{4} + \frac{1}{8} + \frac{\mu}{2ah}\right\} - \frac{r^2}{4\varkappa}, \quad L_f = -\frac{a^2}{\varkappa(1+\mu)}\left\{\frac{1}{8} + \frac{1}{2ah}\right\}. \qquad (6.5)$$

III. *Шар* $0 \leqslant r < a$ *находится в контакте с хорошо перемешиваемой жидкостью с массой* M. *Подвод тепла и контактное сопротивление такие же, как и в примере* I. $\mu = 3Mc'/4\pi a^3\rho c$.

В данном случае

$$L_r = \frac{a^2}{\varkappa(1+\mu)}\left\{\frac{\mu}{6} + \frac{1}{10} + \frac{\mu}{3ah}\right\} - \frac{r^2}{6\varkappa}, \quad L_f = -\frac{a^2}{\varkappa(1+\mu)}\left\{\frac{1}{15} + \frac{1}{3ah}\right\}. \qquad (6.6)$$

Следует отметить, что хотя эти запаздывания заметно зависят от h (особенно если его величина мала), значения $(L_c + \mu L_f)$, где L_c — запаздывание в центре ($x = 0$ или $r = 0$), не зависят от h; они равны $a^2/6\varkappa$, $a^2/8\varkappa$ и $a^2/10\varkappa$ для пластины, цилиндра и шара соответственно. Численным расчетом можно показать, что этот результат приближенно справедлив также для ограниченного цилиндра, рассматриваемого ниже.

IV. *Цилиндр радиуса* a *и длиной* l *всей своей поверхностью соприкасается с хорошо перемешиваемой жидкостью с массой* M *и удельной теплоемкостью* c', *к которой при* $t > 0$ *подводится постоянное количество тепла (в единицу времени). Контактное сопротивление отсутствует.* $\mu = Mc'/\pi a^2 l\rho c$, $\lambda = 1/(1+\mu)$.

Ниже приводятся данные ***) о запаздывании в жидкости L_f и в центре цилиндра L_c.

l/a	$\varkappa L_c/a^2$	$-\varkappa L_f/a^2$	$\varkappa(L_c+\mu L_f)/a^2$
1,0	0,102—0,040λ	0,040λ	0,062
1,5	0,162—0,061λ	0,061λ	0,101
2,0	0,201—0,075λ	0,075λ	0,126
2,5	0,223—0,084λ	0,084λ	0,139
3,0	0,235—0,091λ	0,091λ	0,144
4,0	0,246—0,099λ	0,099λ	0,147
6,0	0,248—0,108λ	0,108λ	0,140
∞	0,250—0,125λ	0,125λ	0,125

*) В статье [34] приведены формулы для определения количества тепла, проходящего через пластину, поверхности которой имеют постоянную температуру. Соответствующие формулы для шара приведены в [35], а для цилиндра — в [36]. Последний случай рассмотрен также в [37].

**) Случай цилиндра рассматривается в [38, 39].

***) Решение данной задачи можно найти в [31]. Аналогичным образом можно рассмотреть отмеченный выше случай наличия на поверхности контактного сопротивления.

§ 7. Выделение тепла

Выше уже был решен ряд задач, в которых выделение количества тепла в единицу времени в единице объема либо постоянно, либо является простой функцией положения или времени. Все эти задачи можно решить непосредственным применением метода преобразования Лапласа. Здесь мы покажем применение этого метода к более сложным задачам, в частности к нескольким задачам, в которых количество выделяемого тепла является линейной функцией температуры, и к задачам, в которых оно определяется решением уравнения диффузии.

I. *Пластина $0 < x < l$. Тепловой поток на плоскости $x = 0$ равен нулю. Температура плоскости $x = l$ и начальная температура равны нулю. При $t > 0$ в единицу времени выделяется количество тепла, равное $K(A + Bv)$.*

В данном случае следует решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} + Bv = -A. \tag{7.1}$$

Вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} - q^2\bar{v} = -\frac{A}{p}, \tag{7.2}$$

где

$$q^2 = \frac{p}{\varkappa} - B. \tag{7.3}$$

Решать это уравнение следует при условиях

$$\bar{v} = 0, \quad x = l; \qquad \frac{d\bar{v}}{dx} = 0, \quad x = 0. \tag{7.4}$$

Искомое решение имеет вид

$$\bar{v} = \frac{A}{pq^2}\left\{1 - \frac{\operatorname{ch} qx}{\operatorname{ch} ql}\right\}, \tag{7.5}$$

$$v = \frac{A}{B}\left\{\frac{\cos xB^{1/2}}{\cos lB^{1/2}} - 1\right\} + \frac{16Al^2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \exp\{[-(2n+1)^2\pi^2 + 4Bl^2]\,\varkappa t/4l^2\}\cos(2n+1)\pi x/2l}{[4Bl^2 - (2n+1)^2\pi^2](2n+1)}. \tag{7.6}$$

Это решение справедливо при любом знаке B. Если B отрицательно (например, при нагревании электрическим током таких веществ, как графит с отрицательным температурным коэффициентом сопротивления, или в случае отвода тепла от стержня излучением или конвекцией), то решение для установившегося периодического режима содержит гиперболические функции. При положительном B (что обычно имеет место при нагревании электрическим током) все показательные функции в решении (7.6) при $t \to \infty$ стремятся к нулю, если

$$B < \frac{\pi^2}{4l^2}. \tag{7.7}$$

Если это неравенство справедливо, то существует установившееся распределение температуры, определяемое выражением *)

$$\frac{A}{B}\left\{\frac{\cos xB^{1/2}}{\cos lB^{1/2}} - 1\right\}. \tag{7.8}$$

При $B > \pi^2/4l$ количество выделяющегося в единицу времени тепла слишком велико, чтобы его можно было удалить, и установившееся распределение не наступает.

II. *Та же задача, что и в примере I, но граничные условия имеют вид*

$$\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0, \quad x = l. \tag{7.9}$$

*) Численные значения установившейся температуры для пластины, цилиндра и шара приведены (для случая $B > 0$) в статье [40] и (для случая $B < 0$) в статье [41].

В данном случае

$$v=\frac{hA\cos xB^{1/2}}{B\left\{h\cos lB^{1/2}-B^{1/2}\sin lB^{1/2}\right\}}-\frac{A}{B}+$$
$$+2Ahl^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(x\alpha_n/l)\exp\left[\left(Bl^2-\alpha_n^2\right)\varkappa t/l^2\right]}{\left(Bl^2-\alpha_n^2\right)\left[\alpha_n^2+lh(lh+1)\right]\cos\alpha_n}, \quad (7.10)$$

где α_n, $n=1, 2, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\alpha\operatorname{tg}\alpha=lh. \quad (7.11)$$

В этом случае условие существования установившегося состояния имеет вид

$$B<\frac{\alpha_1^2}{l^2}. \quad (7.12)$$

III. *Цилиндр* $0\leqslant r<a$ *с нулевой начальной температурой; при* $t>0$ *граничная поверхность* $r=a$ *поддерживается при нулевой температуре. При* $t>0$ *в единицу времени выделяется количество тепла, равное* $K(A+Bv)$.

В данном случае

$$v=\frac{A}{B}\frac{J_0(rB^{1/2})}{J_0(aB^{1/2})}-\frac{A}{B}+2a^2A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left[\frac{\left(-\alpha_n^2+a^2B\right)\varkappa t}{a^2}\right]J_0\left(\frac{r\alpha_n}{a}\right)}{\alpha_n\left(a^2B-\alpha_n^2\right)J_1(\alpha_n)}, \quad (7.13)$$

где α_n, $n=1, 2, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$J_0(\alpha)=0. \quad (7.14)$$

Если B положительно, то решение для установившегося состояния существует только в том случае, когда $B<\alpha_1^2/a^2$.

IV. *Установившаяся температура в пластине, когда количество выделяющегося в единицу времени тепла является экспоненциальной функцией температуры.*

Решение такой задачи с установившейся температурой *) представляет интерес в связи с существованием верхнего предела количества выделяющегося в единицу времени тепла, что видно из соотношений (7.7) и (7.12).

Простым изменением переменных подлежащее решению уравнение можно привести к виду

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\beta e^v=0, \qquad 0<x<1, \quad (7.15)$$

с условиями

$$\frac{dv}{dx}=0, \qquad x=0, \quad (7.16)$$

и

$$v=0, \qquad x=1. \quad (7.17)$$

Предположим, что v_0 есть значение v при $x=0$. Вначале решим уравнение (7.15), учитывая (7.16) и зная, что при $x=0$ $v=v_0$. Первый интеграл (7.15), удовлетворяющий этим условиям, имеет вид

$$\frac{dv}{dx}=-\left\{2\beta\left(e^{v_0}-e^v\right)\right\}^{1/2}. \quad (7.18)$$

Повторное интегрирование дает

$$v=v_0-2\ln\operatorname{ch}\left[x\left(\frac{1}{2}\beta e^{v_0}\right)^{1/2}\right]. \quad (7.19)$$

Так как это решение должно удовлетворять уравнению (7.17), то v_0 определяется соотношением

$$e^{1/2 v_0}=\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\beta e^{v_0}\right)^{1/2},$$

*) Неустановившееся состояние рассматривается в [42], где для расчетов использовался дифференциальный анализатор.

или, полагая

$$z=\left(\frac{1}{2}\beta e^{v_0}\right)^{1/2},$$

$$\operatorname{ch} z=\left(\frac{1}{2}\beta\right)^{-1/2} z. \qquad (7.20)$$

Если $0<\beta<0{,}88\ldots$, то это уравнение имеет два корня, соответствующие двум возможным значениям v_0 и тем самым двум возможным решениям для установившегося состояния. Если $\beta>0{,}88\ldots$, то это уравнение не имеет действительных корней и решение отсутствует.

V. *Тепло выделяется в результате необратимой реакции первого порядка.* В этом случае, допуская, что скорость реакции не зависит от температуры, можно считать, что количество тепла, выделяющегося в единицу времени, равно KAC, где A — постоянная, а C — концентрация диффундирующего вещества. Последняя определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{k}{D}C=0, \qquad (7.21)$$

где D — коэффициент диффузии, а k — постоянная [43]. Уравнение (7.21) имеет форму, уже рассмотренную в настоящем параграфе; его можно решить при помощи методов данного параграфа или соотношения (14.25) гл. I. Когда C найдено, искомая температура определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}+AC=0. \qquad (7.22)$$

Вспомогательное уравнение для (7.22) при нулевой начальной температуре имеет вид

$$\frac{d^2\bar v}{dx^2}-\frac{p}{\varkappa}\bar v=-A\bar C. \qquad (7.23)$$

Таким образом, если $\bar C$ известно, то его можно подставить в уравнение (7.23), и тогда величину C определять не нужно.

В качестве примера рассмотрим пластину $0<x<l$ с нулевой начальной температурой, нулевой концентрацией и с граничными условиями

$$\frac{\partial C}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad x=0, \qquad (7.24)$$

$$C=C_0, \quad v=0, \quad x=l. \qquad (7.25)$$

Тогда при этих граничных условиях из (7.21) получим

$$\bar C=\frac{C_0\operatorname{ch} x\,[(p+k)/D]^{1/2}}{p\operatorname{ch} l\,[(p+k)/D]^{1/2}}.$$

Использование этого значения $\bar C$ при решении уравнения (7.23) дает

$$\bar v=\frac{AC_0\varkappa D}{(\varkappa-D)\,p\,[p+k\varkappa/(\varkappa-D)]}\left\{\frac{\operatorname{ch} x\,(p/\varkappa)^{1/2}}{\operatorname{ch} l\,(p/\varkappa)^{1/2}}-\frac{\operatorname{ch} x\,[(p+k)/D]^{1/2}}{\operatorname{ch} l\,[(p+k)/D]^{1/2}}\right\},$$

$$v=\frac{AC_0D}{k}\left\{1-\frac{\operatorname{ch} x\,(k/D)^{1/2}}{\operatorname{ch} l\,(k/D)^{1/2}}\right\}+$$
$$+\frac{16AC_0Dl^2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(2n+1)\pi x/2l}{(2n+1)\,[(2n+1)^2\pi^2(\varkappa-D)-4kl^2]}\exp\left[-\frac{\varkappa(2n+1)^2\pi^2t}{4l^2}\right]-$$
$$-16AC_0\pi\varkappa l^2D\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)\cos(2n+1)\pi x/2l}{[D(2n+1)^2\pi^2+4kl^2]\,[(2n+1)^2\pi^2(\varkappa-D)-4kl^2]}\times$$
$$\times\exp\left[-kt-\frac{(2n+1)^2\pi^2Dt}{4l^2}\right].$$

При помощи изложенного метода можно сравнительно легко решить ряд задач подобного типа [44].

§ 8. Система автоматического регулирования температуры

На практике часто оказывается желательным поддерживать постоянную температуру*) в некоторой области, например в печи, которая теряет тепло как посредством установившегося теплового потока через ее стенки, так и в результате искусственных возмущений (например, при открывании ее дверцы). Для этого поступление тепла в печь регулируется по термометру в печи. Наиболее распространенные методы регулировки температуры заключаются в следующем: 1) *регулировка «включение — выключение»*, при котором нагревающий ток (или часть его) включается при падении до определенного уровня температуры, показываемой термометром, и выключается при ее повышении до другого заданного уровня; 2) *пропорциональная регулировка*, при которой количество тепла, подводимого в единицу времени, пропорционально отклонению показания термометра от заданной величины.

В обоих случаях возникают значительные трудности, связанные с тем, что между температурой рассматриваемой области и соответствующими изменениями тока нагрева всегда имеется запаздывание; помимо других причин, оно объясняется следующим: изменение температуры сначала проникает сквозь оболочку термометра и лишь затем через какой-то промежуток времени достигает материала самого термометра. Таким образом, самой простой идеализированной схемой реальной печи должна быть следующая: масса M хорошо перемешиваемой жидкости (нагревательный элемент, содержимое печи и т. д.), в которую в единицу времени подается заданное количество тепла $Q(t)$ и которая теряет в единицу времени количество тепла, пропорциональное ее температуре (в результате передачи тепла сквозь стенки печи), находится на границе $x=0$ в контакте с пластиной $0<x<l$ (оболочка термометра и т. п.), причем на границе $x=l$ потери тепла отсутствуют. Поступление тепла $Q(t)$ определяется температурой v_l на плоскости $x=l$. Такая идеализированная схема уже изучалась в примерах 7 и 8 § 13 гл. III. Аналогичным способом можно рассмотреть и другие случаи. Таким образом, в случае систем «включение — выключение», в которых Q всегда имеет одно из двух постоянных значений, поведение v_l легко изучить для любой конкретной системы (общие решения слишком сложны, чтобы приводить их здесь); в частности, пользуясь приведенными в § 6 гл. III и § 5 гл. XV методами, можно изучить поведение v_l в случае периодических изменений Q, имеющих форму прямоугольной волны.

В случае пропорциональной регулировки мы получаем для описанной системы соотношение $Q(t)=C[V-v_l]$, где C и V — постоянные, и предлагаемая теория открывает нам новые интересные особенности. Чтобы разобраться в них при помощи простейших расчетов, подробно рассмотрим следующую систему.

Неограниченное твердое тело $-\infty<x<\infty$ нагревается в результате подвода тепла к плоскости $x=0$. Начальная температура тела равна нулю, количество тепла, подводимого в единицу времени на единицу поверхности, определяется формулой

$$Q=2C(V-v_l), \tag{8.1}$$

где C и V — постоянные, а v_l — температура на плоскости $x=l$.

---

*) О системах, применяемых на практике, см. [45, 46]. Теория этих систем является частью общей теории сервомеханизмов (см. [47]).

Тогда граничное условие для полуограниченного тела $x > 0$ (в которое поступает половина общего количества тепла) будет иметь вид

$$-K\frac{\partial v}{\partial x} = C(V - v_l), \quad x = 0. \tag{8.2}$$

Следовательно, граничное условие для вспомогательного уравнения запишется следующим образом:

$$-K\frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{CV}{p} - C\bar{v}_l, \quad x = 0. \tag{8.3}$$

Решение вспомогательного уравнения, ограниченное при $x \to \infty$, имеет вид $\bar{v} = Ae^{-qx}$, так что $\bar{v}_l = Ae^{-ql}$. Подстановка в условие (8.3) дает A, и мы окончательно получаем

$$\bar{v} = \frac{Vke^{-qx}}{p(q + ke^{-ql})}, \tag{8.4}$$

где $k = C/K$ — положительная постоянная величина.

Для определения v можно разложить функцию (8.4) в ряд (см. § 5 гл. XII); тогда мы получим

$$\bar{v} = kV\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^n}{pq^{n+1}}\exp[-q(x + nl)]. \tag{8.5}$$

Следовательно,

$$v = V\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[2k\sqrt{\varkappa t}\right]^{n+1} \mathrm{i}^{n+1}\Phi^*\left(\frac{x + nl}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \tag{8.6}$$

Этот ряд полезен только при небольших значениях k и t. При других их значениях по нему нельзя судить о поведении v. В этом отношении теорема обращения более полезна. Она дает

$$v = \frac{kV}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\frac{e^{\lambda t - \mu x}d\lambda}{\lambda\left[\mu + ke^{-\mu l}\right]}. \tag{8.7}$$

Подынтегральная функция (8.7) имеет при $\lambda = 0$ точку ветвления. Ее полюсы находятся в точках, определяемых корнями уравнения $z + kle^{-z} = 0$, для которого $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ и где мы принимаем $z = \mu l$. Обозначая $z = \xi \pm i\eta$, $\eta > 0$, мы получаем в этих точках

$$\xi + kle^{-\xi}\cos\eta = 0, \tag{8.8}$$

$$\eta - kle^{-\xi}\sin\eta = 0. \tag{8.9}$$

Отсюда непосредственно выявляются следующие свойства корней:

1) вещественных корней нет, $\eta = 0$;

2) так как в соотношении (8.8) $\cos\eta$ должен быть отрицательным, а в соотношении (8.9) $\sin\eta$ должен быть положительным, η может лежать только в областях $(2n + {}^1/_2)\pi \leqslant \eta \leqslant (2n + 1)\pi$, $n = 0, 1, \ldots$;

3) если $kl = (4n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то имеется чисто мнимый корень, $\eta = (4n + 1)\pi/2$;

4) если $kl = (8n + 3)\pi 2^{-{}^1/_2}\exp\left[\frac{(8n + 3)\pi}{4}\right]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то существует корень

$$\xi = \eta = \frac{(8n + 3)\pi}{4}; \tag{8.10}$$

5) поскольку $\xi = -\eta \operatorname{ctg} \eta$, а $kl = \eta e^{\xi} \operatorname{cosec} \eta$, то в каждой из областей, указанных в пункте 2), как ξ, так и kl, увеличиваются с увеличением η.

Характер изменения корней в зависимости от kl показан на рис. 47, где отмечены положения корней для различных значений kl (см. числа у кривых). В первой области имеется один корень для всех значений kl, больших $\pi/2$; один корень в первой области и один во второй для всех значений kl от $5\pi/2$ до $9\pi/2$ и т. д.; для kl в области $2(n-1)\pi + \frac{1}{2}\pi < kl < 2n\pi + \frac{1}{2}\pi$ имеется n корней.

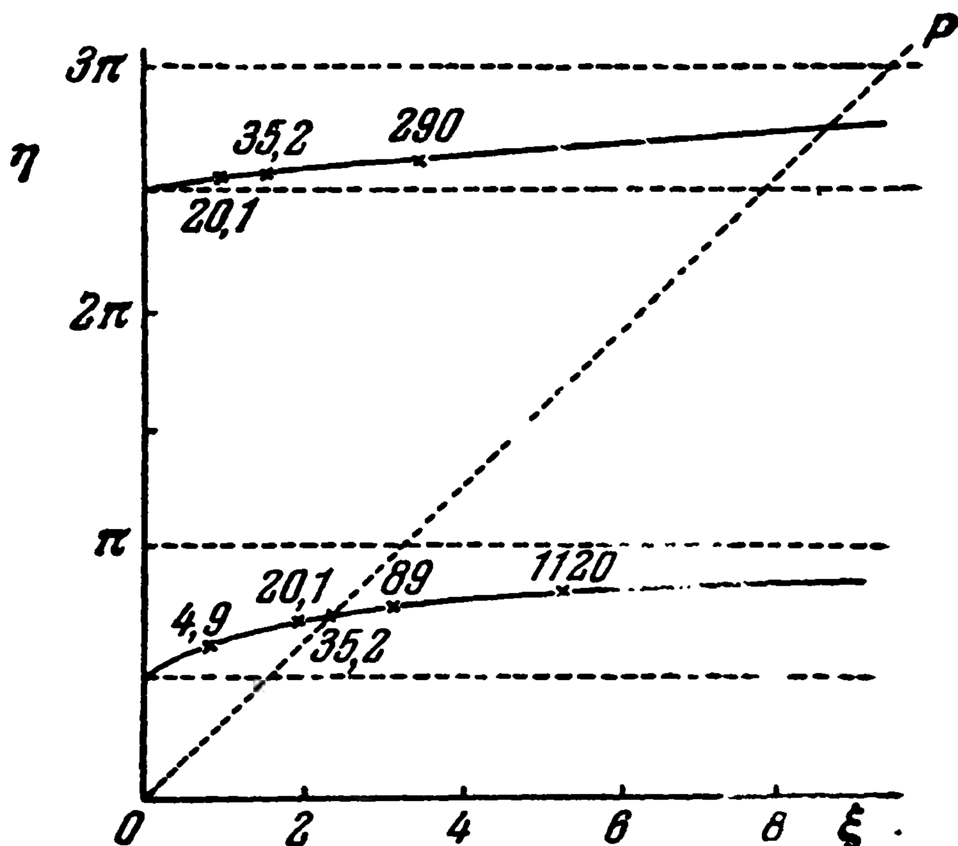


Рис. 47.

Из этих корней те корни, вещественная часть которых больше мнимой (т. е. справа от OP на рис. 47), будут соответствовать неустановившемуся колебанию, тогда как корни, вещественные части которых меньше мнимых (слева от OP), соответствуют затухающему колебанию. Корни (8.10), лежащие на OP, соответствуют поддерживаемому устойчивому колебанию.

Линия $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ должна лежать справа от всех этих полюсов. Поскольку подынтегральная функция (8.7) имеет при $\lambda = 0$ точку ветвления, используем контур, приведенный на рис. 40; тогда обычным путем найдем, что интеграл (8.7) равен сумме интегралов по CD, EF и небольшой окружности с центром в начале координат плюс произведение $2\pi i$ на сумму вычетов относительно полюсов подынтегральной функции. Напишем решение для случая

$$2(n-1)\pi + \frac{1}{2}\pi < kl < 2n\pi + \frac{1}{2}\pi,$$

когда имеется n пар полюсов в точках $\mu l = \alpha_r \pm i\beta_r$, $r = 1, \ldots, n$; если $kl < \frac{1}{2}\pi$, то члены, обусловленные полюсами, отсутствуют.

Полюсы $\lambda = \varkappa\left[\alpha_r^2 - \beta_r^2 \pm 2i\alpha_r\beta_r\right]/l^2$ дают вклад

$$\frac{2lkV}{(\alpha_r + i\beta_r)(1 + \alpha_r + i\beta_r)} \exp\left\{-\frac{x(\alpha_r + i\beta_r)}{l} + \frac{\varkappa\left(\alpha_r^2 - \beta_r^2\right)t}{l^2} + \frac{2i\varkappa t\alpha_r\beta_r}{l^2}\right\} +$$
$$+ \frac{2lkV}{(\alpha_r - i\beta_r)(1 + \alpha_r - i\beta_r)} \exp\left\{-\frac{x(\alpha_r - i\beta_r)}{l} + \frac{\varkappa\left(\alpha_r^2 - \beta_r^2\right)t}{l^2} - \frac{2i\varkappa t\alpha_r\beta_r}{l^2}\right\} =$$
$$= \frac{4lkV \exp\left\{-\frac{\alpha_r x}{l} + \frac{\varkappa\left(\alpha_r^2 - \beta_r^2\right)t}{l^2}\right\}}{\sqrt{\left\{\left(\alpha_r^2 + \beta_r^2\right)\left[(1 + \alpha_r)^2 + \beta_r^2\right]\right\}}} \cos\left\{\frac{2\varkappa\alpha_r\beta_r t}{l^2} - \frac{\beta_r x}{l} - \varphi_r - \psi_r\right\},$$

где

$$\varphi_r = \operatorname{arctg}(\beta_r/\alpha_r), \qquad \psi_r = \operatorname{arctg}\{\beta_r/(1 + \alpha_r)\}.$$

Интеграл по малой окружности с центром в начале координат дает V, а интегралы по CD и EF дают в пределе

$$-\frac{2kV}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa u^2 t}\left[u \cos ux - k \sin u(l - x)\right] du}{u\left\{u^2 + k^2 - 2ku \sin ul\right\}}.$$

Итак, в этом случае

$$v = V + \sum_{r=1}^{n} \frac{4lkV \exp\left[-\frac{\alpha_r x}{l} + \frac{\varkappa(\alpha_r^2 - \beta_r^2)t}{l^2}\right]}{\sqrt{(\alpha_r^2+\beta_r^2)[(1+\alpha_r)^2+\beta_r^2]}} \cos\left\{\frac{2\varkappa\alpha_r\beta_r t}{l^2} - \frac{\beta_r x}{l} - \varphi_r - \psi_r\right\} -$$

$$- \frac{2kV}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa u^2 t}[u \cos ux - k \sin u(l-x)]\,du}{u\{u^2 + k^2 - 2ku \sin ul\}}. \qquad (8.11)$$

На рис. 48 приведены некоторые значения v_l, рассчитанные по этой формуле. На кривой I (для $kl = 4{,}9$) температура медленно приближается к своей предельной величине V; при бо́льших значениях k предельная величина достигается быстрее и затухающие колебания, совершающиеся около нее, имеют вид кривой II, построенной для $kl = 20{,}1$; при $kl = 35{,}2$ происходят поддерживаемые устойчивыми колебания относительно предельного значения (кривая III); при еще бо́льших значениях kl мы получим колебание с возрастающей амплитудой.

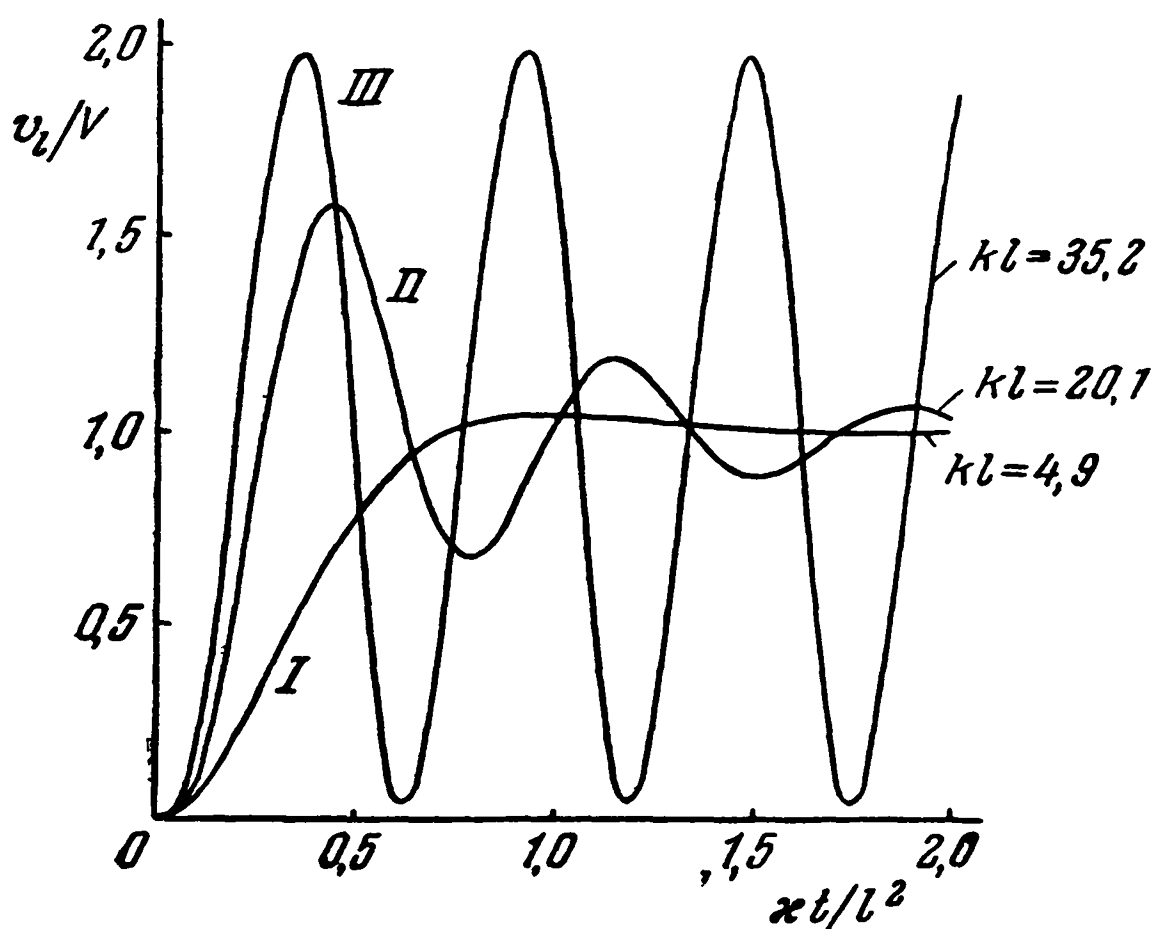


Рис. 48. Поведение системы с автоматическим регулированием температуры при различных значениях параметров регулирования.

Этот ход температуры и возможность ее устойчивой «поимки» характерны для такой системы. Приведенный выше простой пример, не представляющий физического интереса, был выбран потому, что нули знаменателя в решении (8.7) можно найти сравнительно просто; в системах, встречающихся на практике, эти знаменатели гораздо сложнее и требуют утомительного численного и графического исследования [49, 50] *).

Простейшим обобщением рассмотренного выше случая служит случай полуограниченного тела $x > 0$, теряющего с плоскости $x = 0$ количество тепла, равное произведению H на температуру плоскости. Пусть в единицу времени к плоскости $x = 0$ подводится количество тепла, равное

$$Q + C(V_0 - v_l), \qquad (8.12)$$

где v_l — температура в плоскости $x = l$, V_0 — требуемая конечная температура, C — постоянная, а $Q_0 = HV$ — постоянное количество подводимого в единицу времени тепла, которое необходимо для поддержания плоскости $x = 0$ при температуре V_0. Тогда если в начальный момент тело имело нулевую температуру, то изображение решения, найденное таким же путем, как и выше, имеет вид

$$\bar{v} = \frac{(h+k)V_0 e^{-qx}}{p(q + h + ke^{-ql})}, \qquad (8.13)$$

*) В [48] разработан метод последовательных приближений для обратных преобразований, встречающихся в задачах подобного типа.

где $h = H/K$ и $k = C/K$. Соответствующую задачу для пластины $0 < x < l$ в отсутствие тепловых потерь при $x = l$ можно решить аналогичным образом. Решения для установившегося периодического режима для этого случая были исследованы в [51, 52].

§ 9. Неоднородные тела

Если термические свойства твердого тела меняются от точки к точке, то точные решения можно найти только для ограниченного числа частных случаев. Для задачи с линейным тепловым потоком дифференциальное уравнение имеет вид *)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \rho c\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{9.1}$$

а соответствующее вспомогательное уравнение для нулевой начальной температуры записывается в виде

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\bar{v}}{dx}\right) - \rho c p\bar{v} = 0$$

или

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} + \frac{1}{K}\frac{dK}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx} - \frac{\rho c}{K}p\bar{v} = 0. \tag{9.2}$$

Простейшими являются случаи, когда уравнение (9.2) можно преобразовать в уравнение Бесселя; тогда часто используется результат (см. [66]), согласно которому общее решение уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2\alpha - 2\beta\nu + 1}{z}\frac{du}{dz} + \frac{\beta^2\gamma^2 z^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\beta\nu)}{z^2}u = 0 \tag{9.3}$$

имеет вид

$$z^{\beta\nu-\alpha}C_\nu(\gamma z^\beta), \tag{9.4}$$

где $C_\nu(x)$ — цилиндрическая функция $AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$.

Рассмотрим теперь ряд типичных случаев, поддающихся решению.

I. $$K = K_0x^n, \quad \rho c = \mathrm{const}. \tag{9.5}$$

В этом случае решение уравнения (9.2) имеет вид

$$x^{\frac{1}{2}(1-n)} I_\nu\left(\frac{2qx^{1-\frac{1}{2}n}}{2-n}\right) \quad \text{и} \quad x^{\frac{1}{2}(1-n)} K_\nu\left(\frac{2qx^{1-\frac{1}{2}n}}{2-n}\right), \tag{9.6}$$

где

$$\varkappa = \frac{K_0}{\rho c}, \quad q^2 = \frac{p}{\varkappa}, \quad \nu = \frac{1-n}{2-n} \tag{9.7}$$

и $n \neq 2$. Если $n = 2$, то решения запишутся следующим образом:

$$x^{[-1\pm\sqrt{(1+4q^2)}]/2}. \tag{9.8}$$

В качестве конкретного примера рассмотрим *область $x > 0$ с нулевой начальной температурой. В момент времени $t = 0$ температура плоскости $x = 0$ становится равной единице.*

---

*) Задачи с уравнениями этого типа впервые исследовались в [53, 54]. В последнее время ими заинтересовались в связи с переносом тепла турбулентным потоком [55—57]. Решения в явном виде, связанные с рассматриваемыми ниже решениями примера I, были приведены в [58—64]. Уравнение $\frac{a\partial^2(vx)}{\partial x^2} - \frac{\partial[(bx+c)v]}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0$, встречающееся в некоторых биологических задачах, рассмотрено в [65].

Для определенности примем также $0 \leqslant n \leqslant 1$; этот случай будет представлять наибольший практический интерес. Тогда решение уравнения (9.2), ограниченное на бесконечности, примет вид

$$\bar{v} = A x^{\frac{1}{2}(1-n)} K_{\nu}\left(\frac{2qx^{1-\frac{1}{2}n}}{2-n}\right), \tag{9.9}$$

где ν определяется (9.7), а A должно быть выбрано так, чтобы при $x \to 0$, $\bar{v} \to 1/p$. Тогда, если $z \to 0$, то

$$z^{\nu} K_{\nu}(z) \to 2^{\nu-1}\Gamma(\nu). \tag{9.10}$$

Используя этот результат, мы найдем A и, следовательно, окончательно получим

$$\bar{v} = \frac{2x^{\frac{1}{2}(1-n)}}{\Gamma(\nu)(2-n)^{\nu} \varkappa^{\frac{1}{2}\nu}} p^{\frac{1}{2}\nu-1} K_{\nu}\left(\frac{2x^{1-\frac{1}{2}n}}{(2-n)\varkappa^{\frac{1}{2}}} p^{\frac{1}{2}}\right). \tag{9.11}$$

Итак, используя формулу (26) приложения 5, находим *)

$$v = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{X}^{\infty} e^{-u} u^{\nu-1}\, du, \tag{9.12}$$

где

$$X = \frac{x^{2-n}}{(2-n)^2 \varkappa t}. \tag{9.13}$$

Задачи, в которых начальная температура произвольна, и задачи для ограниченной области $0 < x < b$ можно рассматривать обычным способом.

II. *Если*

$$K = K_0(1 + \alpha x) \quad \text{и} \quad q = \left(\frac{p\rho c}{K_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9.14}$$

то решения вспомогательного уравнения (9.2) имеют вид

$$I_0\left[\frac{2q(1+\alpha x)^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\right] \quad \text{и} \quad K_0\left[\frac{2q(1+\alpha x)^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\right], \tag{9.15}$$

и, следовательно, решения задач, в которых теплопроводность имеет такую форму, можно получить из решений задач для областей, ограниченных цилиндрическими поверхностями. Таким образом, например, для полуограниченной области $x > 0$ с теплопроводностью, определяемой (9.14), с нулевой начальной температурой и плоскостью $x = 0$, поддерживаемой, начиная с момента $t = 0$, при постоянной температуре V, температура в плоскости x в момент t совпадает с температурой на поверхности $r = a(1 + \alpha x)^{\frac{1}{2}}$ в момент времени $\alpha^2 a^2 t/4$ (см. пример I § 5 гл. XIII) и определяется уравнением (5.6) гл. XIII; кроме того, ее можно найти по графику, изображенному на рис. 41.

Если в (9.14) α отрицательно, например $\alpha < -\beta$, что соответствует линейному уменьшению коэффициента теплопроводности с расстоянием до нуля при $x = 1/\beta$, то искомая температура совпадает с полученной выше (см. (6.8) гл. VII) при $r = a(1 - \beta x)^{\frac{1}{2}}$ в момент $\beta^2 a^2 t/4$ и ее можно найти по рис. 24.

III. *Если*

$$K = K_0 x^n, \qquad c = c_0 x^n, \tag{9.16}$$

то вспомогательное уравнение (9.2) примет вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} + \frac{n}{x}\frac{d\bar{v}}{dx} - q^2\bar{v} = 0, \tag{9.17}$$

*) См. уравнения (15) и (24) работы [67]. Там же показано, что функция, изображение которой имеет вид $p^n K_{\nu}(zp^{\frac{1}{2}})$, является функцией Уиттекера. Помимо этого, можно использовать теорему обращения с контуром рис. 40.

где $q^2 = p/\varkappa_0$, а $\varkappa_0 = K_0/\rho c_0$. Решения уравнения (9.17) имеют вид

$$x^{1/2(1-n)}K_{1/2(1-n)}(qx) \quad \text{и} \quad x^{1/2(1-n)}I_{1/2(1-n)}(qx). \tag{9.18}$$

Решения можно получить так же, как и в примере I.

IV. *Если*

$$K = K_0(1+\alpha x), \qquad c = c_0(1+\alpha x), \tag{9.19}$$

то уравнение (9.2) принимает вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} + \frac{\alpha}{1+\alpha x}\frac{d\bar{v}}{dx} - q^2\bar{v} = 0, \tag{9.20}$$

где $q^2 = p/\varkappa_0$, а $\varkappa_0 = K_0/\rho c_0$. Решениями уравнения (9.20) служат

$$I_0\left[\frac{q}{\alpha}(1+\alpha x)\right] \quad \text{и} \quad K_0\left[\frac{q}{\alpha}(1+\alpha x)\right]. \tag{9.21}$$

Для области $x > 0$, имеющей в начальный момент нулевую температуру, с плоскостью $x = 0$, поддерживаемой, начиная с момента $t = 0$, при температуре V, температура в плоскости x в момент t совпадает с температурой на поверхности $r = a(1+\alpha x)$ в момент времени $\alpha^2 a^2 t$.

V. *Если*

$$K = K_0 x^n, \qquad c = c_0 x^m, \tag{9.22}$$

то уравнение (9.2) принимает вид

$$\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} + \frac{n}{x}\frac{d\bar{v}}{dx} - \frac{q^2}{x^{n-m}}\bar{v} = 0, \tag{9.23}$$

где $q^2 = K_0/\rho c_0$. Воспользовавшись (9.3), (9.4), получим решения (9.23)

$$x^{-1/2(n-1)}K_\nu\left\{\frac{2q}{m-n+2}x^{1/2(m-n+2)}\right\} \quad \text{и} \quad x^{-1/2(n-1)}I_\nu\left\{\frac{2q}{m-n+2}x^{1/2(m-n+2)}\right\}, \tag{9.24}$$

где

$$\nu = \frac{1-n}{m-n+2}$$

и решение можно получить так же, как и ранее.

VI. *Цилиндрические и сферические области.*

В этих случаях вспомогательные уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dr}\left(rK\frac{d\bar{v}}{dr}\right) - \rho c r p\bar{v} = 0 \tag{9.25}$$

и

$$\frac{d}{dr}\left(r^2K\frac{d\bar{v}}{dr}\right) - \rho c r^2 p\bar{v} = 0, \tag{9.26}$$

и поэтому теория для случая степенного закона зависимости K и c входит в теорию, изложенную в примере V.

§ 10. Нагревание «цепочки» пластин, между которыми происходит теплообмен. Слоистые материалы

Данная задача, которую исследовал еще Фурье, представляет интерес в связи с изучением теплопроводности слоистых материалов [68]; кроме того, она имеет ряд других практических приложений.

Рассмотрим ряд бесконечных параллельных плоских листков, настолько тонких, что температуру по их сечению можно считать постоянной. Пусть M_r — масса единицы поверхности r-го листа, c_r — его удельная теплоемкость, v_r — его температура, а количество тепла, передаваемого единицей поверхности

в единицу времени к $(r+1)$-му листу, определяется выражением

$$H_r(v_r - v_{r+1}). \qquad (10.1)$$

Тогда температура v_r удовлетворяет уравнению

$$M_r c_r \frac{dv_r}{dt} = H_{r-1}(v_{r-1} - v_r) - H_r(v_r - v_{r+1}). \qquad (10.2)$$

Если начальная температура равна нулю, то вспомогательное уравнение, соответствующее уравнению (10.2), имеет вид

$$(M_r c_r p + H_{r-1} + H_r)\bar{v}_r - H_{r-1}\bar{v}_{r-1} - H_r\bar{v}_{r+1} = 0. \qquad (10.3)$$

Система уравнений (10.3) составляет совокупность дифференциальных уравнений, связывающих изображения температур последовательных листов. Мы рассмотрим только случай, когда все значения H_r, M_r и c_r одинаковы при всех значениях r; тогда система уравнений (10.3) принимает вид

$$\bar{v}_{r+1} - (2+2kp)\bar{v}_r + \bar{v}_{r-1} = 0, \qquad (10.4)$$

где

$$k = \frac{Mc}{2H}. \qquad (10.5)$$

Решение системы (10.4) имеет вид

$$\bar{v}_r = Ae^{r\theta} + Be^{-r\theta}, \qquad (10.6)$$

где A и B — постоянные, подлежащие определению из условий в начале и в конце «цепи», а θ дается уравнением

$$\operatorname{ch}\theta = 1 + kp. \qquad (10.7)$$

Если мы имеем n пластин, имеющих в начальный момент нулевую температуру, причем первая получает тепло от среды с температурой V, а последняя отдает тепло в среду нулевой температуры, то мы получим

$$\bar{v}_0 = \frac{V}{p}, \qquad \bar{v}_{n+1} = 0,$$

и решение (10.6) принимает вид

$$\bar{v}_r = \frac{V \operatorname{sh}(n-r+1)\theta}{p \operatorname{sh}(n+1)\theta}. \qquad (10.8)$$

Используя теорему обращения для $r = 1, \ldots, n$, окончательно получим

$$v_r = \frac{V(n-r+1)}{n+1} - \sum_{s=1}^{n} \frac{V \sin[rs\pi/(n+1)] \sin[s\pi/(n+1)]}{(n+1)[1-\cos\{s\pi/(n+1)\}]} \times \\ \times \exp\left[-\frac{t}{k}\left(1-\cos\frac{s\pi}{n+1}\right)\right]. \qquad (10.9)$$

Если число пластин бесконечно, $r = 1, 2, \ldots$, начальная температура равна нулю, причем первая пластина получает тепло от среды температуры V, то аналогичным путем находим

$$\bar{v}_r = \frac{V}{p}e^{-r\theta} = \frac{Vk^r}{p}\left\{\left(p+\frac{1}{k}\right) - \left[\left(p+\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{1}{k^2}\right]^{1/2}\right\}^r. \qquad (10.10)$$

Отсюда, используя формулу (27) приложения 5, получим

$$v_r = Vr\int_0^t e^{-\tau/k} I_r\left(\frac{\tau}{k}\right)\frac{d\tau}{\tau}. \qquad (10.11)$$

§ 11. Прямое применение метода преобразования Лапласа к двумерным и трехмерным задачам

Выше отмечалось (см. § 1 гл. VI), что из всех существующих методов метод преобразования Лапласа обеспечивает наиболее прямое решение задачи с нулевой начальной температурой*) и заданной температурой поверхности. В данном параграфе таким путем решается несколько важных задач этого типа.

I. *Прямоугольный параллелепипед* $0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c$. *Нулевая начальная температура. Температура поверхности* $x = 0$ *равна постоянной величине* v_1, *температура других граничных поверхностей равна нулю.*

В данном случае вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - \frac{p}{\varkappa}\bar{v} = 0. \tag{11.1}$$

Его следует решать при условиях

$$\bar{v} = \frac{v_1}{p}, \quad x = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c, \tag{11.2}$$

и при $\bar{v}$, равном нулю на других граничных поверхностях.

Чтобы при этих условиях получить решение уравнения (11.1), мы поступаем точно так же, как и в § 2 гл. VI. Единственное отступление заключается в том, что к правой части выражения (2.3) этой главы должен быть добавлен член $(p/\varkappa)$. При этом видоизменении (и $v_2 = 0$) мы можем оценить решение (2.9) гл. VI и, следовательно, после некоторых изменений в обозначениях получим

$$\bar{v} = \frac{16 v_1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi y/b] \sin[(2n+1)\pi z/c] \operatorname{sh} q'(a-x)}{(2m+1)(2n+1) p \operatorname{sh} q'a}, \tag{11.3}$$

где

$$q'^2 = \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{b^2} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{c^2} + \frac{p}{\varkappa}. \tag{11.4}$$

Тогда, используя теорему обращения, найдем

$$v = \frac{16 v_1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi y/b] \sin[(2n+1)\pi z/c]}{(2m+1)(2n+1)} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{\lambda t} \operatorname{sh} \mu'(a-x)\, d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \mu' a}, \tag{11.5}$$

где

$$\mu'^2 = \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{b^2} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{c^2} + \frac{\lambda}{\varkappa}.$$

Подынтегральная функция в (11.5) имеет простой полюс при $\lambda = 0$ и простые полюсы при значениях λ, соответствующих

$$\mu' = \frac{l\pi}{a}, \quad l = 1, 2, \ldots$$

*) Если начальная температура не равна нулю, то этот метод, конечно, тоже можно применить, но он тогда не имеет преимуществ перед методом, в котором используются функции Грина.

Находя соответствующие вычеты, окончательно получим

$$v=\frac{16v_1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2m+1)\pi y/b]\sin[(2n+1)\pi z/c]\,\mathrm{sh}\,(a-x)\sqrt{\alpha_{m,n,0}}}{(2m+1)(2n+1)\,\mathrm{sh}\,a\sqrt{\alpha_{m,n,0}}}-$$

$$-\frac{32v_1}{\pi a^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l\sin[(2m+1)\pi y/b]\sin[(2n+1)\pi z/c]\sin[l\pi x/a]}{(2m+1)(2n+1)\alpha_{m,n,l}}e^{-\varkappa t\alpha_{m,n,l}}, \qquad (11.6)$$

где

$$\alpha_{m,n,l}=\frac{l^2\pi^2}{a^2}+\frac{(2m+1)^2\pi^2}{b^2}+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{c^2}. \qquad (11.7)$$

Первый член в решении (11.6), который получается из (11.5) при полюсе $\lambda=0$, представляет собой уже известное нам решение для стационарного состояния (см. (2.9) гл. VI).

II. *Та же задача, что и в* I, *но поверхность* $x=0$ *поддерживается при температуре* $v_1\sin(\omega t+\varepsilon)$.

Единственное изменение здесь заключается в том, что подынтегральную функцию в (11.5) следует умножить на

$$\frac{\lambda(\omega\cos\varepsilon+\lambda\sin\varepsilon)}{\lambda^2+\omega^2}.$$

В таком случае она имеет полюсы при $\lambda=\pm i\omega$, что дает решение для установившегося периодического режима в виде

$$\frac{16v_1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2m+1)\pi y/b]\sin[(2n+1)\pi z/c]}{(2m+1)(2n+1)}M_{m,n}\sin(\omega t+\varepsilon+\varphi_{m,n}), \qquad (11.8)$$

где

$$M_{m,n}e^{i\varphi_{m,n}}=\frac{\mathrm{sh}\,(a-x)\left[(2m+1)^2\pi^2/b^2+(2n+1)^2\pi^2/c^2+i\omega/\varkappa\right]^{1/2}}{\mathrm{sh}\,a\left[(2m+1)^2\pi^2/b^2+(2n+1)^2\pi^2/c^2+i\omega/\varkappa\right]^{1/2}}. \qquad (11.9)$$

Помимо этого, имеются полюсы при $-\varkappa\alpha_{m,n,l}$, которые дают переходную часть решения

$$\frac{32v_1\varkappa}{\pi a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{l\sin[(2m+1)\pi y/b]\sin[(2n+1)\pi z/c]\sin[l\pi x/a](\omega\cos\varepsilon-\varkappa\alpha_{m,n,l}\sin\varepsilon)}{\left(\omega^2+\varkappa^2\alpha^2_{m,n,l}\right)(2m+1)(2n+1)}e^{-\varkappa t\alpha_{m,n,l}}.$$

Если все поверхности поддерживаются при температуре $\sin(\omega t+\varepsilon)$, то решение получается наложением шести выражений полученного выше типа. Очевидно, что эти решения настолько сложны, что практически неприменимы для расчета.

III. *Прямоугольный параллелепипед* $0<x<a$, $-b<y<b$, $-c<z<c$. *Нулевая начальная температура. Температура поверхности* $x=0$ *равна постоянной величине* v_1, *температура поверхности* $x=a$ *равна постоянной величине* v_2. *На других поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

Здесь, используя решение (2.23) гл. VI, находим, как и в задаче I,

$$\bar v=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{4h^2[v_1\,\mathrm{sh}\,q'(a-x)+v_2\,\mathrm{sh}\,q'x]\cos\alpha_r y\cos\beta_s z}{p\left[\left(\alpha_r^2+h^2\right)b+h\right]\left[\left(\beta_s^2+h^2\right)c+h\right]\cos\alpha_r b\cos\beta_s c\,\mathrm{sh}\,q'a}, \qquad (11.10)$$

где α_r и β_r — положительные корни уравнений (2.16), (2.17) гл. VI и

$$q'^2=\alpha_r^2+\beta_s^2+(p/\varkappa).$$

Решение v представляет собой сумму установившейся части решения (см. (2.23) гл. VI) и переходной его части

$$\frac{8\pi h^2}{a^2}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left[(-1)^n v_2 - v_1\right]\cos\alpha_r y\cos\beta_s z\sin\left[\frac{n\pi x}{a}\right]}{\gamma_{r,s,n}\left[\left(\alpha_r^2+h^2\right)b+h\right]\left[\left(\beta_s^2+h^2\right)c+h\right]\cos\alpha_r b\cos\beta_s c}\,e^{-\varkappa t\gamma_{r,s,n}}, \tag{11.11}$$

где

$$\gamma_{r,s,n}=\alpha_r^2+\beta_s^2+\frac{n^2\pi^2}{a^2}. \tag{11.12}$$

IV. *Ограниченный цилиндр* $0\leqslant r<a$, $0<z<l$. *Нулевая начальная температура. Поверхность* $z=0$ *поддерживается при постоянной температуре* V, *а* $z=l$ — *при нулевой температуре. На поверхности* $r=a$ *происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

Здесь, используя, как и выше, задачу I § 3 гл. VIII, получим

$$v=V\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2hJ_0(r\alpha_n)\operatorname{sh}(l-z)\alpha_n}{a\left(h^2+\alpha_n^2\right)J_0(a\alpha_n)\operatorname{sh}l\alpha_n}-$$
$$-\frac{4h\pi V}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mJ_0(r\alpha_n)\sin(m\pi z/l)}{\left(\alpha_n^2l^2+m^2\pi^2\right)\left(h^2+\alpha_n^2\right)J_0(a\alpha_n)}\exp\left[-\varkappa t\left(\alpha_n^2+\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)\right], \tag{11.13}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$\alpha J_1(a\alpha)-hJ_0(a\alpha)=0.$$

V. *Ограниченный цилиндр* $0\leqslant r<a$, $0<z<l$. *Нулевая начальная температура. При* $t>0$ *поверхность* $z=0$ *поддерживается при постоянной температуре* V. *На остальных поверхностях происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

В данном случае

$$v=\frac{2hV}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_n)\left[\alpha_n\operatorname{ch}\alpha_n(l-z)+h\operatorname{sh}\alpha_n(l-z)\right]}{\left(h^2+\alpha_n^2\right)J_0(a\alpha_n)\left[\alpha_n\operatorname{ch}l\alpha_n+h\operatorname{sh}l\alpha_n\right]}-$$
$$-\frac{4hV}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_m\left(h^2+\beta_m^2\right)J_0(r\alpha_n)\sin z\beta_m}{\left(h^2+\alpha_n^2\right)\left[l\left(h^2+\beta_m^2\right)+h\right]\left(\alpha_n^2+\beta_m^2\right)J_0(a\alpha_n)}\,e^{-\varkappa\left(\alpha_n^2+\beta_m^2\right)t}, \tag{11.14}$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$\alpha J_1(a\alpha)=hJ_0(a\alpha), \tag{11.15}$$

а β_m — положительные корни уравнения

$$\beta\operatorname{ctg}\beta l+h=0. \tag{11.16}$$

VI. *Полуограниченный цилиндр* $z>0$, $0\leqslant r<a$. *Нулевая начальная температура. При* $t>0$ *поверхность* $z=0$ *поддерживается при постоянной температуре* V. *На поверхности* $r=a$ *происходит теплообмен со средой нулевой температуры.*

В данном случае

$$v=\frac{2hV}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_n)}{\left(h^2+\alpha_n^2\right)J_0(a\alpha_n)}\,e^{-\alpha_n z}+$$
$$+\frac{hV}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_n)}{\left(h^2+\alpha_n^2\right)J_0(a\alpha_n)}\left\{e^{z\alpha_n}\Phi^*\left[\alpha_n\sqrt{\varkappa t}+\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}}\right]-e^{-z\alpha_n}\Phi^*\left[\alpha_n\sqrt{\varkappa t}-\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}}\right]\right\}. \tag{11.17}$$

Здесь для нахождения v из $\bar{v}$ мы пользовались обычным решением (3.33) гл. VIII, формулой (19) приложения 5 и соотношением (2.6) гл. XII. α_n — положительные корни уравнения (11.15).

VII. *Полуограниченный цилиндр $z > 0$, $0 \leqslant r < a$. Нулевая начальная температура. При $t > 0$ поверхность $r = a$ поддерживается при постоянной температуре V, а поверхность $z = 0$ — при нулевой температуре.*

Как и выше, мы можем использовать пример XIII § 3 гл. VIII, но излагаемый ниже метод более прост. Легко проверить, что функция

$$\bar{v} = V\frac{I_0(qr)}{pI_0(qa)} - \frac{2V}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_m J_0(r\alpha_m)}{p\left(q^2+\alpha_m^2\right)J_1(a\alpha_m)}\exp\left[-z\left(\alpha_m^2+q^2\right)^{1/2}\right], \tag{11.18}$$

где $q = \sqrt{(p/\varkappa)}$, а α_m — корни уравнения $J_0(a\alpha) = 0$, удовлетворяет вспомогательному уравнению и граничным условиям.

Если использовать формулу (19) приложения 5, то отсюда следует, что

$$v = V - \frac{V}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_m)}{\alpha_m J_1(a\alpha_m)}\left\{2e^{-\varkappa\alpha_m^2 t}\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + e^{z\alpha_m}\Phi^*\left[\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha_m\sqrt{\varkappa t}\right] + e^{-z\alpha_m}\Phi^*\left[\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}} - \alpha_m\sqrt{\varkappa t}\right]\right\}. \tag{11.19}$$

Первый член решения (11.18) представляет собой значение $\bar{v}$ для неограниченного цилиндра с температурой поверхности V, и следовательно, ряд в этом соотношении можно рассматривать как поправку на влияние торца *). Такая схема решения полезна, когда поверхность, уходящая в бесконечность, поддерживается при постоянной температуре, и поэтому интегральная теорема Фурье становится неприменимой, хотя получаемые с ее помощью решения на самом деле обычно правильны.

VIII. *Клин* **) *$r > 0$, $0 < \theta < \theta_0$. Нулевая начальная температура. При $t > 0$ поверхность $\theta = 0$ поддерживается при температуре V, а поверхность $\theta = \theta_0$ — при нулевой температуре.*

В этом случае вспомогательное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{v}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\theta^2} - q^2\bar{v} = 0, \qquad 0 < \theta < \theta_0, \qquad r > 0. \tag{11.20}$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\bar{v} = \frac{V\theta}{p\theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\sin s\theta\int_0^{\infty} f_n(u)\,J_s(ur)\,dr, \tag{11.21}$$

где $s = n\pi/\theta_0$. Оно состоит из члена, соответствующего решению для стационгрного состояния, и ряда членов, обращающихся в нуль на обеих граничных полуплоскостях $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$. Неизвестная функция $f_n(u)$ должна быть выбрана таким образом, чтобы решение (11.21) удовлетворяло уравнению (11.20). Подставляя (11.21) в (11.20) и используя соотношение, приведенное в книге Ватсона [66],

$$\int_0^{\infty}\frac{J_s(ur)\,du}{u} = \frac{1}{s},$$

найдем

$$f_n(u) = \frac{2(-1)^n V}{\varkappa u\theta_0(q^2+u^2)}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\bar{v} = \frac{V\theta}{p\theta_0} + V\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\varkappa\theta_0}\sin s\theta\int_0^{\infty}\frac{J_s(ur)\,du}{u(q^2+u^2)}, \tag{11.22}$$

---

*) Решения для области $z > 0$, $r > a$ и $r > a$, $0 < z < l$, а также для полуограниченного цилиндра с постоянной температурой поверхности приведены в [69].

**) Некоторые численные решения этой задачи, а также решения для цилиндра, сечение которого представляет собой сектор круга, даны в [70, 71]. Аналогичная задача для полуограниченного цилиндра рассмотрена в [72].

и

$$\frac{v}{V} = \frac{\theta}{\theta_0} + \frac{2}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin s\theta \int_0^{\infty} e^{-\varkappa u^2 t} \frac{J_s(ur)\, du}{u}. \tag{11.23}$$

Интегралы в решении (11.23) можно выразить в виде вырожденных гипергеометрических функций [66].

Если при $t > 0$ обе граничные полуплоскости поддерживают при температуре, равной единице, а начальная температура равна нулю, то мы получим

$$v = 1 - \frac{4}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi\theta}{\theta_0} \int_0^{\infty} e^{-\beta u^2} \frac{J_s(u)\, du}{u}, \tag{11.24}$$

где

$$s = (2n+1)\pi/\theta_0, \quad \text{а} \quad \beta = \frac{\varkappa t}{r^2}.$$

IX. *Конус* $0 < \theta < \theta_0$. *Нулевая начальная температура. При* $t > 0$ *поверхность имеет температуру, равную единице.*

Применяя метод, использованный в предыдущем примере, находим

$$v = 1 + \sqrt{2} \sum \frac{(2n+1)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1)\right] P_n(\mu)}{n\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)[dP_n(\mu)/dn]_{\mu=\mu_0}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\varkappa u^2 t}{r^2}\right] \frac{J_{n+1/2}(u)\, du}{u^{3/2}}, \tag{11.25}$$

где n — положительные корни уравнения $P_n(\mu_0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benfield, Mon. Not. R. Astr. Soc. Geophys. Suppl. **6**, 139—147 (1951).
2. Benfield, J. Glaciol. **2**, 250—254 (1952).
3. Benfield, J. Appl. Phys. **20**, 66—70 (1949).
4. Benfield, Quart. Appl. Math. **7**, 436—439 (1949); **6**, 439—443 (1948).
5. Wiles, S. Afr. J. Sci. **39**, 95—97 (1943).
6. Hulme, Proc. Phys. Soc. **B68**, 393—400 (1955).
7. Sommers, Proc. Phys. Soc. **25**, 74—76 (1912).
8. Smith, Tiller, Rutter, Canad. J. Phys. **33**, 723—745 (1955).
9. Owen, Proc. Lond. Math. Soc. **23**, 238 (1925).
10. Schack, Goldschmidt, Partridge, Industrial Heat Transfer, Wiley, 1933.
11. Schmeidler, Z. angew. Math. Mech. **8**, 385 (1928).
12. Ackermann, Z. angew. Math. Mech. **11**, 192 (1931).
13. Anzelius, Z. angew. Math. Mech. **6**, 291—294 (1926).
14. Schumann, J. Franklin Inst. **208**, 405—416 (1929).
15. Nusselt, Z. Ver. dtsch. Ing. **71**, 85 (1927).
16. Kronig, van Gijn, Physica **12**, 118—128 (1946).
17. Thiele, Ind. Eng. Chem. **38**, 646—650 (1946).
18. Nusselt, Z. Ver. dtsch. Ing. **72**, 1052 (1928).
19. Hausen, Z. angew. Math. Mech. **11**, 105 (1931).
20. Hausen, Z. angew. Math. Mech. **9**, 173 (1929).
21. Schultz, Appl. Sci. Res. **A3**, 165—173 (1953).
22. Allen, Quart. J. Mech. Appl. Math. **5**, 455—461 (1952).
23. Goldstein, Proc. Roy. Soc. **A219**, 151—185 (1953).
24. Thomas, J. Am. Chem. Soc. **66**, 1664—1666 (1944).
25. Monro, Amundson, Ind. Eng. Chem. **42**, 1481 (1950).
26. Brinkley, J. Appl. Phys. **18**, 582—585 (1947).
27. Grunberg, J. Phys. USSR **4**, 463 (1941).
28. Grunberg, Sontz, J. Phys. USSR **4**, 97 (1941).
29. Waidelich, J. Appl. Phys. **13**, 706—712 (1942).
30. Waidelich, Proc. Inst. Radio Engrs **34**, 78P (1946).
31. Carslaw, Jaeger, Operational Method in Applied Mathematics, Oxford, ed. 2, 1948. (Г. Карслоу, Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, М., ИЛ, 1948.)

32. Oosterkamp, Philips Res. Rep. **3**, 161 (1948).
33. Jaeger, Quart. Appl. Math. **11**, 132—137 (1953).
34. Barrer, Trans. Faraday Soc. **35**, 628 (1939).
35. Barrer, Phil. Mag. **35**, 802 (1944).
36. Barrer, Trans. Faraday Soc. **36**, 1235 (1940).
37. Jaeger, Trans. Faraday Soc. **42**, 615 (1946).
38. Jaeger, Quart. Appl. Math. **8**, 187—198 (1950).
39. Levy, Trans. ASME **78**, 1627—1635 (1956).
40. Jakob, Trans. ASME **65**, 593 (1943).
41. Jakob, Trans. ASME **70**, 25—30 (1948).
42. Copple, Hartree, Porter, Tyson, J. Inst. Elect. Engrs **85**, 56—66 (1939).
43. Crank, The Mathematics of Diffusion, Oxford, 1956.
44. Danckwerts, Appl. Sci. Res. **A3**, 385 (1953).
45. Griffiths, Thermostats, Griffin, ed. 2, 1943.
46. Rhodes, Industrial Instruments for Measurements and Control, McGraw-Hill, 1941.
47. Thaler, Brown, Servomechanism Analysis, McGraw-Hill, 1953.
48. Hull, Wolf, Canad. J. Phys. **32**, 72—80 (1954).
49. Callender, Hartree, Porter, Trans. Roy. Soc. **A235**, 415 (1936).
50. Hartree, Porter, Callender, Stevenson, Proc. Roy. Soc. **A161**, 460 (1937).
51. Turner, Proc. Camb. Phil. Soc. **32**, 663 (1936).
52. Hopper, Proc. Phys. Soc. **54**, 55 (1942).
53. Kepinski, Math. Ann. **61**, 397 (1905).
54. Gevrey, J. Math. pures appl. **10**, 105 (1914).
55. Sutton, Proc. Roy. Soc. **A146**, 701 (1934).
56. Brunt, Physical and Dynamical Meteorology, Cambridge, 1939.
57. Sutton, Atmospheric Turbulence, Methuen, 1949.
58. Huber, Z. angew. Math. Mech. **7**, 469 (1927).
59. Sutton, Proc. Roy. Soc. **A182**, 48 (1943).
60. Jaeger, Quart. Appl. Math. **3**, 210 (1945).
61. Calder, Quart, J. Mech. Appl. Math. **2**, 153—176 (1949).
62. Knighting, Quart. J. Mech. Appl. Meth. **5**, 423—431 (1952).
63. Davies, Quart. J. Mech. Appl. Math. **7**, 462—471 (1954).
64. Davies, Bourne, Quart. J. Mech. Appl. Math. **9**, 457—468 (1956).
65. Feller, Ann. Math. Princeton **54**, 173—182 (1951).
66. Watson, A treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, ed. 2, 1944. (Г. Ватсон. Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.)
67. Goldstein, Proc. Lond. Math. Soc. **34**, 104 (1932).
68. Störmer, Wiss. Verott. Siemens-Werken **17**, 90 (1938).
69. Jaeger, Bull. Am. Math. Soc. **47**, 734 (1941).
70. Bock, J. Phys. Rad. **10**, 241 (1939).
71. Jaeger, Phil. Mag. **33**, 527 (1942).
72. Craggs, Phil. Mag. **36**, 220 (1945).

ГЛАВА XVI

УСТАНОВИВШАЯСЯ ТЕМПЕРАТУРА

§ 1. Введение

Задачи с установившейся температурой имеют большое практическое значение. Так, установившееся состояние используется в большинстве методов измерения коэффициента теплопроводности. В промышленности стационарные тепловые потоки представляют наибольший интерес. К сожалению, области, в которых нас интересует тепловой поток, редко имеют простые, рассмотренные выше формы. В настоящей главе рассматриваются другие методы, позволяющие получить некоторые сведения о температурах и тепловых потоках в более сложных системах.

Как указывалось в § 6 гл. I, в области, в которой тепло не выделяется, установившаяся температура v удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 v = 0. \tag{1.1}$$

Если на единицу объема исследуемой области в единицу времени выделяется количество тепла $A(x, y, z)$, то установившаяся температура v должна удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 v = -\frac{1}{K} A(x, y, z) \tag{1.2}$$

при условии, конечно, что среда однородна и изотропна.

Таким образом, решения задач со стационарным тепловым потоком можно получить из известных решений задач теории потенциала, электростатики, гидродинамики, электродинамики и других разделов науки, в которых встречаются эти уравнения.

§ 2. Источники и стоки при установившейся температуре

Предположим, что тепловой поток в неограниченном твердом теле вызван постоянным подводом тепла в одних точках и его удалением в других. Эти точки можно назвать *источниками* и *стоками тепла*.

Опишем небольшую шаровую поверхность радиуса r вокруг точки, в которой выделяется тепло; тогда при $r \to 0$ количество тепла, проходящее в единицу времени через шаровую поверхность, должно равняться мощности источника. Следовательно, решение уравнения

$$\nabla^2 v = 0$$

должно иметь вид

$$\frac{Q}{4\pi r K} + \varphi, \tag{2.1}$$

где φ — решение уравнения (1.1) данной главы, ограниченное в точке, в которой расположен источник, а Q — мощность источника.

Аналогичным образом для линейного источника мощностью Q часть выражения для v, стремящаяся к бесконечности, когда расстояние r' до линейного источника приближается к нулю, имеет вид

$$-\frac{Q}{2\pi K}\ln r'. \tag{2.2}$$

Если тепло непрерывно выделяется в ограниченной области неограниченного твердого тела, температуру в любой его точке находят интегрированием функций (2.1) или (2.2).

Если тепло выделяется в ограниченной области, поверхность которой поддерживается при нулевой температуре (или термически изолирована), то можно применить метод изображений или, в более общем случае, воспользоваться функцией Грина для уравнения Лапласа.

Для точечного источника, находящегося в точке (x', y', z') заданной области с заданными граничными условиями, *эта функция Грина* определяется как решение уравнения Лапласа $u(x, y, z; x', y', z')$, которое удовлетворяет граничным условиям и ограничено везде внутри области, за исключением точки (x', y', z'), где оно стремится к бесконечности таким образом, что

$$\lim_{r\to 0}\left\{u-\frac{1}{r}\right\}$$

ограничен. Здесь $r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$.

Итак, если u — определенная выше функция Грина, то температура, вызванная действием в точке (x', y', z') источника мощностью Q, будет равна

$$\frac{Q}{4\pi K}u. \tag{2.3}$$

Эти функции Грина хорошо известны*) и их теория изложена в работах по теории потенциала. Здесь мы только отметим, что для областей, рассмотренных в гл. XIV, их можно получить из результатов этой главы. Обращаясь, например, к § 10 гл. XIV, найдем, что если положить $q=0$, то $\bar{v}$, определенное в этом параграфе, удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям, а вблизи точки (x', y', z') ведет себя как

$$\frac{1}{4\pi\varkappa\sqrt{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}}}.$$

Тем самым определенная выше функция Грина u равна

$$4\pi k\,[\bar{v}]_{q=0}, \tag{2.4}$$

где $[\bar{v}]_{q=0}$ — значение изображения решения, приведенного в гл. XIV, при $q=0$ для единичного мгновенного точечного источника в той же области и при тех же граничных условиях.

Поэтому, например, если плоскости $z=0$ и $z=l$ поддерживаются при нулевой температуре, а в точке с цилиндрическими координатами (r', θ', z') выделяется в секунду количество тепла, равное Q, то температура в точке

*) Полное рассмотрение для поверхностей в цилиндрической системе координат, включающее различные формы решений, приведено в гл. IX книги Грэя и Мэтьюза [1].

$(r,\ \theta,\ z)$, согласно (10.11) гл. XIV, будет равна

$$\frac{Q}{\pi l K}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi z}{l}\sin\frac{m\pi z'}{l}K_0\left(\frac{m\pi R}{l}\right), \tag{2.5}$$

где

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta-\theta'). \tag{2.6}$$

Аналогичным образом, если цилиндрическая поверхность $r = a$ поддерживается при нулевой температуре, а в точке $(r',\ \theta',\ 0)$ внутри цилиндра в секунду выделяется Q единиц тепла, то, используя (13.5) гл. XIV, получим, что температура в точке $(r,\ \theta,\ z)$ запишется в виде

$$\frac{Q}{2\pi a^2 K}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos n(\theta-\theta')\sum_{\alpha}\frac{e^{-\alpha|z|}J_n(\alpha r)J_n(\alpha r')}{\alpha\left[J_n'(\alpha a)\right]^2}, \tag{2.7}$$

где суммирование по α проводится по положительным корням уравнения $J_n(\alpha a) = 0$.

Согласно (15.1) гл. XIV соответствующее решение для источника в точке $(r',\ \theta',\ z')$ ограниченного цилиндра $0 < z < l$, $0 < r < a$ с нулевой температурой поверхности равно

$$\frac{Q}{\pi l K}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi z}{l}\sin\frac{m\pi z'}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\frac{I_n(m\pi r/l)}{I_n(m\pi a/l)}F_n\left(\frac{m\pi a}{l};\ \frac{m\pi r'}{l}\right)\cos n(\theta-\theta'),$$

$$0 < r < r', \tag{2.8}$$

где

$$F_n(x,\ y) = I_n(x)K_n(y) - K_n(x)I_n(y), \tag{2.9}$$

и

$$\varepsilon_n = 1 \quad \text{при} \quad n = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_n = 2 \quad \text{при} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Если $r' < r < a$, то в соотношении (2.8) мы меняем местами r и r'.

В качестве примера использования этих решений определим температуру в цилиндре $0 \leqslant r < a$, $0 < z < l$, поверхность которого поддерживается при нулевой температуре и в котором вдоль линии, параллельной оси цилиндра и проходящей между точками $(r',\ \theta',\ b)$ и $(r',\ \theta',\ l-b)$, расположен линейный источник мощностью Q. Эта температура равна

$$\int_b^{l-b} u\,dz',$$

где u определено выражением (2.8). Следовательно, при $0 < r < r'$ она равна

$$\frac{2Q}{K\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi b}{l}\sin\frac{(2m-1)\pi z}{l}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n[(2m-1)\pi r/l]}{I_n[(2m-1)\pi a/l]}F_n\left\{\frac{(2m-1)\pi a}{l};\ \frac{(2m-1)\pi r'}{l}\right\}\varepsilon_n\cos n(\theta-\theta').$$

Итак, мы получили температуру в цилиндре, нагреваемом проволокой, параллельной его оси [2].

§ 3. Установившийся поток к почти плоской поверхности. Топографические поправки для геотермического потока

Как отмечалось в § 13 гл. II., при движении в глубь Земли имеет место приблизительно линейное увеличение температуры с расстоянием от земной поверхности, нарушаемое локальными неровностями этой поверхности. Определение влияния таких неровностей и внесение поправки на них в наблюдаемый градиент температуры представляет большой интерес для геофизиков *).

Для решения этой задачи пользуются двумя методами. В первом из них [4, 5] рассматривается поверхность Земли на уровне моря, причем ее температура в каждой точке принимается равной $h(g-g')$, где h — высота над уровнем моря в данной точке, g — геотермический градиент, а g' — адиабатический вертикальный градиент в атмосфере, так что средняя температура поверхности на высоте h над уровнем моря меньше ее значения на уровне моря примерно на hg'.

Такая задача становится задачей об *установившейся температуре в полуограниченном теле $z>0$ с температурой поверхности, равной $F(x, y)$*; решается она так же, как и ранее.

Если в соотношении (9.3) гл. XIV $t\to\infty$, то для температуры v в точке $(0, 0, z)$ получим **)

$$v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{zF(x', y')\,dx'\,dy'}{R^3}, \tag{3.1}$$

где

$$R^2=z^2+r'^2 \text{ и } r'^2=x'^2+y'^2. \tag{3.2}$$

В данном случае нужно узнать величину $\partial v/\partial z$; она равна

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(R^2-3z^2)}{R^5}F(x', y')\,dx'\,dy'. \tag{3.3}$$

Если записать $F(x', y')$ в полярных координатах (r', θ') и среднее значение $F(x', y')$ по окружности радиуса r' с центром в начале координат в виде

$$V=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}F(r'\cos\theta', r'\sin\theta')\,d\theta', \tag{3.4}$$

то уравнение (3.3) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\int_0^{\infty}R^{-5}(R^2-3z^2)\,Vr'\,dr'=\int_z^{\infty}R^{-4}(R^2-3z^2)\,V\,dR=$$

$$=\left[V\left(\frac{z^2}{R^3}-\frac{1}{R}\right)\right]_z^{\infty}+\int_z^{\infty}\left(\frac{1}{R}-\frac{z^2}{R^3}\right)\frac{dV}{dR}\,dR=\int_z^{\infty}\frac{r'^2}{R^3}\frac{dV}{dR}\,dR=\int_0^{\infty}\frac{r'^2}{R^3}\frac{dV}{dr'}\,dr'. \tag{3.5}$$

Когда $z=0$ и, следовательно, $R=r'$, мы получаем

$$\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z=0}=\int_0^{\infty}\frac{dV}{dr'}\frac{dr'}{r'}, \tag{3.6}$$

которое легко найти для любого грунта. Чтобы получить правильное значение геотермического градиента, эту величину следует вычесть из измеренного значения g.

Были проведены точные расчеты изотерм и градиента температур для различных почти плоских поверхностей, форма которых приближается к форме обычного рельефа

*) Полное изложение этого вопроса, включая исторический обзор, можно найти в [3].

**) Эта задача была обобщена на случай линейного изменения температуры поверхности, вызываемого эрозией [3].

поверхности *). Если рассматривать только двумерный случай и принять, что ось z направлена вертикально вниз, то следует искать такое решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0, \tag{3.7}$$

чтобы при $z\to\infty$ $v\to gz$ и чтобы

$$v=V_0+g'z \quad \text{на поверхности} \quad z=f(x). \tag{3.8}$$

Здесь, как и ранее, g — геотермический градиент, а g' — адиабатический вертикальный градиент. Наиболее интересен расчет Лиса [9] **), который отметил, что функция

$$v=V_0+gz+A\frac{d}{dz}\ln[x^2+(z+a)^2]^{1/2}=V_0+gz+\frac{A(z+a)}{x^2+(z+a)^2} \tag{3.9}$$

удовлетворяет уравнению (3.7), ведет себе требуемым образом при $z\to\infty$ и удовлетворяет условию (3.8), если поверхностью исследуемого тела служит

$$(g'-g)z=\frac{A(z+a)}{x^2+(z+a)^2}. \tag{3.10}$$

Функция (3.10) имеет минимум при $x=0$, а при $x\to\infty$ монотонно приближается к нулю. Она дает достаточно правильное представление одиночной горной цепи. Если H — высота горы, а $2b$ — ее ширина на половине высоты, так что поверхность, описываемая (3.10), проходит через точки $(0, -H)$ и $\left(b, -\frac{1}{2}H\right)$, то параметры A и a определяются соотношениями

$$a=H+\left(\frac{1}{4}H^2+b^2\right)^{1/2}, \qquad A=(g-g')H\left(\frac{1}{4}H^2+b^2\right)^{1/2}. \tag{3.11}$$

Тогда изотермы определяются (3.9) при различных значениях v и в этом случае легко найти градиент температуры.

§ 4. Установившийся тепловой поток в составном теле

Задача о нарушении установившегося линейного теплового потока в однородной среде погруженным в нее объектом с другой теплопроводностью очень важна в технике. Математически она точно соответствует задаче о наведенном магнетизме тела такой же формы, помещенного в однородное внешнее поле, и ее решения можно найти в учебниках по электричеству и магнетизму. Однако основные решения вследствие их важности кратко излагаются ниже. Решения для шаров и эллипсоидов можно использовать для оценки изменений геотермического градиента, вызываемых погружением массы с теплопроводностью, отличной от теплопроводности всей среды, и они представляют очень большой интерес для термических методов разведки. Кроме того, точное решение для одиночного шара или эллипсоида используется статистически при расчетах теплопроводности гранулированных материалов. Последние рассматриваются как ряд частиц одного материала, вкрапленных в основную породу из другого материала. Ниже, в примере IV, приведен простой пример использования этого метода.

Изучение поведения теплового потока и температуры вблизи поверхности соприкосновения двух материалов представляется важным в связи с изуче-

---

*) В ряде работ [6—8] рассматривается система сменяющих друг друга холмов и долин.

**) Последний член формулы (3.9) дает температуру, облусловленную действием линейного дублета. Можно также использовать ряд типа $\sum A_n(d/dz)^n\ln[x^2+(z+a_n)^2]$; помимо этого, для описания гористой области с параллельными хребтами следует прибавить дополнительный ряд, в котором x заменяется на $x+c$.

нием геотермического потока тепла. Идеализированные задачи для тел, ограниченных плоскостями, пересекающимися под прямым углом, можно рассматривать методами, изложенными в гл. V (см. ниже пример V). Кроме того, использованы простые решения уравнения Лапласа в виде многочленов (см. пример VI).

I. *Область внутри шара* $0 \leqslant r < a$ *имеет коэффициент теплопроводности* K', *а область вне его — коэффициент* K. *На больших расстояниях температура стремится к величине* Vz.

Пусть температуры v' и v, внутри и вне шара $r = a$, описываются функциями

$$v = Vr \cos\theta + \frac{B}{r^2}\cos\theta, \tag{4.1}$$

$$v' = Ar\cos\theta, \tag{4.2}$$

где A и B — неизвестные коэффициенты, а r, θ — сферические координаты. Функции (4.1) и (4.2) удовлетворяют уравнению Лапласа, v' при $r \to 0$ ограничено, а $v \to Vz$ при $r \to \infty$, как и требуется. Граничные условия при $r \to a$, т. е.

$$v = v' \qquad K'\frac{\partial v'}{\partial r} = K\frac{\partial v}{\partial r}, \qquad r = a, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

дают

$$Va^3 + B = Aa^3,$$
$$K(Va^3 - 2B) = K'Aa^3.$$

Разрешая эти уравнения относительно A и B и подставляя их значения в (4.1) и (4.2), окончательно получим

$$v = Vr\cos\theta + \frac{Va^3(K - K')\cos\theta}{r^2(2K + K')}, \tag{4.3}$$

$$v' = \frac{3KVr\cos\theta}{2K + K'} = \frac{3KVz}{2K + K'}. \tag{4.4}$$

Градиент температуры в шаре равен $3KV/(2K + K')$.

II. *Цилиндр* $0 \leqslant r < a$ *с коэффициентом теплопроводности* K'; *ось этого цилиндра перпендикулярна оси* z. *Область вне цилиндра имеет коэффициент теплопроводности* K, *а ее температура на больших расстояниях равна* Vz.

Температуры v' и v внутри и вне цилиндра равны следующим величинам:

$$v' = \frac{2VKz}{K + K'}, \tag{4.5}$$

$$v = Vz - \frac{(K' - K)Va^2z}{(K' + K)r^2}. \tag{4.6}$$

III. *Эллипсоид с коэффициентом теплопроводности* K' *находится в среде с коэффициентом теплопроводности* K.

Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.7}$$

и предположим, что температура среды на больших расстояниях от него стремится к величине

$$V_1x + V_2y + V_3z. \tag{4.8}$$

Пусть для любой точки (x, y, z) λ служит положительным корнем уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1. \tag{4.9}$$

Тогда как xA_λ, так и yB_λ и zC_λ, где

$$A_\lambda = \frac{1}{2}abc\int_\lambda^\infty \frac{du}{(a^2+u)\Delta(u)}, \quad B_\lambda = \frac{1}{2}abc\int_\lambda^\infty \frac{du}{(b^2+u)\Delta(u)},$$

$$C_\lambda = \frac{1}{2}abc\int_\lambda^\infty \frac{du}{(c^2+u)\Delta(u)}, \tag{4.10}$$

$$\Delta(u) = [(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)]^{1/2} \tag{4.11}$$

удовлетворяют уравнению Лапласа *).

Путем рассуждений, аналогичных рассуждениям, приведенным в примере I, находим, что температуры v_i внутри и v_0 вне эллипсоида имеют вид

$$v_i = \frac{V_1x}{1+A_0(\varepsilon-1)} + \frac{V_2y}{1+B_0(\varepsilon-1)} + \frac{V_3z}{1+C_0(\varepsilon-1)}, \tag{4.12}$$

$$v_0 = V_1x + V_2y + V_3z - \frac{(\varepsilon-1)V_1A_\lambda x}{1+A_0(\varepsilon-1)} - \frac{(\varepsilon-1)V_2B_\lambda y}{1+B_0(\varepsilon-1)} - \frac{(\varepsilon-1)V_3C_\lambda z}{1+C_0(\varepsilon-1)}, \tag{4.13}$$

где

$$\varepsilon = K'/K, \tag{4.14}$$

а A_0, B_0, C_0 — интегралы A_λ, B_λ, C_λ при $\lambda = 0$. Следует отметить, что

$$A_0 + B_0 + C_0 = 1. \tag{4.15}$$

Для различных эллипсоидов вращения, в которых две оси равны, интегралы (4.10) можно выразить через элементарные функции. Ниже приводятся полученные результаты (расчеты см. в книге [13]).

Вытянутый эллипсоид вращения, $b = c < a$, $e' = [(a^2-b^2)/(a^2+\lambda)]^{1/2}$ — эксцентриситет софокусного эллипса, проходящего через рассматриваемую внешнюю точку, и e' при $\lambda = 0$ равно e, т. е. эксцентриситету образующего эллипса

$$A_\lambda = \frac{(1-e^2)}{e^3}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{1+e'}{1-e'} - e'\right\}, \tag{4.16}$$

$$B_\lambda = C_\lambda = \frac{(1-e^2)}{2e^3}\left\{\frac{e'}{1-e'^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+e'}{1-e'}\right\}. \tag{4.17}$$

Сплющенный эллипсоид вращения, $a = b > c$.

$$A_\lambda = B_\lambda = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{2e^3}\left\{\operatorname{arcctg}\nu - \frac{\nu}{\nu^2+1}\right\}, \tag{4.18}$$

$$C_\lambda = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3}\left\{\frac{1}{\nu} - \operatorname{arcctg}\nu\right\}, \tag{4.19}$$

где

$$\nu = \left[\frac{(c^2+\lambda)}{(a^2-c^2)}\right]^{1/2} = \frac{(1-e'^2)^{1/2}}{e'}.$$

В качестве простого примера рассмотрим длинный вытянутый эллипсоид вращения $a \gg b$ (которым может служить зонд для измерения теплопроводности или часть кожуха) с коэффициентом теплопроводности K'; его ось совпадает с направлением градиента температуры в материале с коэффициентом теплопроводности K. В соответствии с формулой (4.12) градиент температуры в эллипсоиде вращения равен $V_1/[1 + A_0(K'-K)/K]$. Кроме того, поскольку отношение b/a мало, из (4.16) приближенно получим

$$A_0 = \frac{b^2}{a^2}\left\{\ln\frac{2a}{b} - 1\right\}.$$

*) Эти интегралы рассматриваются во многих трудах по гидродинамике и электричеству [10]. Впервые они рассматривались еще в 1837 г. [11, 12].

Таким образом, градиент температуры внутри эллипсоида вращения приблизительно равен

$$V_1 \left\{ 1 - \frac{b^2 (K' - K)}{K a^2} \left(\ln \frac{2a}{b} - 1 \right) \right\}. \tag{4.20}$$

IV. *Теплопроводность простой гранулированной среды.*

Предположим, что в маточной породе с коэффициентом теплопроводности K размещаются шары с коэффициентом теплопроводности K', занимающие в ней часть объема α. Предполагается, что шары находятся настолько далеко друг от друга, что их взаимное влияние исключается. Допустив, что эти шары имеют радиус a, рассмотрим больший шар с радиусом b, в котором находится n маленьких шаров так, что $na^3 = \alpha b^3$. Согласно соотношению (4.3) температура на большом расстоянии, обусловленная наличием n шаров, при линейном градиенте температуры будет равна

$$Vz + \frac{na^3 (K - K')}{r^3 (2K + K')} Vz;$$

если $K_{\text{ср}}$ — средний коэффициент теплопроводности материала шара радиусом b, то эта температура должна также равняться

$$Vz + \frac{b^3 (K - K_{\text{ср}})}{r^3 (2K + K_{\text{ср}})} Vz.$$

Приравнивая эти выражения, получаем *)

$$K_{\text{ср}} = \frac{3KK'\alpha + (2K + K') K (1 - \alpha)}{3K\alpha + (2K + K')(1 - \alpha)}. \tag{4.21}$$

V. *Установившийся поток в составной неограниченной области* $0 < y < l$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < z < \infty$; *в области* $x > 0$ *коэффициент теплопроводности равен* K_1, *а в области* $x < 0$ *он равен* K_2. *Граничные условия имеют вид*

$$\begin{aligned} v &= 0, & y &= 0, & -\infty < x &< \infty, \\ v &= V_1, & y &= l, & x &> 0, \\ v &= V_2, & y &= l, & x &< 0. \end{aligned}$$

Если v_1 и v_2 — температуры в областях $x > 0$ и $x < 0$ соответственно, то отсюда, как и в § 2 гл. V, следует, что

$$lv_1 = yV_1 - \frac{2l (V_2 - V_1) K_2}{\pi (K_1 + K_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi y}{l} \exp \left[-\frac{n\pi x}{l} \right]. \tag{4.22}$$

$$lv_2 = yV_2 + \frac{2l (V_2 - V_1) K_1}{\pi (K_1 + K_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi y}{l} \exp \left[\frac{n\pi x}{l} \right]. \tag{4.23}$$

Если V_1 и V_2 таковы, что $K_1 V_1 = K_2 V_2 = -Fl$, т. е. при $|x| \to \infty$ тепловой поток в обеих областях стремится к F, то тепловой поток через плоскость $y = 0$ равен

$$F \mp \frac{2 (K_1 - K_2) F}{(K_1 + K_2)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[-\frac{n\pi |x|}{l} \right], \tag{4.24}$$

причем положительный знак берется, если $x < 0$, а отрицательный — если $x > 0$. Это указывает на наличие разрыва теплового потока на границе двух материалов.

VI. *Решения в виде многочленов.*

Известно, что многочлены $ax + by$, $ax + by + cxy + d(y^2 - x^2)$, ... первой, второй и т. д. степени удовлетворяют уравнению Лапласа. Они могут оказаться полезными в простых задачах о составных областях. Например, многочлены

$$v_1 = y(x + a), \quad v_2 = y\{(K_1 x / K_2) + a\} \tag{4.25}$$

*) Этот простой вывод получен из [12]. Более точные выводы приводились многими авторами, в частности Рэлеем [14], который рассматривал решетку из шаров кубической симметрии. Обзор и список литературы можно найти в [15].

удовлетворяют уравнению Лапласа и следующим условиям:

$$v_1 = v_2 = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0$$

и

$$v_1 = v_2, \quad K_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = 0, \quad y > 0.$$

Таким образом, они служат элементарным решением для составной области, в которой материал справа от плоскости $x = 0$, $y > 0$ имеет коэффициент теплопроводности K_1, а материал слева от нее — коэффициент K_2. Изотермы имеют вид дуг равнобочных гипербол *).

§ 5. Практические задачи

Как отмечалось в § 1 данной главы, в технических и лабораторных задачах области с установившимся тепловым потоком значительно сложнее областей, рассмотренных до сих пор.

Перечислим простые задачи, имеющие практическое значение и не исследованные в настоящей книге.

1. Тепловой поток между цилиндром и плоскостью, например между проложенной в земле трубой или кабелем и поверхностью земли.
2. Поток между двумя концентрическими цилиндрами.
3. Поток от решетки труб.
4. Поток между двумя полосами, находящимися в неограниченной среде.
5. Поток через стенки печи.

Из этих примеров в первых трех рассматриваются геометрически простые границы, так что для них можно надеяться найти полные теоретические решения. Два последних примера сложнее.

В последнее время большое внимание уделяется разработке численных методов решения таких задач (см. гл. XVIII).

Вначале отметим, что в случае изотермических поверхностей тепловой поток между ними можно найти из теоретического или экспериментального определения их электрической емкости **). Предположим, что тепло передается от поверхности S_1 с температурой v_1 к поверхности S_2 с температурой v_2 через среду с коэффициентом теплопроводности K. Тогда, определяя термическое сопротивление R исследуемой системы как отношение разности температур поверхностей к количеству тепла, проходящему между ними в единицу времени, находим

$$R = \frac{v_1 - v_2}{K \iint\limits_{S_2} (\partial u/\partial n)\, dS_2}, \tag{5.1}$$

где символ $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование по нормали к S_2, направленной внутрь среды.

В этом случае температура v, служащая решением уравнения Лапласа, принимающим на границах значения v_1 и v_2, численно равна электростатическому потенциалу, возникающему между поверхностями S_1 и S_2, разделенными материалом с диэлектрической проницаемостью, равной единице, и заряженными до потенциалов v_1 и v_2. Емкость такого конденсатора равна

$$C = \frac{1}{4\pi (v_1 - v_2)} \iint\limits_{S_2} \frac{\partial v}{\partial n}\, dS_2. \tag{5.2}$$

*) Этот метод был разработан для изучения изотерм вблизи поверхности Земли [16].

**) Рассмотрение некоторых простых систем приведено в [17].

Отсюда, сравнивая (5.1) и (5.2), получим

$$R = \frac{1}{4\pi KC}. \qquad (5.3)$$

Аналогично, если пространство между двумя поверхностями заполнено электролитом и при известной разности потенциалов измерен электрический ток между ними, то можно определить термическое сопротивление между поверхностями. Этот метод был использован для получения эмпирической формулы термического сопротивления стенки печи толщиной l, окружающей прямоугольный параллелепипед со сторонами $2a$, $2b$, $2c$, в случае, представляющем значительный интерес, а именно при l, имеющем тот же порядок величины, что и a, b и c [18] *).

Трехмерные задачи подобного типа довольно сложны. Если их можно упростить и привести к двумерным, то становится полезным метод конформного отображения, оказавшийся весьма плодотворным в других областях науки. В наших исследованиях этот метод применим к трем типам задач. Во-первых, он позволяет получить точные решения простых задач, например задач, изложенных в пунктах 1 и 2; во-вторых, он дает приближенные решения некоторых задач типа 3 в том смысле, что он дает точные значения для решеток овальных кривых, которые имеют почти (но не совсем) круглую форму; наконец, его можно использовать для исследования некоторых областей простого типа, которые очень часто встречаются на практике, например стенки, изогнутой под прямым углом, стенки переменной толщины, изолирующего кольца и т. д.

Этот метод подробно рассматривается в учебниках по электричеству и гидродинамике. Здесь же мы дадим только краткое введение к приложению этого метода, сначала к задачам для установившегося теплового потока, когда температура поверхности является произвольной функцией положения, а затем к более простому случаю теплового потока между изотермическими поверхностями.

§ 6. Использование сопряженных гармонических функций в задачах с установившейся температурой **)

Пусть ξ, η — действительные функции x и y, причем такие, что ***)

$$\xi + i\eta = f(x+iy) = f(z).$$

В этом случае ξ и η называют сопряженными гармоническими функциями x и y. Тогда мы имеем

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + i\frac{\partial \eta}{\partial x} = f'(z),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + i\frac{\partial \eta}{\partial y} = if'(z).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad (6.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}. \qquad (6.2)$$

---

*) Краткое изложение этого метода можно найти в книге Мак-Адамса [19].

**) В этом и в следующих параграфах настоящей главы задачи с установившейся температурой рассматриваются для пространственных тел; при этом везде предполагается, что распределение температуры не зависит от одной из координат. Иными словами, задачи формулируются не для самого тела, а для его сечения. (*Прим. ред.*)

***) Здесь, конечно, $f(z)$ является аналитической функцией. (*Прим. ред.*)

Отсюда вытекает, что кривые $\xi = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$ ортогональны. Кроме того, поскольку

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}$$

и

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y},$$

то

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.3}$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = 0. \tag{6.4}$$

Далее, если v является такой функцией ξ и η, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0, \tag{6.5}$$

то можно показать, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Так,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Складывая эти два выражения и используя соотношения (6.1) — (6.5), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Итак, если мы можем получить решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0,$$

удовлетворяющее некоторым граничным условиям на кривых

$$\xi = \xi_1, \qquad \xi = \xi_2,$$

$$\eta = \eta_1, \qquad \eta = \eta_2,$$

то это решение на плоскости (ξ, η) можно преобразовать в решение на плоскости (x, y), причем границами служат кривые в плоскости (x, y), которые при преобразовании

$$\xi + i\eta = f(x + i\eta)$$

будут соответствовать кривым $\xi = \xi_1$, и т. д.; температуры на этих границах будут соответствовать температурам на границах в плоскости (ξ, η).

Рассмотрим прямоугольник в плоскости (ξ, η), определяемый следующим образом:

$$\xi = \xi_1, \qquad \xi = \xi_2,$$

$$\eta = \eta_1, \qquad \eta = \eta_2,$$

причем

$$v=f_1(\eta) \quad \text{при} \quad \xi=\xi_1 \, (\eta_1<\eta<\eta_2),$$
$$v=f_2(\eta) \quad \text{при} \quad \xi=\xi_2 \, (\eta_1<\eta<\eta_2),$$
$$v=F_1(\xi) \quad \text{при} \quad \eta=\eta_1 \, (\xi_1<\xi<\xi_2),$$
$$v=F_2(\xi) \quad \text{при} \quad \eta=\eta_2 \, (\xi_1<\xi<\xi_2).$$

Решение этой задачи получается разбиением ее на четыре случая, в каждом из которых три границы поддерживаются при нулевой температуре. Таким образом, как и в задаче I § 3 гл. V, найдем

$$v=\sum_1^\infty \frac{a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi(\xi_2-\xi)}{(\eta_2-\eta_1)}+a'_n \operatorname{sh} \frac{n\pi(\xi-\xi_1)}{(\eta_2-\eta_1)}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi(\xi_2-\xi_1)}{(\eta_2-\eta_1)}} \sin \frac{n\pi(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)}+$$
$$+\sum_1^\infty \frac{b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi(\eta_2-\eta)}{(\xi_2-\xi_1)}+b'_n \operatorname{sh} \frac{n\pi(\eta-\eta_1)}{(\xi_2-\xi_1)}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi(\eta_2-\eta_1)}{(\xi_2-\xi_1)}} \sin \frac{n\pi(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_1)},$$

где a_n, a'_n, b_n и b'_n — коэффициенты в рядах синусов

$$f_1(\eta)=\sum_1^\infty a_n \sin \frac{n\pi(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)}, \qquad f_2(\eta)=\sum_1^\infty a'_n \sin \frac{n\pi(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)},$$
$$F_1(\xi)=\sum_1^\infty b \ \sin \frac{n\pi(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_1)}, \qquad F(\xi)=\sum_1^\infty b'_n \sin \frac{n\pi(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_1)}.$$

Находя ξ и η из соотношения

$$\xi+i\eta=f(x+iy),$$

получаем температуру в области, ограниченной кривыми, которые соответствуют $\xi=\xi_1$, и т. д., причем на этих кривых температуры соответствуют $f_1(\eta)$ и т. д.

§ 7. Приложения этого метода [20, 21]

I. *Сектор круга* *).

Рассмотрим преобразование

$$\xi+i\eta=-\frac{i\pi}{\alpha}\ln\frac{x+iy}{a}. \tag{7.1}$$

В этом случае, обозначая $z=re^{i\theta}$, получим

$$\xi=\frac{\pi}{\alpha}\theta, \qquad \eta=\frac{\pi}{\alpha}\ln\left(\frac{a}{r}\right), \tag{7.2}$$

а сектор радиуса a с углом α соответствует области в плоскости (ξ, η)

$$0<\eta, \qquad 0<\xi<\pi.$$

Тем самым уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=0, \qquad 0<\xi<\pi, \qquad 0<\eta,$$

*) См. примечание к § 6. (*Прим. ред.*)

при условиях

$$v=0, \quad \text{когда} \quad \xi=0 \quad \text{и} \quad \xi=\pi,$$

и

$$v=1, \quad \text{когда} \quad \eta=0,$$

приводится к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

$$v=0, \quad \text{когда} \quad \theta=0 \quad \text{и} \quad \theta=\alpha,$$

и

$$v=1, \quad \text{когда} \quad r=a.$$

Это уравнение в плоскости (ξ, η) уже встречалось при рассмотрении неограниченного тела с прямоугольным сечением, и его решение, согласно формуле (2.11) гл. V, имеет вид

$$v=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\xi}{\operatorname{sh}\eta}\right).$$

Поэтому температура в рассматриваемом нами секторе дается выражением

$$v=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sin(\pi\theta/\alpha)}{\operatorname{sh}[(\pi/\alpha)\ln(\alpha/r)]}\right\}.$$

Если граница $r=a$ поддерживается при температуре $v=f(\theta)$, то задача сводится к решению уравнений

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=0,$$

$$v=0 \quad \text{при} \quad \xi=0 \quad \text{и} \quad \xi=\pi,$$

и

$$v=f\left(\frac{\alpha\xi}{\pi}\right) \quad \text{при} \quad \eta=0.$$

Это решение уже рассматривалось в § 2 гл. V.

Подобным же образом, если граница $\theta=0$ поддерживается при заданной температуре $f(r)$, а другие границы имеют нулевую температуру, то решение вытекает из соотношения (2.18) гл. V.

Если мы аналогичным путем воспользуемся формулой (7.1), то угол $0<\theta<\alpha$, $r>0$ преобразуется в неограниченную полосу $-\infty<\eta<0$, $0<\xi<\pi$ и, следовательно, решение для установившейся температуры в клине с произвольной температурой границы непосредственно вытекает из соотношения (2.19) гл. V.

II. *Круг*.

Рассмотрим преобразование

$$\xi+i\eta=-i\ln\frac{x+iy}{a}. \tag{7.3}$$

В этом случае

$$\xi=\theta, \qquad \eta=\ln\frac{a}{r},$$

а круг $r\leqslant a$ соответствует области

$$0<\eta, \qquad 0<\xi<2\pi$$

плоскости (ξ, η).

Тем самым решением $v(\xi, \eta)$ уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=0,\\ &v=f(\xi), \text{ когда } \eta=0,\\ &v(0, \eta)=v(2\pi, \eta), \text{ когда } \eta>0, \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

служит решение уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,\\ &v=f(\theta), \text{ когда } r=a. \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Решение уравнения (7.4) имеет вид

$$v=\sum_0^\infty e^{-n\eta}(a_n \cos n\xi+b_n \sin n\xi),$$

где

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi')\,d\xi',$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi')\cos n\xi'\,d\xi',$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi')\sin n\xi'\,d\xi'.$$

Таким образом, получаем

$$v=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+2\sum_1^\infty e^{-n\eta}\cos n(\xi-\xi')\right\}f(\xi')\,d\xi'=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-e^{-2\eta}}{1-2e^{-\eta}\cos(\xi-\xi')+e^{-2\eta}}f(\xi')\,d\xi'.$$

Отсюда температура в круге запишется в виде

$$v=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\theta')+r^2}\,d\theta'. \tag{7.6}$$

Интеграл (7.6) есть интеграл Пуассона (см. [22]).

III. *Область между двумя концентрическими окружностями.*

Решение в этом случае можно получить при помощи того же преобразования в виде

$$v=\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sh} n(\eta_2-\eta)}{\operatorname{sh} n(\eta_2-\eta_1)}(a_n \cos n\xi+b_n \sin n\xi)+$$

$$+\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sh} n(\eta-\eta_1)}{\operatorname{sh} n(\eta_2-\eta_1)}(a'_n \cos n\xi+b'_n \sin n\xi),$$

где

$$f_1(\xi) = \sum_0^\infty (a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi),$$

$$f_2(\xi) = \sum_0^\infty (a'_n \cos n\xi + b'_n \sin n\xi)$$

являются рядами Фурье для $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ в интервале от 0 до 2π.

IV. *Область между двумя пересекающимися или непересекающимися окружностями.*

Рассмотрим преобразование

$$\xi + i\eta = \ln \frac{x + 1 - iy}{x - 1 - iy}. \tag{7.7}$$

В этом случае

$$\xi = \ln \frac{r_2}{r_1}, \qquad \eta = \theta_1 - \theta_2,$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точек A (1, 0) и B (—1, 0) до точки $P(x, y)$, а θ_1, θ_2 — углы, образованные отрезками AP и BP с положительным направлением оси x (рис. 49).

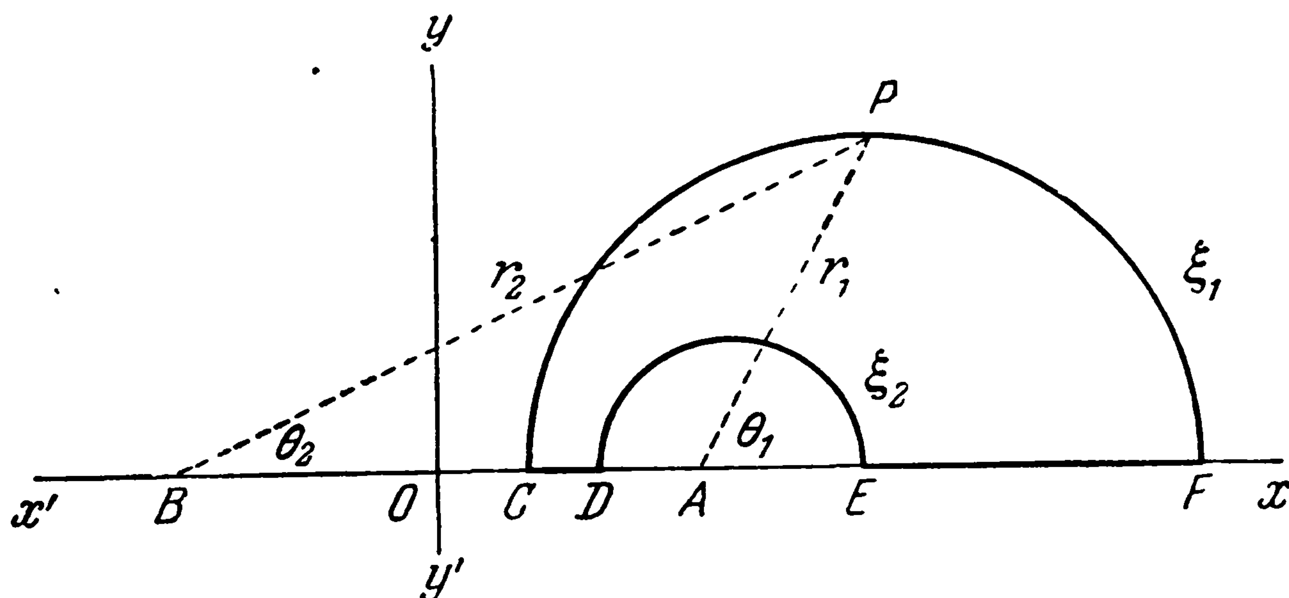


Рис 49.

Тогда при $\xi = \text{const}$ мы получим систему окружностей с центрами на одной прямой, для которых A и B служат предельными точками, а при $\eta = \text{const}$ — систему окружностей, проходящих через точки A и B. Эти две системы кривых, как и во всех случаях сопряженных функций, являются ортогональными. При таком преобразовании плоскости (x, y) соответствует $-\pi < \eta < \pi$ и $-\infty < \xi < \infty$; нижней стороне участка BA вещественной оси соответствует $\eta = -\pi$; лучам Ax и Bx' соответствует $\eta = 0$; верхней стороне участка BA соответствует $\eta = \pi$; области $y > 0$ — положительные значения η, а области $y < 0$ — отрицательные ее значения. Кроме того, точке A соответствует точка $\xi = +\infty$, точке B — точка $\xi = -\infty$, а линии $y'Oy$ соответствует $\xi = 0$.

Перейдем к применению этого преобразования к некоторым случаям, когда область в плоскости (x, y) ограничена дугами окружностей.

1) Рассмотрим область, ограниченную линиями

$$\xi = \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi = \xi_2 \qquad (0 < \eta < \pi),$$
$$\eta = 0 \quad \text{и} \quad \eta = \pi \qquad (\xi_1 < \xi < \xi_2)$$

и показанную на рис. 49 жирными линиями.

Пусть $v=0$ при $\xi=\xi_2$, $\eta=0$ и $\eta=\pi$ и

$$v=f(v) \quad \text{при} \quad \xi=\xi_1.$$

Тогда мы получим

$$v=\sum_1^\infty a_n \frac{\operatorname{sh} n(\xi_2-\xi)}{\operatorname{sh} n(\xi_2-\xi_1)} \sin n\eta,$$

где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\eta')\sin n\eta'\,d\eta'.$$

Легко распространить это решение на случай:

$$\begin{aligned} v&=f_1(\eta) &&\text{при} && \xi=\xi_1 && (0<\eta<\pi),\\ v&=f_2(\eta) &&\text{при} && \xi=\xi_2 && (0<\eta<\pi),\\ v&=F_1(\xi) &&\text{при} && \eta=0 && (\xi_1<\xi<\xi_2),\\ v&=F_2(\xi) &&\text{при} && \eta=\pi && (\xi_1<\xi<\xi_2). \end{aligned}$$

2) Рассмотрим область, ограниченную двумя окружностями $\xi=\xi_1$ и $\xi=\xi_2$, охватывающими предельную точку A.

Пусть $v=f_1(\eta)$ при $\xi=\xi_1$ и $v=0$ при $\xi=\xi_2$. Тогда решение, очевидно, запишется в виде

$$v=\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sh} n(\xi_2-\xi)}{\operatorname{sh} n(\xi_2-\xi_1)}(a_n\cos n\eta+b_n\sin n\eta), \tag{7.8}$$

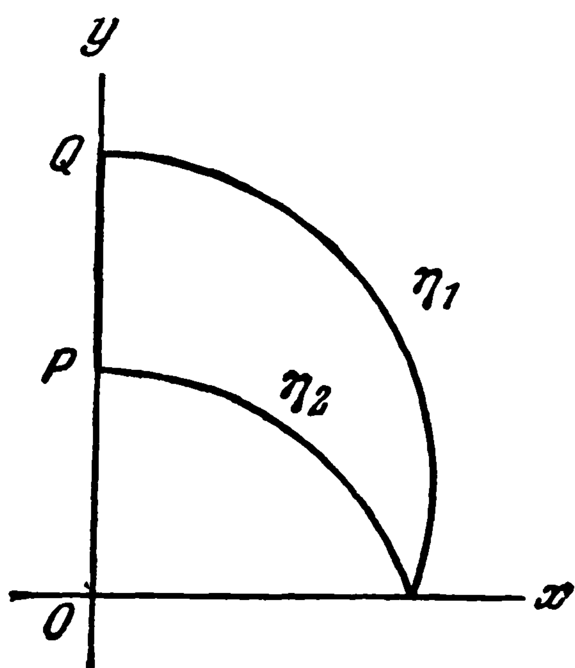


Рис. 50.

где

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\eta')\,d\eta',$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\eta')\cos n\eta'\,d\eta',$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\eta')\sin n\eta'\,d\eta'.$$

Подобным же образом, если $v=f_2(\eta)$ при $\xi=\xi_2$ и $v=0$ при $\xi=\xi_1$, то

$$v=\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sh} n(\xi-\xi_1)}{\operatorname{sh} n(\xi_2-\xi_1)}\left(a_n'\cos n\eta+b_n'\sin n\eta\right),$$

где a_n' и b_n' — коэффициенты ряда Фурье для $f_2(\eta)$ в интервале $-\pi$ — $+\pi$.

Складывая эти два выражения, получим решение для случая, когда граничные окружности ξ_1 и ξ_2 поддерживаются при температурах соответственно $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$.

Ясно, что если $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ постоянны и равны соответственно v_1 и v_2, то следует только решить уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}=0,$$

$$v=v_1 \quad \text{при} \quad \xi=\xi_1,$$

$$v=v_2 \quad \text{при} \quad \xi=\xi_2.$$

Искомое решение имеет вид

$$v=v_1\left(\frac{\xi_2-\xi}{\xi_2-\xi_1}\right)+v_2\left(\frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\right). \tag{7.9}$$

Стационарный тепловой поток в области между двумя заданными окружностями будет, кроме того, рассматриваться в § 9 данной главы.

3) Рассмотрим область с границами:

$$\begin{aligned} &\eta=\eta_1 && (0<\xi<\infty),\\ &\eta=\eta_2 && (0<\xi<\infty),\\ &\xi=0 && (\eta_1<\eta<\eta_2), \end{aligned}$$

показанную на рис. 50.

Предположим, что

$$\begin{aligned} &v=f_1(\eta) && \text{при} \quad \xi=0 && (\eta_1<\eta<\eta_2),\\ &v=0 && \text{при} \quad \eta=\eta_1 && (0<\xi<\infty),\\ &v=0 && \text{при} \quad \eta=\eta_2 && (0<\xi<\infty). \end{aligned}$$

Тогда, как и в § 2 гл. V, решение имеет вид

$$v=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left[-\frac{n\pi\xi}{\eta_2-\eta_1}\right]\sin\frac{(\eta-\eta_1)\,n\pi}{(\eta_2-\eta_1)}, \tag{7.10}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\eta_2-\eta_1}\int_{\eta_1}^{\eta_2} f_1(\eta')\sin\frac{(\eta'-\eta_1)\,n\pi}{(\eta_2-\eta_1)}\,d\eta'.$$

Предположим далее, что

$$\begin{aligned} &v=f_2(\xi) && \text{при} \quad \eta=\eta_1 && (0<\xi<\infty),\\ &v=0 && \text{при} \quad \eta=\eta_2 && (0<\xi<\infty),\\ &v=0 && \text{при} \quad \xi=0 && (\eta_1<\eta<\eta_2). \end{aligned}$$

Из соотношения (2.18) гл. V следует, что

$$\begin{aligned} v=\frac{1}{2(\eta_2-\eta_1)}\sin\frac{\pi(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)}\int_0^{\infty} f_2(\xi')\,d\xi'\times\\ \times\left\{\frac{1}{\cos[\pi(\eta_2-\eta)/(\eta_2-\eta_1)]+\operatorname{ch}[\pi(\xi-\xi')/(\eta_2-\eta_1)]}-\right.\\ \left.-\frac{1}{\cos[\pi(\eta_2-\eta)/(\eta_2-\eta_1)]+\operatorname{ch}[\pi(\xi+\xi')/(\eta_2-\eta_1)]}\right\}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Решение для случая, когда все три границы (см. рис. 50) поддерживают при заданной температуре, находят сложением решения (7.10) и двух решений типа (7.11).

4) Рассмотрим область с границами

$$\begin{aligned} &\eta=\eta_1 && (-\infty<\xi<\infty),\\ &\eta=\eta_2 && (-\infty<\xi<\infty). \end{aligned}$$

Пусть

$$v=f(\xi) \quad \text{при} \quad \eta=\eta_1$$

и

$$v=0 \quad \text{при} \quad \eta=\eta_2.$$

Тогда, используя, как и выше, соотношение (2.19) гл. V, найдем

$$v=\frac{1}{2(\eta_2-\eta_1)}\sin\frac{\pi(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi')\,d\xi'}{\cos[\pi(\eta_2-\eta)/(\eta_2-\eta_1)]+\operatorname{ch}[\pi(\xi-\xi')/(\eta_2-\eta_1)]}. \tag{7.12}$$

V. *Софокусные эллипсы или гиперболы.*

Рассмотрим преобразование

$$\xi + i\eta = \operatorname{Arch}\frac{x+iy}{c}$$

или

$$x + iy = c \operatorname{ch}(\xi + i\eta).$$

Тогда

$$x = c \operatorname{ch}\xi \cos\eta, \qquad y = c \operatorname{sh}\xi \sin\eta$$

и

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2\xi} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2\xi} = c^2,$$

$$\frac{x^2}{\cos^2\eta} - \frac{y^2}{\sin^2\eta} = c^2.$$

Следовательно, кривые $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ образуют ряд софокусных эллипсов и гипербол, а плоскость (x, y) соответствует $-\pi < \eta < \pi$ и $0 < \xi < \infty$, причем для нижней части этой плоскости $\eta < 0$, а для верхней ее части $\eta > 0$.

1) *Два софокусных эллипса.* Рассмотрим область с границами $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$. Пусть

$$v = f_1(\eta) \quad \text{при} \quad \xi = \xi_1,$$
$$v = f_2(\eta) \quad \text{при} \quad \xi = \xi_2.$$

Тогда, как и выше,

$$v = \sum_0^\infty \frac{\operatorname{sh} n(\xi_2 - \xi)}{\operatorname{sh} n(\xi_2 - \xi_1)}(a_n \cos n\eta + b_n \sin n\eta) + \sum_0^\infty \frac{\operatorname{sh} n(\xi - \xi_1)}{\operatorname{sh} n(\xi_2 - \xi_1)}(a_n' \cos n\eta + b_n' \sin n\eta),$$

где a_n, b_n, a_n' и b_n' — коэффициенты рядов Фурье для $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ в интервале от $-\pi$ до $+\pi$.

2) *Два полуэллипса и отрезок большой оси между ними.* В этом случае область имеет границы

$$\xi = \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi = \xi_2 \qquad (0 < \eta < \pi),$$
$$\eta = 0 \quad \text{и} \quad \eta = \pi \qquad (\xi_1 < \xi < \xi_2).$$

Пусть

$$v = f_1(\eta) \quad \text{при} \quad \xi = \xi_1,$$
$$v = f_2(\eta) \quad \text{при} \quad \xi = \xi_2,$$

и

$$v = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad \text{и} \quad \eta = \pi.$$

Очевидно, что в данном случае решение имеет вид

$$v = \sum_1^\infty a_n \sin n\eta \frac{\operatorname{sh} n(\xi_2 - \xi_1)}{\operatorname{sh} n(\xi_2 - \xi_1)} + \sum_1^\infty a_n' \sin n\eta \frac{\operatorname{sh} n(\xi - \xi_1)}{\operatorname{sh} n(\xi_2 - \xi_1)},$$

где a_n и a_n' — коэффициенты рядов по синусам для $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$.

3) *Полуэллипс.* В этом случае область имеет границы

$$\xi = 0 \quad \text{и} \quad \xi = \xi_1 \qquad (0 < \eta < \pi),$$
$$\eta = 0 \quad \text{и} \quad \eta = \pi \qquad (0 < \xi < \xi_1).$$

Пусть $v = f(\eta)$ при $\xi = \xi_1$, и пусть на большой оси температура равна нулю. Тогда

$$v = \sum_1^\infty a_n \sin n\eta \frac{\operatorname{sh} n\xi}{\operatorname{sh} n\xi_1},$$

где a_n — коэффициент ряда по синусам для $f(\eta)$.

4) *Полный эллипс.* В этом случае решение должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0, \qquad 0 < \xi < \xi_1, \qquad -\pi < \eta < \pi,$$

$$v = f(\eta) \quad \text{при} \quad \xi = \xi_1 \qquad (-\pi < \eta < \pi).$$

Кроме того, при переходе через большую ось или при движении вдоль нее не должно возникать разрыва непрерывности температуры или теплового потока.

Всем этим условиям удовлетворяет выражение

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{\operatorname{ch} n\xi}{\operatorname{ch} n\xi_1} \cos n\eta + b_n \frac{\operatorname{sh} n\xi}{\operatorname{sh} n\xi_1} \sin n\eta \right),$$

где a_n и b_n — коэффициенты ряда Фурье для $f(\eta)$ в интервале от $-\pi$ до π.

5) *Четырехугольник, ограниченный дугами двух софокусных эллипсов и гипербол.* Он приводится к прямоугольнику в плоскости $(\xi\eta)$. Отсюда и получается соответствующее решение.

§ 8. Установившийся тепловой поток в многоугольнике

Решения, приведенные в предыдущем параграфе, найдены путем использования хорошо известных преобразований, соответствующих рассматриваемым областям. Общий метод нахождения преобразования различных областей отсутствует. Для двумерного установившегося потока в области, ограниченной многоугольником, теоретически возможно найти соответствующее преобразование путем использования приведенной ниже теоремы.

Теорема Шварца — Кристоффеля [23, 24] гласит, что любой многоугольник, ограниченный в плоскости $z\,(z = x + iy)$ прямыми, можно преобразовать в ось ξ плоскости $t\,(t = \xi + i\eta)$ и что точки внутри многоугольника на плоскости z преобразуются в точки на полуплоскости t. Преобразование, с помощью которого это достигается, получается из соотношения

$$\frac{dz}{dt} = C (t - \xi_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (t - \xi_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \ldots (t - \xi_n)^{\alpha_n/\pi - 1}, \tag{8.1}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — внутренние углы многоугольника, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — точки на вещественной оси, в которые преобразуются вершины углов, C — постоянная; кроме того, если одна из вершин углов соответствует бесконечному значению ξ, то соответствующий множитель в соотношении (8.1) опускается *).

Какими бы ни были значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$, преобразование (8.1) отображает ось ξ в многоугольник с внутренними углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; если он должен быть подобным заданному многоугольнику, то можно произвольно выбрать только три значения из $\xi_1, \ldots, \xi_n$; остальные должны определяться размерами заданного многоугольника.

Если преобразование известно, то температуру в любой точке можно вывести из известного решения для температуры в полуплоскости $\eta > 0$, обусловленной температурой $f(\xi)$ на границе $\eta = 0$. По аналогии с соотношением (2.20) гл. V получаем для этой температуры

$$\frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi')\, d\xi'}{(\xi - \xi')^2 + \eta^2}.$$

*) Доказательства этой теоремы приводятся в большинстве курсов электричества и гидродинамики (см. также [25—27]). В последней работе содержится много примеров, представляющих интерес для рассматриваемых здесь случаев.

Доказательство основано на том, что, согласно соотношению (8.1), аргумент функции dz/dt постоянен, если t лежит между двумя произвольными точками $\xi_1, \xi_2, \ldots$, и, следовательно, отрезки $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ плоскости t соответствуют прямым линиям на плоскости z. Кроме того, когда t переходит из $\xi_r - \varepsilon$ в $\xi_r + \varepsilon$ по полуокружности с бесконечно малым радиусом ε, аргумент функции dz/dt увеличивается на $\pi - \alpha_r$, что соответствует внутреннему углу α_r многоугольника. (См. также, например, М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958. *Прим. ред.*)

Если при $\xi > 0$ $f(\xi) = V_1 = \text{const}$, а при $\xi < 0$ $f(\xi) = 0$, то это выражение принимает вид

$$V\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}\right\}. \tag{8.2}$$

Приведенное выше преобразование можно использовать для изучения тепловых потоков в прямоугольнике, а также в области, находящейся между квадратами с параллельными сторонами и общим центром [28, 29]. В общем случае решения будут содержать эллиптические или другие специальные функции. Наиболее простые и вместе с тем наиболее важные результаты получаются при использовании этого метода в случае вырожденных многоугольников с несколькими углами на бесконечности; в ряде таких случаев решение содержит только элементарные функции и делает возможным изучение двумерных задач, которые являются идеализацией таких широко распространенных систем, как изогнутая стенка, стенка переменной толщины, впадина в стенке, изолирующее кольцо и т. п. Рассмотрим несколько примеров такого типа *).

I. *Тепловой поток между неограниченной плоскостью AB и полуограниченной плоскостью CD* (рис. 51).

Рассмотрим многоугольник в плоскости z, обозначенный $ABCDEA$. Он имеет угол, равный нулю при BC на бесконечности, внутренний угол 2π при D; если принять, что точки, соответствующие A и E, находятся на бесконечности в плоскости t, то углы BA и DE здесь рассматривать не надо.

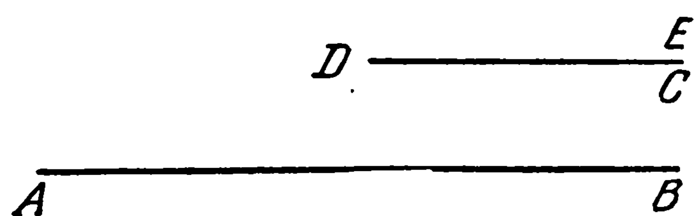


Рис. 51.



Рис. 52.

Поскольку в плоскости t три точки можно выбирать произвольным образом, примем, что точки A и E располагаются в бесконечности, B и C — в точке $t = 0$, а D — в точке $t = 1$. Фигура, получающаяся в плоскости t, показана на рис. 52.

Тогда соотношение (8.1) принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = C\,\frac{t-1}{t}. \tag{8.3}$$

Рис. 53.

Сокращенный метод с использованием внутренних углов 0 и 2π, примененный выше для получения соотношения (8.3), оказывается наиболее удобным. Если угодно, многоугольник, показанный на рис. 51, можно рассматривать как предельный случай многоугольника $ABCDD'EFGA$ (рис. 53) при $D' \to D$ и вершинах A, B, C, E, F и G, удаляющихся на бесконечность. Записывая соотношение (8.1) для многоугольника, показанного на рис. 53, и переходя к пределу, мы снова получим (8.3).

Интегрирование соотношения (8.3) дает

$$z = C(t - \ln t) + k. \tag{8.4}$$

*) Другие примеры использования этого метода можно найти в [26, 27, 29—32]. Задачи аналогичного типа с закруглением некоторых углов рассмотрены в [33]. Другие задачи с закругленными углами изложены в [34]. Метод Шварца был также обобщен на многоугольники с криволинейными сторонами [35].

Произвольные постоянные C и k находят путем точного задания многоугольника в плоскости z. Постоянную C всегда можно считать действительной; придание ей комплексного значения просто поворачивает многоугольник. Если отрезок AB служит участком оси x, то величина z при действительном и отрицательном t должна быть действительной. Это требует, чтобы $k = i\pi C$, и тогда (8.4) принимает вид

$$z = C\{t - \ln t + i\pi\}. \tag{8.5}$$

Теперь в точке D $t=1$, и, следовательно, $z = C(1+i\pi)$. Отсюда следует, что расстояние между данными плоскостями равно πC.

II. *Тепловой поток между неограниченной плоскостью и прямым двугранным углом.*

Здесь рассматриваемым многоугольником служит $ABCDE$ (рис. 54), и мы преобразуем точки A, B, точку CD и точку E в точки $-\infty$, -1, 0 и $+\infty$ на оси ξ. Внутренние углы при точке B и точке CD равны соответственно $3\pi/2$ и 0; тогда соотношение (8.1) принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = C\frac{(t+1)^{1/2}}{t},$$

что дает

$$z = C\left\{2\sqrt{(t+1)} + \ln\frac{(t+1)^{1/2}-1}{(t+1)^{1/2}+1}\right\} + k. \tag{8.6}$$

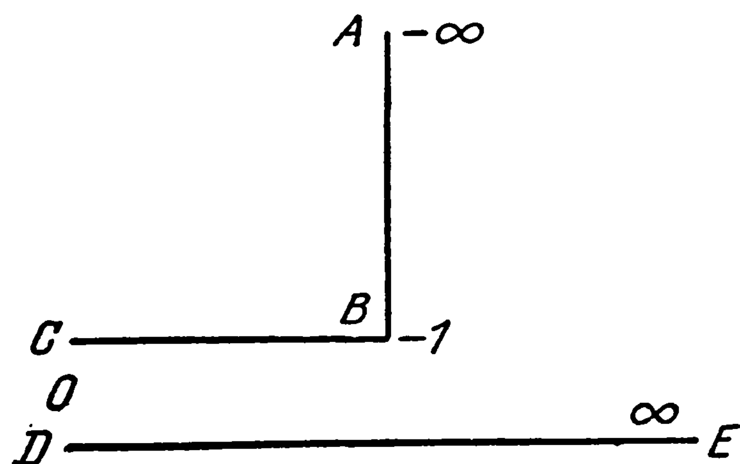


Рис. 54.

Чтобы определить произвольные постоянные C и k, воспользуемся тем, что при переходе t через нуль z уменьшается на $i\pi C$. Кроме того, при $t>0$ z действительно, т. е. DE является действительной осью в плоскости z. Таким образом, если расстояние между BC и DE равно h, то $\pi C = h$. Далее, при $t=-1$, $z = iC\pi + k$. При выборе $k=0$ начало координат фиксируется на пересечении DE и продолжения AB.

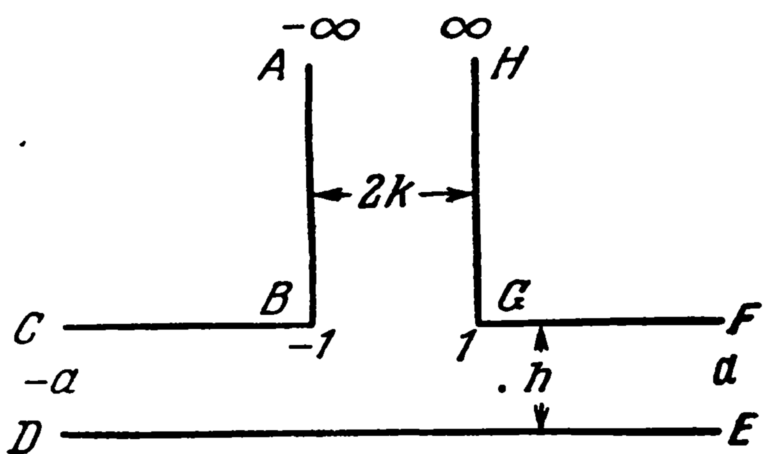


Рис. 55.

III. *Изолирующее кольцо.*

Многоугольник, показанный на рис. 55, можно использовать для исследования влияния изолирующего кольца на изотермы между параллельными плоскостями. Пусть A переходит в $\xi = -\infty$, а B переходит в $\xi = -1$, точка CD — в $\xi = -a$, где a будет определено позднее, EF — в $\xi = a$, G — в $\xi = 1$ и H — в $\xi = +\infty$. Внутренние углы в вершинах CD и EF равны нулю; в вершинах B и G они равны $3\pi/2$. Тогда

$$\frac{dz}{dt} = C\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2-a^2}.$$

Интегрируя, найдем

$$z = -iC\left\{\frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}\ln\frac{(t+a)\{1-at+\sqrt{(1-a^2)(1-t^2)}\}}{(t-a)\{1+at+\sqrt{(1-a^2)(1-t^2)}\}} + \arcsin t\right\} + \pi C\frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}, \tag{8.7}$$

где постоянную интегрирования следует выбрать так, чтобы при $t=0$ $z=0$. DE служит отрезком оси y, а ось x располагается посередине между AB

и HG. Чтобы найти a и C, мы предполагаем, что $2k$ есть расстояние между плоскостями AB и HG и что h есть расстояние между плоскостями GF и DE; тогда точка G имеет координату $z=h-ik$. Полагая в соотношении (8.7) $t=1$, $z=h-ik$, найдем

$$h-ik=-\frac{iC\pi}{2}+\frac{\pi C\sqrt{1-a^2}}{2a}.$$

Отсюда

$$C=\frac{2k}{\pi}, \quad a^2=\frac{k^2}{(k^2+h^2)}.$$

IV. *Стенка, согнутая под прямым углом.*

Схематическое изображение такой стенки показано на рис. 56. Точки A, B, CD, E, F отображаются в $-\infty$, $-a$, 0, 1, $+\infty$ в плоскости t. Используемое преобразование определяется уравнением

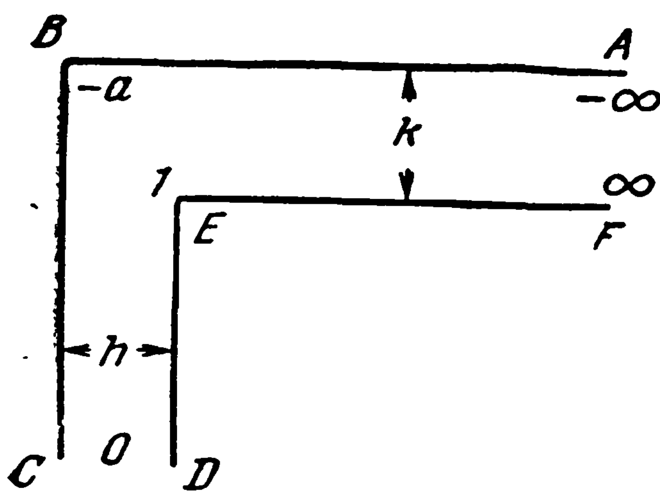


Рис. 56.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{C(t-1)^{1/2}}{t(t+a)^{1/2}}.$$

Чтобы проинтегрировать его, положим

$$\beta=\left(\frac{t-1}{t+a}\right)^{1/2}; \tag{8.8}$$

тогда

$$z=-\frac{2C}{a^{1/2}}\operatorname{arctg}\beta a^{1/2}+C\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}, \tag{8.9}$$

где постоянная интегрирования обращается в нуль в результате выбора $z=0$ при $t=1$, т. е. выбора в качестве начала координат в плоскости z точки E.

Соотношение (8.9) можно написать в другом виде

$$z=-\frac{2C}{a^{1/2}}\arcsin\left\{\frac{a(t-1)}{t(a+1)}\right\}^{1/2}+C\ln\frac{\sqrt{t+a}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+a}-\sqrt{t-1}}. \tag{8.10}$$

Полагая в соотношении (8.10) $t=-a$, найдем значение z для точки B; оно будет равно $-\pi Ca^{-1/2}+i\pi C$. Теперь, если расстояние между вертикальными границами стенки (рис. 56) равно h, а расстояние между ее горизонтальными границами равно k, то для точки B получаем $z=-h+ik$ при $t=-a$. Поэтому из (8.10) находим

$$k=\pi C, \quad h=\pi Ca^{-1/2}, \quad a=\frac{k^2}{h^2}. \tag{8.11}$$

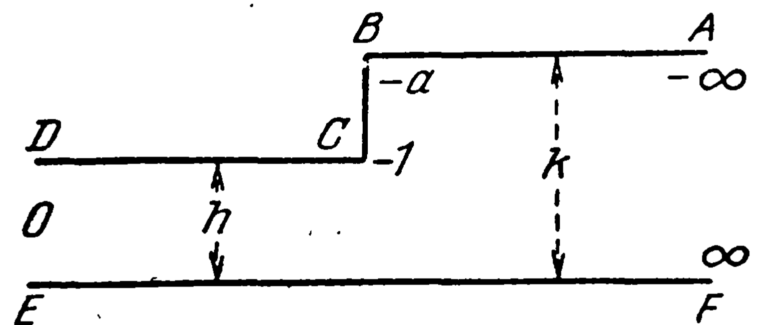


Рис. 57.

V. *Скачкообразное изменение толщины стенки* [36, 37, 41].

Схематическое изображение такой стенки показано на рис. 57, причем значения ξ в плоскости t отмечены у вершин углов. Используемое преобразование определяется выражением

$$\frac{dz}{dt}=\frac{C(t+1)^{1/2}}{t(t+a)^{1/2}}.$$

Полагая

$$\beta=\left(\frac{t+1}{t+a}\right)^{1/2},$$

находим

$$z=C\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}+Ca^{-1/2}\ln\frac{\beta a^{1/2}-1}{\beta a^{1/2}+1}. \tag{8.12}$$

Произвольные постоянные интегрирования выбираются таким образом, чтобы при $t = -a$ $z = i\pi C$. Кроме того, полагая в соотношении (8.12) $t = -1$, находим $z = i\pi C a^{-1/2}$.

Наконец, при $t > 0$ z действительно. Поэтому EF является отрезком действительной оси в плоскости z, а начало координат лежит на пересечении BC и EF. Если толщины стенки слева и справа от начала координат равны h и k, то мы получим

$$h = \pi C a^{-1/2}, \qquad k = \pi C, \qquad a = \frac{k^2}{h^2}. \tag{8.13}$$

VI. *Перегородка в стенке* [38] *).

Значения ξ, соответствующие вершинам углов, указаны на рис. 58. Используемое преобразование определяется соотношением

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Ct}{(t^2-1)(t^2-a^2)^{1/2}}.$$

$$z = -\frac{C}{2\sqrt{1-a^2}} \ln \frac{\sqrt{1-a^2}+\sqrt{t^2-a^2}}{\sqrt{1-a^2}-\sqrt{t^2-a^2}}, \tag{8.14}$$

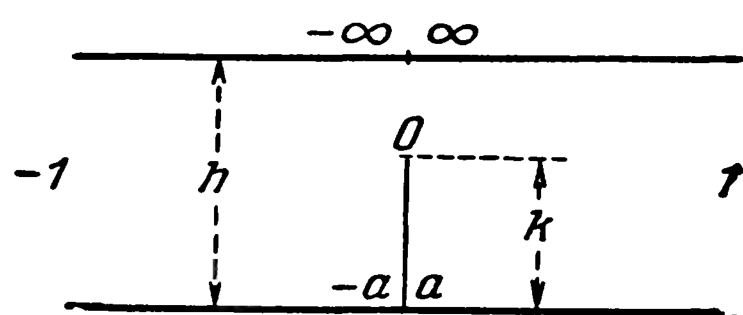


Рис. 58.

где постоянная интегрирования выбрана так, что $z = 0$, когда $t = \pm a$, т. е. начало координат в плоскости z находится у основания перегородки. Далее, из соотношения (8.14) получим

$$\text{при } t \to \pm\infty \quad z \to -\frac{i\pi C}{2\sqrt{1-a^2}},$$

$$\text{при } t = 0 \quad z = -\frac{iC}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Таким образом, если расстояние между стенками равно h, а высота перегородки k, мы должны получить

$$\frac{\pi C}{2\sqrt{1-a^2}} = h, \qquad a = \sin\frac{\pi k}{2h}. \tag{8.15}$$

§ 9. Тепловой поток между изотермическими поверхностями

Метод, изложенный в §§ 6—8 данной главы, весьма общий, и он приемлем для изучения задач, в которых температура поверхности является произвольной функцией положения. Из теории конформного отображения здесь используется только преобразование заданной области в плоскости z в простую область в плоскости t, для которой может быть написано решение.

Из наиболее важных практических задач легче всего решаются задачи, в которых границы области в плоскости z поддерживаются при постоянной, а не при произвольной температуре, и решение в плоскости t принимает простую форму (например, имеет вид (7,9) и (8,2) данной главы). Вместо такого метода получения решения этих задач здесь мы рассмотрим несколько отличный метод, точно соответствующий методу, используемому в теории электричества [43] или гидродинамике. Сама температура v берется в виде одной из пары сопряженных гармонических функций; затем путем исследования

*) В работе [39] приведено множество решений задач подобного типа. Теплообмен на плоской границе рассматривался в [40]. Выступ на плоскости рассмотрен в [41, 42].

функции u, сопряженной с v, мы можем найти тепловой поток через любой участок одной из граничных поверхностей и, следовательно, выражение для термического сопротивления (см. (5.1) настоящей главы) в установившемся потоке между границами с постоянными температурами.

Пусть, как и выше (см. стр. 426),

$$w = u + iv = f(x + iy) = f(z).$$

Тогда все решения § 6 имеют силу при замене ξ и η на u и v. В частности,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{9.1}$$

Отсюда следует, что мнимая часть (или аналогичным образом действительная часть) любой функции $f(z)$ служит решением уравнения для установившейся температуры и, в частности, определяет температуру в области между кривыми $v = v_1$ и $v = v_2$ (где v_1 и v_2 — постоянные) в плоскости z.

Например, если

$$u + iv = \frac{1}{\pi} \ln z = \frac{1}{\pi} \ln r + \frac{i\theta}{\pi}, \tag{9.2}$$

то мы получим $v = \theta/\pi$, что определяет установившуюся температуру в области между плоскостью $\theta = 0$, поддерживаемой при нулевой температуре, и плоскостью $\theta = \pi$, поддерживаемой при единичной температуре (ср. (8.2) данной главы).

Отметим далее, что кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в плоскости z ортогональны (согласно (6.1) и (6.2)). Поэтому, так как линии $v = \text{const}$ являются изотермами, кривые $u = \text{const}$ являются линиями тока. Кроме того, мы можем написать

$$|f'(z)| = \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\}^{1/2}. \tag{9.3}$$

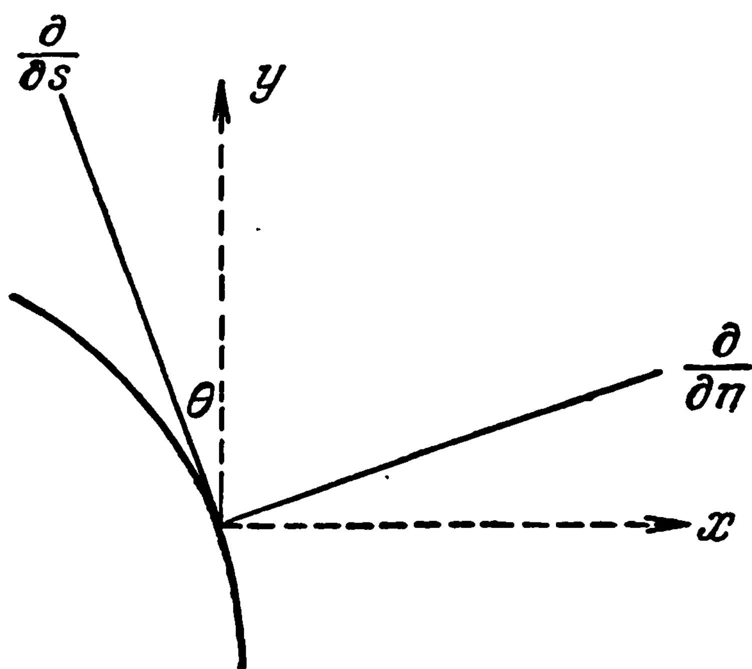


Рис. 59.

Поэтому модуль вектора потока (ср. § 3 гл. I) в любой точке равен

$$K \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\}^{1/2} = K \left| \frac{dw}{dz} \right|. \tag{9.4}$$

Так же просто можно получить величину теплового потока через любой участок изотермической поверхности. Обозначим через $\partial/\partial n$ дифференцирование по нормали к поверхности, а через $\partial/\partial s$ — дифференцирование по касательной к ней (рис. 59).

Тепловой поток через поверхность в любой точке записывается в виде

$$-K \frac{\partial v}{\partial n} = -K \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin\theta \right\} = -K \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x} \sin\theta \right\} = K \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Таким образом, тепловой поток через участок поверхности от s_1 до s_2 равен

$$K \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial s} ds = K(u_2 - u_1), \tag{9.5}$$

где u_1 и u_2 — значения u при s_1 и s_2 соответственно.

Как мы видим, введение функции u, сопряженной с v, значительно упрощает расчет теплового потока через изотермическую поверхность и, следовательно, расчет теплового сопротивления между изотермическими поверхностями.

С этой точки зрения плоскость $t=\xi+i\eta$ (см. § 7) можно рассматривать как плоскость w настоящего параграфа. В более сложных задачах предыдущего параграфа мы отображаем плоскость z в плоскость t, как и раньше. В простом случае двух изотермических границ записываем решение для плоскости t при помощи соотношения (9.2), т. е.

$$w=\frac{1}{\pi}\ln t, \tag{9.6}$$

или соответствующей его модификации и получаем из него решение в плоскости z. Для нахождения модуля вектора потока в любой точке воспользуемся соотношением

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\left|\frac{dw}{dt}\right|\times\left|\frac{dt}{dz}\right|=\left|\frac{dw}{dt}\right|\Big/\left|\frac{dz}{dt}\right|. \tag{9.7}$$

Перейдем теперь к изучению термического сопротивления между некоторыми рассмотренными ранее границами.

I. *Установившийся тепловой поток между цилиндрами кругового сечения.*

Соответствующее преобразование уже приводилось в § 7 настоящей главы. Для практических расчетов решение можно записать в самой простой форме. Используя соотношение (7.7) данной главы и вводя некоторые изменения в обозначения, получим

$$u+iv=i\ln\frac{(x+c)+iy}{(x-c)+iy}, \tag{9.8}$$

так что

$$v=\ln\frac{r}{r'} \quad \text{и} \quad u=\theta'-\theta, \tag{9.9}$$

где r и r' — расстояния точки $P(x, y)$ до точек $(\mp c, 0)$, а θ и θ' — углы PCX и PDX (рис. 60).

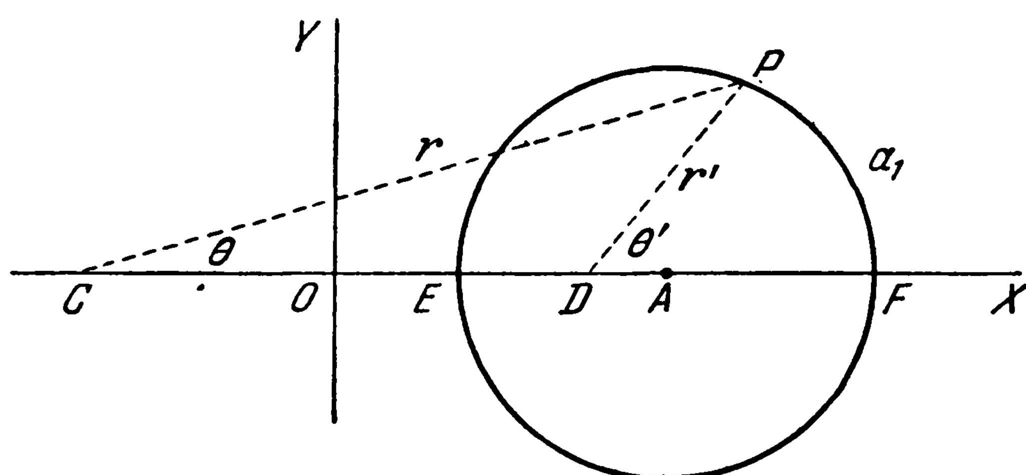


Рис. 60.

Предположим теперь, что мы хотим найти термическое сопротивление между двумя цилиндрами с радиусами a_1 и a_2, центры которых находятся на расстоянии d друг от друга. Подробно рассмотрим случай, когда цилиндр радиуса a_1 окружает цилиндр радиуса a_2. Обозначим на рис. 60 линию, проходящую через центры, через OX. Следует выразить значение c и отношение (r/r') для каждой из окружностей через заданные значения a_1, a_2 и d.

Предположим, что центр A окружности радиуса a расположен на расстоянии d_1 от точки O. Обозначим через k_1 постоянное значение отношения (r/r') для такой окружности. Тогда, записывая значение этого отношения соответственно для точек E и F, получим

$$k_1=\frac{c+(d_1-a_1)}{c-(d_1-a_1)}=\frac{(d_1+a_1)+c}{(d_1+a_1)-c}. \tag{9.10}$$

Отсюда следует, что

$$d_1^2-a_1^2=c^2. \tag{9.11}$$

Аналогичным образом, для окружности радиуса a_2 с центром, расположенным на расстоянии d_2 от O, получим

$$d_2^2 - a_2^2 = c^2. \tag{9.12}$$

Вычитая (9.12) из (9.11), находим

$$d_1^2 - d_2^2 = a_1^2 - a_2^2. \tag{9.13}$$

Кроме того, поскольку расстояние между центрами окружностей равно d,

$$d_1 - d_2 = d. \tag{9.14}$$

Отсюда следует, что

$$d_1 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + d^2}{2d}, \qquad d_2 = \frac{a_1^2 - a_2^2 - d^2}{2d}. \tag{9.15}$$

Кроме того, подстановка (9.11) в (9.10) дает

$$k_1 = \frac{\sqrt{d_1 + a_1} + \sqrt{d_1 - a_1}}{\sqrt{d_1 + a_1} - \sqrt{d_1 - a_1}} = \frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 - a_1^2}}{a_1}. \tag{9.16}$$

Таким образом, учитывая (9.9), получим для этого цилиндра

$$v_1 = \ln k_1 = \operatorname{Arch} \frac{d_1}{a_1} = \operatorname{Arch} \left\{ \frac{a_1^2 - a_2^2 + d^2}{2a_1 d} \right\}, \tag{9.17}$$

а для цилиндра с радиусом a_2

$$v_2 = \ln k_2 = \operatorname{Arch} \left\{ \frac{a_1^2 - a_2^2 - d^2}{2a_2 d} \right\}. \tag{9.18}$$

Помимо этого, из соотношения (9.9) следует, что при полном обходе любого из цилиндров u увеличивается на 2π. Поэтому, согласно (9.5), тепловой поток между цилиндрами (на единицу длины) равен $2\pi K$. Разность температур между ними, равная $v_2 - v_1$, определяется (9.17) и (9.18), и, следовательно, термическое сопротивление между цилиндрами на единицу длины записывается в виде

$$\frac{(v_2 - v_1)}{2\pi K} = \frac{1}{2\pi K} \left\{ \operatorname{Arch} \frac{a_1^2 - a_2^2 - d^2}{2a_2 d} - \operatorname{Arch} \frac{a_1^2 - a_2^2 + d^2}{2a_1 d} \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi K} \operatorname{Arch} \frac{a_1^2 + a_2^2 - d^2}{2a_1 a_2}. \tag{9.19}$$

Для цилиндра радиусом a_1 с осью, расположенной на расстоянии d_1 от плоскости, причем и цилиндр и плоскость представляют собой изотермические поверхности *), как и раньше, справедливо соотношение (9.17), и для термического сопротивления (на единицу длины) между цилиндром и плоскостью получим

$$\frac{1}{2\pi K} \ln \frac{d_1 + \sqrt{(d_1^2 - a_1^2)}}{a_1} = \frac{1}{2\pi K} \operatorname{Arch} \frac{d_1}{a_1}. \tag{9.20}$$

Если цилиндры находятся снаружи друг от друга, то мы предполагаем, что цилиндр с радиусом a_1 окружает предельную точку D,

*) Это решение находит применение при нахождении постоянных тепловых потерь кабелями, проложенными в земле [44]. Случай теплообмена на плоской поверхности обсуждается в [40, 45]. Другие задачи с граничными условиями третьего рода рассматриваются в [46].

а цилиндр с радиусом a_2 содержит точку C. Будем действовать так же, как и выше, но в данном случае выражение (9.14) следует заменить на $d_1+d_2=d$. Тогда v_1 определяется (9.17), а v_2 — из соотношений

$$v_2 = -\ln\frac{d_2+\sqrt{(d_2^2-a_2^2)}}{a_2} = -\operatorname{Arch}\frac{d_2}{a_2} = -\operatorname{Arch}\left\{\frac{d^2-a_1^2+a_2^2}{2a_2d}\right\}. \quad (9.21)$$

Таким образом, термическое сопротивление (на единицу длины) между двумя цилиндрами равно

$$\frac{1}{2\pi K}\left\{\operatorname{Arch}\frac{a_1^2-a_2^2+d^2}{2a_1d}+\operatorname{Arch}\frac{d^2-a_1^2+a_2^2}{2a_2d}\right\} = \frac{1}{2\pi K}\operatorname{Arch}\frac{d^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2}. \quad (9.22)$$

II. *Другие задачи с круговыми границами.*

Следующими по трудности и весьма важными для практики системами являются цилиндр между параллельными плоскостями и решетка, образованная регулярно расположенными цилиндрами *). Точные решения задач с помощью конформного отображения получить не удалось, однако известны решения для овальных кривых; соответствующим выбором параметров можно получить хорошее приближение к окружностям **).

III. *Тепловой поток под непроводящей полосой.*

Пусть область $-\infty < x < -c$ поддерживается при постоянной температуре π, область $x > c$ — при нулевой температуре, и при этом тепловой поток через полосу $-c < x < c$ отсутствует. Положим, что

$$u+iv = \operatorname{Arch}(x+iy)/c,$$

так что

$$x = c\operatorname{ch}u\cos v,$$
$$y = c\operatorname{sh}u\sin v.$$

Эквипотенциальными линиями служат гиперболы

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2 v} - \frac{y^2}{c^2\sin^2 v} = 1,$$

а линиями тока — эллипсы. Эквипотенциальной линией $v=0$ служит линия $x=c\operatorname{ch}u>c$, $y=0$; $-\infty<u<0$ соответствует нижней стороне луча $c<x<\infty$, а $0<u<\infty$ — верхней его стороне. Аналогичным образом, эквипотенциальной линией $v=\pi$ служит линия $x=-c\operatorname{ch}u<-c$, $y=0$; $-\infty<u<0$ соответствует нижней стороне луча $-\infty<x<c$, а $0<u<\infty$ — верхней его стороне. Согласно (9.5) тепловой поток Q из участка $-X<x<-c$ нижней стороны оси x равен

$$K[u]_{x=-X}^{x=-c} = K\operatorname{Arch}\frac{X}{c}.$$

IV. *Тепловой поток между пластинами AB и CD* (см. рис. 51). *Температура AB равна единице, температура CD — нулю.*

Здесь, как и в (9.2) или (9.6), полагаем

$$w = \frac{1}{\pi}\ln t.$$

*) То есть цилиндрами с параллельными осями. Сечение этой системы имеет вид решетки из окружностей. (*Прим. ред.*)

**) Цилиндр между параллельными плоскостями рассмотрен в [47], а решетки — в [48]. Цилиндр между параллельными плоскостями рассмотрен другим методом в [49], ряд таких цилиндров — в [50]; другие задачи с цилиндрами между параллельными плоскостями обсуждаются в [51].

Кроме того, используя соотношения (8.5) данной главы, получим

$$z=\frac{d}{\pi}\{t-\ln t+i\pi\}=\frac{d}{\pi}\{e^{\pi w}-\pi w+i\pi\}, \tag{9.23}$$

где d — расстояние между пластинами.

Модуль вектора потока в любой точке равен следующей величине:

$$K\left|\frac{dw}{dz}\right|=K\left|\frac{dw}{dt}\right|\Big/\left|\frac{dz}{dt}\right|=\frac{K}{d(t-1)}.$$

При $t\to 0$, т. е. близ точек на BC, он стремится к величине K/d, которая равна установившемуся потоку между двумя параллельными плоскостями. В точке D, $t=1$, поток бесконечно велик.

На линии CD (поскольку здесь $v=0$), имеем

$$z=\frac{d}{\pi}\{e^{\pi u}-\pi u+i\pi\}.$$

Далее, поскольку D является точкой $d(1+i\pi)/\pi$, величина u в точке D равна нулю. Ее значения в точках на CD и DE, удаленных от D на расстояние l, служат корнями уравнения

$$\frac{\pi l}{d}+1=e^{\pi u}-\pi u. \tag{9.24}$$

Отрицательный корень этого уравнения соответствует точке на нижней стороне CD (так как здесь $0<t<l$, см. рис. 52), а положительный корень — точке на верхней стороне DE.

Если l велико, отрицательный корень (9.24) приближенно равен

$$-\left(\frac{l}{d}+\frac{1}{\pi}\right),$$

и поэтому величина теплового потока (рассчитанная на длину l) через нижнюю сторону DC полосы запишется в виде

$$K\left(\frac{l}{d}+\frac{1}{\pi}\right). \tag{9.25}$$

Эта величина на K/π больше соответствующей величины потока между неограниченными плоскостями.

Для больших значений l положительный корень (9.24) приблизительно равен

$$\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi l}{d}+1\right).$$

Таким образом, тепловой поток на расстоянии l от точки D через верхнюю сторону DE равен

$$\frac{K}{\pi}\ln\left(\frac{\pi l}{d}+1\right). \tag{9.26}$$

V. *Тепловой поток в стенке, изогнутой под прямым углом* (см. рис. 56).

Пусть температура поверхности DEF равна нулю, а температура поверхности ABC равна единице. Тогда, как и ранее, положим, что

$$w=\frac{1}{\pi}\ln t. \tag{9.27}$$

При вершине E, $t=1$, мы имеем $u=0$. Будем искать тепловой поток (на единицу длины вдоль угла) на длине x стороны EF, отмеряемой

от угла E, принимая, что длина x велика. Для этого, воспользовавшись (8.8), (8.9) и (8.11) данной главы, получим значение t, соответствующее x, т. е.

$$x = -\frac{2h}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{k\beta}{h} + \frac{2k}{\pi}\ln(1+\beta) - \frac{k}{\pi}\ln(1-\beta^2), \tag{9.28}$$

где

$$\beta = \left(\frac{t-1}{t+a}\right)^{1/2}, \qquad 1-\beta^2 = \frac{1+a}{t+a}, \qquad a = \frac{k^2}{h^2}. \tag{9.29}$$

Теперь, если x велико, то t также велико, а β примерно равно единице. Полагая $\beta = 1$ в первых двух членах правой части соотношения (9.28) (напомним, что они малы сравнительно с x и $\ln(1-\beta^2)$) и используя (9.29), получим в качестве первого приближения

$$\ln\frac{1+a}{t+a} = -\frac{\pi x}{k} - \frac{2h}{k}\operatorname{arctg}\frac{k}{h} + 2\ln 2. \tag{9.30}$$

Так как t велико, мы можем заменить $\ln(t+a)$ на $\ln t$ (допуская при этом ошибку порядка a/t); тогда соотношение (9.30) приближенно дает

$$\ln t = \frac{\pi x}{k} + \frac{2h}{k}\operatorname{arctg}\frac{k}{h} + \ln\frac{k^2+h^2}{4h^2}. \tag{9.31}$$

Поскольку на EF $v=0$, то, согласно соотношению (9.27), $\pi u = \ln t$ и, следовательно, тепловой поток на длине x, отмеряемой от E через сторону EF, равен

$$K\left\{\frac{x}{k} + \frac{2h}{\pi k}\operatorname{arctg}\frac{k}{h} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{k^2+h^2}{4h^2}\right\}. \tag{9.32}$$

Первый член соответствует установившемуся потоку между плоскостями, находящимися на расстоянии k друг от друга. Прибавляя соответствующий член, для DE найдем, что *влияние прямоугольного изгиба заключается в увеличении теплового потока вдоль угла на величину*

$$K\left\{\frac{2h}{\pi k}\operatorname{arctg}\frac{k}{h} + \frac{2k}{\pi h}\operatorname{arctg}\frac{h}{k} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{k^2+h^2}{4hk}\right\}. \tag{9.33}$$

Если стенки имеют одинаковые толщины (т. е. $k=h$), то это выражение сводится к

$$K\left\{1 - \frac{2}{\pi}\ln 2\right\} = 0{,}559K. \tag{9.34}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gray, Mathews, Treatise on Bessel Functions, Macmillan, ed. 2, 1922. (Э. Грэй, Г. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, М., 1953.)
2. Lees, Phil. Trans. Roy. Soc. **A204**, 433 (1905).
3. Birch, Bull. Geol. Soc. Am. **61**, 567—630 (1950).
4. Jeffreys, Mon. Not. R. Astr. Soc. Geophys. Suppl. **4**, 309—312 (1940).
5. Bullard, Mon. Not. R. Astr. Soc. Geophys. Suppl. **4**, 360—362 (1940).
6. Volterra, Nuovo Cim. **4**, 111—126 (1912).
7. Thoma, Diss. Karlsruhe, 1906.
8. Andreae, Ann. Ponts et Chaussées **128**, 37 (1958).
9. Lees, Proc. Roy. Soc. **A83**, 339—346 (1910).
10. Livens, Theory of Electricity, ed. 1, 1918.
11. Lamé, Liouvillés J. **2** (1837).
12. Maxwell, Electricity and Magnetism, ed. 2.
13. Besant, Ramsey, Hydrodynamics, ed. 2, 1920.
14. Rayleigh, Phil. Mag. **34**, 481—502 (1892).
15. De Vries, The thermal conductivity of granular materials, Inst. International du Froid, Paris.

16. Sbrana, Bossalasco, Geofis. Pura é Appl. **23**, 3—8 (1952).
17. Rudenberg, Elektrotech. Z. **46**, 1342 (1925).
18. Langmuir, Adams, Meikle, Trans. Am. Electrochem. Soc. **24**, 53 (1913).
19. McAdams, Heat Transmission, ed. 2, 1942. (В. Мак-Адамс, Теплопередача, ОНТИ, перев. с 1-го изд.)
20. Mathieu, Cours de physique mathématique.
21. Kober, Dictionary of Conformal Representations, Dover, 1952.
22. Carslaw, Fourier's Series and Integrals, Macmillan, ed. 3, 1930.
23. Christoffel, Sul problema delle temperature stazionarie, Ann. Mat. Pura é Appl. **1**, 89 (1867).
24. Schwarz, Crelle **70**, 105 (1869).
25. Bateman, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, § 4.62.
26. Carter, J. Inst. Elect. Engrs **64**, 1115 (1926).
27. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism, Chap. III.
28. Moulton, Proc. Lond. Math. Soc. **3**, 104 (1905).
29. Bowman, Proc. Lond. Math. Soc. **39**, 211 (1935); **41**, 271 (1936).
30. Love. Proc. Lond. Math. Soc. **22**, 337 (1924).
31. Davy, Phil. Mag. **35**, 819 (1944); **36**, 153 (1945).
32. Bowman, Introduction to Elliptic Functions, London, 1953.
33. Cockroft, J. Inst. Elect. Engrs **66**, 385 (1928).
34. Page, Proc. Lond. Math. Soc. **11**, 314 (1912).
35. Richmond, Proc. Lond. Math. Soc. **22**, 483 (1924).
36. Lees, Phil. Mag. **16**, 734 (1908).
37. Castoldi, Geofis. Pura é Appl. **23**, 27 (1952).
38. Lees, Proc. Phys. Soc. **23**, 361 (1911).
39. Schofield, Phil. Mag. **6**, 567 (1928).
40. Awbery, Phil. Mag. **7**, 1143 (1929).
41. Lees, Proc. Roy. Soc. **A91**, 440 (1915).
42. Langton, Davy, Brit. J. Appl. Phys. **5**, 405 (1954).
43. Jeans, Electricity and Magnetism, Cambridge, ed. 5, 1925.
44. Melsom, Booth, J. Inst. Elect. Engrs **52**, 779 (1915).
45. Чарный, ДАН **48**, 27 (1945).
46. Schofield, Phil. Mag. **31**, 471 (1941).
47. Schofield, Phil. Mag. **12**, 329 (1931).
48. Richmond, Proc. Lond. Math. Soc. **22**, 389 (1924).
49. Knight, Proc. Lond. Math. Soc. **39**, 272 (1935).
50. Knight, McMullen, Phil. Mag. **24**, 35 (1937).
51. Howland, McMullen, Proc. Cambr. Phil. Soc. **32**, 402 (1936).

ГЛАВА XVII
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Введение

Классический метод решения задач теплопроводности заключается в нахождении решения в виде ряда частных решений дифференциального уравнения и некоторых граничных условий, причем коэффициенты ряда определяются из теории рядов Фурье или аналогичных им рядов. Этот метод вполне пригоден для задач с ограниченными областями. Однако при рассмотрении неограниченных областей соответствующий метод с использованием интегралов Фурье следует считать чисто формальным вследствие трудностей, связанных со сходимостью. (Весьма важные функции, например единица, не имеют преобразования Фурье.) Тем не менее эта формальная теория действительно дает правильные результаты, которые могут быть проверены a posteriori; ее можно сделать строгой путем обобщения [1] теории преобразования Фурье на комплексную плоскость. Кроме того, все чаще используется не интеграл Фурье, а эквивалентный метод преобразования Фурье (см. § 3 гл. II).

За последние три десятилетия метод преобразования Лапласа был значительно усовершенствован. При его применении к одномерным задачам этот метод обладает следующими преимуществами перед более старыми методами Фурье: 1) он дает стандартную методику, применяемую ко всем задачам одинаковым образом; 2) он применим ко всем граничным условиям и не зависит от последних, что устраняет необходимость разработки новой теории для каждого типа граничных условий; 3) он позволяет доказать очень много простых теорем, например теоремы, приведенные в § 2 гл. XII, которые можно использовать для получения новых результатов и новых преобразований, и 4) в большинстве случаев трудности, связанные со сходимостью, не возникают, и решение простых частных задач (например, задачи с постоянной начальной температурой и постоянной температурой поверхности) обычно можно считать совершенно строгим. В случае двумерных и трехмерных задач положение не столь удовлетворительно, и в методе, используемом в данной книге, после исключения времени с помощью преобразования Лапласа мы всегда вынуждены применять классические методы Фурье.

За последнее время для решения таких задач разработана теория некоторых других интегральных преобразований *), позволяющая рассматривать все переменные с единой точки зрения. Подобный подход в значительной степени обладает упомянутым выше преимуществом (1) преобразования Лапласа, т. е. тем, что использование стандартной методики, применимой ко всем случаям, позволяет избежать необходимости отыскивать частные

*) Этот вопрос кратко и достаточно хорошо изложен в [2].

решения, что облегчает проведение конкретных расчетов. С другой стороны, эти преобразования не обладают изложенными выше преимуществами (2)—(4). С их помощью нельзя рассмотреть все граничные условия с единой точки зрения, и каждая область и граничное условие требуют разработки нового преобразования и новой теории. Обычно для них нет таких хороших таблиц, какие имеются для преобразования Лапласа, а их теория оказывается очень сложной. Что касается интегральных теорем, то здесь обычно возникают серьезные трудности, связанные со сходимостью, и большая часть вычислений является чисто формальной. Наконец, следует подчеркнуть, что в настоящее время теория интегральных преобразований применима лишь в некоторых частных случаях, и поэтому она оказывается не более эффективной, чем преобразование Лапласа.

Итак, если можно решить задачи теплопроводности с одной координатой путем преобразования по этой координате, то наиболее мощным и наиболее подходящим методом следует считать преобразование Лапласа по времени. Вместе с тем при решении задач с установившимся тепловым потоком нас привлекает стройность методов интегральных преобразований. Они, по-видимому, должны стать весьма важными и для задач с несколькими координатами, причем последовательные преобразования (в том числе, вероятно, преобразования Лапласа) можно провести очень изящно.

Ниже приводится краткое описание некоторых простейших интегральных преобразований с тем, чтобы указать, какого типа анализ при этом используется, и дать возможность провести сравнение с классическими методами Фурье, применявшимися в настоящей книге.

§ 2. Интегральные преобразования и формулы их обращения

В данном параграфе и в следующих v является функцией x или r, ее преобразование обозначается прописной буквой V, а вид преобразования — либо индексом, либо новой переменной w, s или σ. Во всех случаях мы примем (без объяснения), что рассматриваемые интегралы существуют; кроме того, если потребуется, мы допустим, что функции и их производные стремятся к нулю при стремлении переменного к бесконечности.

I. *Преобразование Фурье в комплексной форме* *).

Обозначим через $F[v(x)]$ операцию преобразования функции по Фурье в комплексной форме, которое определяется соотношением

$$F[v(x)] \equiv V(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} v(x)\, dx. \tag{2.1}$$

Согласно выражению (3.7) гл. II формула обращения имеет вид

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} V(\omega)\, d\omega. \tag{2.2}$$

*) Большая таблица преобразований по Фурье приведена в [3]. Точная математическая теория, а также многочисленные приложения изложены в [1]. Много практических приложений можно найти в [4] (гл. V посвящена задачам теплопроводности). У Титчмарша и Снеддона [1, 4] рассматриваются и другие интегральные преобразования, изложенные в этом параграфе. Следует отметить, что не существует таблиц этих преобразований, которые по своей полезности равнялись бы таблице Кэмпбелла и Фостера [3] или каким-либо опубликованным таблицам преобразования Лапласа. Наиболее полной из вышедших в последнее время таблиц интегральных преобразований служит таблица, приведенная в [5].

Интегрируя по частям, получим

$$F\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]=-i\omega V(\omega), \tag{2.3}$$

$$F\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=-\omega^2 V(\omega) \tag{2.4}$$

при условии, что $v(x)$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ стремятся к нулю при $x\to\pm\infty$.

II. *Преобразование Фурье по синусам.*

Обозначим через $F_s[v(x)]$ операцию преобразования функции по синусам, а через $V_s(\omega)$ — ее значения; это преобразование определяется следующим образом:

$$F_s[v(x)]\equiv V_s(\omega)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty v(x)\sin\omega x\,dx; \tag{2.5}$$

формула обращения, согласно соотношению (3.10) гл. II, имеет вид

$$v(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty V(\omega)\sin\omega x\,d\omega. \tag{2.6}$$

Кроме того, если при $x\to\infty$ как $v(x)$, так и $\frac{\partial v}{\partial x}$ стремятся к нулю, то, интегрируя по частям, получаем

$$F_s\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]=-\omega V_c(\omega), \tag{2.7}$$

$$F_s\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=-\omega^2 V_s(\omega)+\omega\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}v(0), \tag{2.8}$$

где $V_c(\omega)$ определяется ниже (см. соотношение (2.9) данной главы).

III. *Преобразование Фурье по косинусам.*

Обозначим через $F_c[v(x)]$ операцию преобразования функции по косинусам, а через $V_c(\omega)$ — ее значения; тогда

$$F_c[v(x)]\equiv V_c(\omega)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty v(x)\cos\omega x\,dx, \tag{2.9}$$

и, согласно соотношению (3.13) гл. II, формула обращения имеет вид

$$v(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty V_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega. \tag{2.10}$$

Помимо этого, если при $x\to\infty$ как $v(x)$, так и $\frac{\partial v}{\partial x}$ стремятся к нулю, то

$$F_c\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]=\omega V_s(\omega)-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}v(0), \tag{2.11}$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=-\omega^2 V_c(\omega)-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0}. \tag{2.12}$$

IV. *Преобразование Ганкеля.*

Преобразование Ганкеля порядка $\nu > -1/2$ от функции $V(r)$ обозначается через $H_\nu[v(r)]$ или $V_\nu(\sigma)$; оно определяется соотношением

$$H_\nu[v(r)] \equiv V_\nu(\sigma) = \int_0^\infty rJ_\nu(\sigma r)\, v(r)\, dr; \tag{2.13}$$

формула обращения *) для него имеет вид

$$v(r) = \int_0^\infty \sigma J_\nu(\sigma r)\, V_\nu(\sigma)\, d\sigma. \tag{2.14}$$

Далее, двойное интегрирование по частям и использование формулы (2) (см. приложение 3) дает

$$H_\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{\nu^2 v}{r^2}\right] = -\sigma^2 V_\nu(\sigma) \tag{2.15}$$

при условии, что $rvJ_\nu'(\sigma r)$ и $rJ_\nu(\sigma r)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)$ стремятся к нулю, когда $r \to 0$ и $r \to \infty$.

V. *Преобразование Меллина.*

Преобразование Меллина от функции $v(r)$ обозначается через $M[v(r)]$ или $V_m(s)$; оно определяется выражением

$$M[v(r)] \equiv V_m(s) = \int_0^\infty r^{s-1} v(r)\, dr; \tag{2.16}$$

формула сбращения для него имеет вид [1] **)

$$v(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} V_m(s)\, r^{-s}\, ds. \tag{2.17}$$

Интегрируя по частям, получим

$$M\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right] = s^2 V_m(s) \tag{2.18}$$

при условии, что $r^s v$ и $r^{s+1}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)$ стремятся к нулю, когда $r \to 0$ и $r \to \infty$.

§ 3. Неустановившийся тепловой поток

Этот случай можно проиллюстрировать рядом типичных задач.

I. *Область* ***) $-\infty < x < \infty$ *с начальной температурой* $f(x)$.

Ищем решения уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{3.1}$$

в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$. Согласно (2.4) данной главы для уравнения (3.1) преобразование Фурье в комплексной форме имеет вид

$$\frac{dV(\omega)}{dt} + \varkappa\omega^2 V(\omega) = 0, \qquad t > 0,$$

*) Это и есть интегральная теорема Ганкеля [6, 7].

**) Этот результат связан с формулами обращения для преобразований Фурье и Лапласа; его часто называют «теоремой Фурье — Меллина».

***) То есть неограниченное пространственное тело; распределение температуры зависит от одной координаты x. (*Прим. ред.*)

где $V(\omega)=F(\omega)$, когда $t=0$. Отсюда следует, что

$$V(\omega)=F(\omega)\,e^{-\varkappa\omega^2 t}$$

и, воспользовавшись формулой обращения (2.2) данной главы, получим

$$v=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega x-\varkappa\omega^2 t)\,F(\omega)\,d\omega,$$

что точно соответствует решению (3.17) гл. II.

II. *Область $x>0$ с нулевой начальной температурой. При $t>0$ плоскость $x=0$ имеет температуру $v=v_0$.*

Здесь следует решать дифференциальное уравнение (3.1) в области $x>0$. Отметим, что из преобразованных по синусам и косинусам функций (обе они пригодны для области $x>0$) первая вводит в соотношение (2.8) предыдущего параграфа температуру v_0, а вторая — неизвестное значение $\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0}$ в соотношение (2.12). Поэтому мы воспользуемся преобразованием по синусам; применив его к уравнению (3.1), получим

$$\frac{dV_s}{dt}+\varkappa\omega^2 V_s=\varkappa\omega v_0\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}.$$

Это уравнение нужно решать при условии $V_s=0$ при $t=0$. Отсюда следует, что

$$V_s=\frac{v_0 2^{1/2}}{\omega\pi^{1/2}}\left(1-e^{-\varkappa\omega^2 t}\right).$$

Воспользовавшись формулой обращения (см. (2.6) данной главы), получим решение

$$v=\frac{2v_0}{\pi}\int_0^{\infty}\left(1-e^{-\varkappa\omega^2 t}\right)\sin\omega x\,\frac{d\omega}{\omega}; \tag{3.2}$$

после некоторых вычислений это соотношение приводится к обычному результату $v_0\Phi^*\left[x/2(\varkappa t)^{1/2}\right]$.

Рассмотренная выше задача очень хорошо иллюстрирует сходство между методами преобразований Фурье и Лапласа в одномерных задачах подобного типа. Во-первых, если в нашем распоряжении имеются соответствующие таблицы преобразованных функций, то работа, которую необходимо проделать при расчетах по одному и другому методу, одинакова. Во-вторых, если таблиц преобразованных функций нет, то в любом случае необходимо провести определенное количество расчетов с интегралами, полученными из формулы обращения. Существенное преимущество преобразования Лапласа для задач этого типа проявляется в связи с граничными условиями, поскольку в нем рассматриваются одинаковым образом все граничные условия. Однако ранее было необходимо использовать преобразование по синусам, так как при $x=0$ была задана температура тела v; если бы был задан тепловой поток на граничной поверхности, следовало бы использовать преобразование по косинусам; в случае граничного условия третьего ряда ни одно из этих преобразований не подходит и следует разработать преобразование нового типа; в случае граничного условия типа Е, приведенного в § 9 гл. I, потребуется уже другое преобразование и т. д.

III. *Неограниченная область $r>0$, $-\infty<z<\infty$, $0<\theta<2\pi$. Начальная температура $f(r)$ зависит только от r.*

В этом случае следует решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t}=0 \tag{3.3}$$

при условии, что $v=f(r)$, когда $t=0$. Согласно (2.15) данной главы для уравнения (3.3) преобразование Ганкеля нулевого порядка имеет вид

$$\frac{dV_0(\sigma)}{dt}+\varkappa\sigma^2 V_0(\sigma)=0; \tag{3.4}$$

его следует решать при условии, что $V_0(\sigma)=F_0(\sigma)$, когда $t=0$. Отсюда находим

$$V_0(\sigma)=e^{-\varkappa\sigma^2 t}F_0(\sigma).$$

Воспользовавшись формулой обращения (2.14), получим

$$v(r)=\int_0^\infty e^{-\varkappa\sigma^2 t}F_0(\sigma)\,\sigma J_0(\sigma r)\,d\sigma;$$

вычислив этот интеграл, получим решение (3.11) гл. X.

§ 4. Установившийся тепловой поток

Вероятно, самое важное свойство перечисленных в § 2 преобразований заключается в том, что во многих важных частных случаях они сводят уравнение Лапласа с двумя переменными к обыкновенному дифференциальному уравнению. Поэтому, если мы имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \tag{4.1}$$

то применение комплексного преобразования Фурье по x дает

$$\frac{d^2 V}{dy^2}-\omega^2 V=0. \tag{4.2}$$

То же уравнение получается в результате применения к (4.1) преобразований по синусам и косинусам.

Используя преобразования Ганкеля нулевого порядка к уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0, \tag{4.3}$$

получаем

$$\frac{d^2 V_0}{dz^2}-\sigma^2 V_0=0. \tag{4.4}$$

Применение преобразования Меллина к уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0 \tag{4.5}$$

дает

$$\frac{d^2 V_m}{d\theta^2}+s^2 V_m=0. \tag{4.6}$$

В качестве примеров рассмотрим следующие задачи.

I. *Область* $z>0$, $0\leqslant r<\infty$, *с постоянным потоком* Q *через поверхность* $0\leqslant r<a$, $z=0$ *и нулевым потоком при* $r>a$, $z=0$.

Следует решить уравнение (4.3) с граничными условиями

$$-K\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]_{z=0}=\begin{Bmatrix} Q, & 0\leqslant r<a \\ 0, & r>a \end{Bmatrix}. \qquad (4.7)$$

Применим к уравнению (4.3) преобразование Ганкеля нулевого порядка. При этом V_0 должо удовлетворять уравнению (4.4) и стремиться к нулю при $z\to\infty$; граничным условием для этого уравнения при $z=0$ служит преобразование Ганкеля условия (4.7), т. е. соотношение

$$-K\left[\frac{dV_0}{dz}\right]_{z=0}=Q\int_0^a rJ_0(\sigma r)\,dr=\frac{aQ}{\sigma}J_1(\sigma a).$$

Отсюда следует, что

$$V_0=\left(\frac{aQ}{K\sigma^2}\right)J_1(\sigma a)\,e^{-\sigma z}.$$

Теперь, воспользовавшись формулой обращения (2.14) данной главы, получим

$$v=\frac{aQ}{K}\int_0^\infty e^{-\sigma z}J_0(\sigma r)\,J_1(\sigma a)\frac{d\sigma}{\sigma}, \qquad (4.8)$$

что соответствует решению (2.7) гл. VIII.

Решения, приведенные в § 2 гл. VIII, были получены при помощи интегралов (2.3) и (2.4) той же главы с тем, чтобы привлечь внимание к простому, но важному методу; если же воспользоваться интегральной формулой Ганкеля в классическом виде, то требуемый анализ оказался бы аналогичным изложенному выше.

II. *Клин* — $\alpha<\theta<\alpha$, $r>0$ *при условии*, что $v=1$ *в области* $0<r<a$ *и* $v=0$ *в области* $r>0$ *при* $\theta=\pm\alpha$.

Следует решить уравнение (4.5) при заданных граничных условиях. Если воспользоваться преобразованием Меллина, то V_m должно удовлетворять уравнению (4.6) при условии, что $V_m=\int_0^a r^{s-1}\,dr=a^s/s$, когда $\theta=\pm\alpha$.

Отсюда следует, что

$$V_m=\frac{a^s\cos s\theta}{s\cos s\alpha}.$$

Тогда применение формулы обращения (2.17) данной главы дает

$$v=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{a^s r^{-s}\cos s\theta\,ds}{s\cos s\alpha}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\left[\zeta\ln\left(\frac{a}{r}\right)\right]\operatorname{ch}\zeta\theta\,d\zeta}{\zeta\operatorname{ch}\zeta}.$$

§ 5. Конечные преобразования

Аналогичным методом можно воспользоваться для представления *) рядов Фурье и аналогичных им рядов через преобразованные функции. Для согласования с предыдущими результатами возьмем промежуток $0<x<l$, хотя чаще применяется промежуток $0<x<\pi$.

Обозначим через $f_s[v(x)]$ операцию конечного преобразовения функции по синусам, а через $V_s(n)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, — значение преобразованной функции; тогда

*) О конечных преобразованиях по Фурье см. [8—14]. О конечном преобразовании Ганкеля см. [15].

по определению

$$f_s[v(x)] \equiv V_s(n) = \int_0^l v(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{5.1}$$

Формула обращения, которая является рядом Фурье по синусам, имеет вид

$$v(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} V_s(n) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{5.2}$$

Интегрируя по частям, получим

$$f_s\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] = \frac{n\pi}{l}\{v(0) - (-1)^n v(l)\} - \frac{n^2\pi^2}{l^2} V_s(n). \tag{5.3}$$

Аналогичным образом обозначим операцию конечного преобразования функции по косинусам через $f_c[v(x)]$, а через $V_c(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, — значение преобразованной функции; тогда

$$f_c[v(x)] \equiv V_c(n) = \int_0^l v(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \tag{5.4}$$

а формула обращения принимает вид

$$v(x) = \frac{1}{l} V_s(0) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} V_c(n) \cos \frac{n\pi x}{l}. \tag{5.5}$$

Кроме того,

$$f_c\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] = (-1)^n \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=l} - \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0} - \frac{n^2\pi^2}{l^2} V_c(n). \tag{5.6}$$

Из соотношения (5.3) следует, что преобразование по синусам оказывается полезным для решения задач с заданной граничной температурой, а из соотношения (5.6) вытекает, что преобразование по косинусам пригодно для решения задач с заданным тепловым потоком. Для граничного условия третьего рода следует применять новый тип преобразования, основанный на разложении, приведенном в § 9 гл. III. Аналогичным образом для радиального теплового потока в областях $0 < r < a$ и $a < r < b$ могут быть определены конечные преобразования по Ганкелю, однако для граничного условия третьего рода необходимо применять другое преобразование.

I. *Пластина $0 < x < l$ с нулевой начальной температурой; при $t > 0$ поверхности $x = 0$ и $x = l$ поддерживаются при температуре, равной единице.*

Поскольку в данной задаче рассматривается температура граничных поверхностей, применим преобразование по синусам к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad 0 < x < l,$$

которое, согласно (5.3), примет вид

$$\frac{n\pi}{l}[1 - (-1)^n] - \frac{n^2\pi^2}{l^2} V_s(n) - \frac{1}{\varkappa}\frac{dV_s(n)}{dt} = 0;$$

его следует решать при условии, что $V_s = 0$, когда $t = 0$. Искомое решение имеет вид

$$V_s(n) = \frac{l[1 - (-1)^n]}{n\pi}\left\{1 - \exp\left[-\frac{\varkappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right]\right\}.$$

Следовательно, воспользовавшись (5.2), получим решение

$$v = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{\varkappa(2m+1)^2\pi^2 t}{l^2}\right)\right]}{(2m+1)} \sin\frac{(2m+1)\pi x}{l},$$

которое сводится к соотношению (4.1) гл. III. (Для получения этого соотношения нужно воспользоваться разложением единицы в ряд по синусам.)

II. *Установившийся поток в теле прямоугольного сечения* $0 < x < a$, $0 < y < b$. *Граничная поверхность* $y = 0$ *поддерживается при температуре* $u(x)$, *другие поверхности — при нулевой температуре.*

Применяя синус-преобразование Фурье по переменной x, получим уравнение

$$\frac{d^2 V_s}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} V_s = 0,$$

которое следует решать при условии, что $V_s = U_s$, когда $y = 0$ и $V_s = 0$, когда $y = b$. Искомое решение имеет вид

$$V_s = U_s \frac{\operatorname{sh} n\pi (b - y)/a}{\operatorname{sh} n\pi b/a}.$$

В таком случае, воспользовавшись (5.2), получим

$$v = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} U_s(n) \frac{\operatorname{sh} n\pi (b - y)/a}{\operatorname{sh} n\pi b/a} \sin \frac{n\pi x}{a} =$$

$$= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n\pi (b - y)/a}{\operatorname{sh} n\pi b/a} \sin \frac{n\pi x}{a} \int_0^a u(x') \sin \frac{n\pi x'}{a} dx',$$

что соответствует решению (3.9) гл. V.

§ 6. Последовательные преобразования

В задачах с несколькими переменными можно достичь большой экономии в используемых обозначениях путем последовательного применения интегральных преобразований относительно этих переменных. Можно либо сначала использовать преобразование Лапласа по времени с последующим применением других интегральных преобразований относительно координат, либо использовать последовательные интегральные преобразования относительно координат *).

Чтобы проиллюстрировать этот метод, рассмотрим уже решенную задачу VIII § 11 гл. XV, которая использована в качестве примера в работе [18], а именно *задачу о теплопроводности в клине* $r > 0$, $0 < \theta < \theta_0$ *с начальной температурой, равной нулю, и температурой поверхности, равной единице.*

Здесь следует решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < \theta_0, \tag{6.1}$$

при условиях

$$v = 0, \quad t = 0, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < \theta_0, \tag{6.2}$$

$$v = 1, \quad \theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta = \theta_0, \quad t > 0. \tag{6.3}$$

Обозначим через V_s конечное синус-преобразование функции v относительно θ; тогда, согласно соотношению (5.3) данной главы, V_s удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_s}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} V_s - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial V_s}{\partial t} = -\frac{\nu[1 - (-1)^n]}{r^2}, \tag{6.4}$$

где

$$\nu = n\pi/\theta_0. \tag{6.5}$$

Обозначим через $V_{s,\nu}$ преобразование Ганкеля порядка ν функции V_s; тогда, согласно (2.15) этой главы, $V_{s,\nu}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{dV_{s,\nu}}{dt} + \sigma^2 V_{s,\nu} = \nu[1 - (-1)^n] \int_0^{\infty} \frac{J_\nu(\sigma r)\, dr}{r} = [1 - (-1)^n], \tag{6.6}$$

*) Несколько примеров использования последовательных преобразований приведено в статьях [16, 17].

поскольку [6]

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(z)}{z}\,dz = \frac{1}{\nu}. \tag{6.7}$$

Решение уравнения (6.6) при условии $V_{s,\nu} = 0$, когда $t = 0$, имеет вид

$$V_{s,\nu} = \frac{[1-(-1)^n]}{\sigma^2}\left\{1 - e^{-\varkappa\sigma^2 t}\right\}. \tag{6.8}$$

Обращая с помощью (2.14) преобразованную по Ганкелю функцию и используя (6.5) и (6.7), находим

$$V_s = \frac{\theta_0[1-(-1)^n]}{n\pi} - [1-(-1)^n]\int_0^\infty \frac{1}{\sigma} e^{-\varkappa\sigma^2 t} J_\nu(\sigma r)\,d\sigma. \tag{6.9}$$

Наконец, производя с помощью (5.2) обращение конечного синус-преобразования, получим

$$v = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{[1-(-1)^n]}{n}\sin\frac{n\pi\theta}{\theta_0} - \frac{2}{\theta_0}\sum_{n=1}^\infty [1-(-1)^n]\sin\frac{n\pi\theta}{\theta_0}\int_0^\infty \frac{1}{\sigma} e^{-\varkappa\sigma^2 t} J_r(\sigma r)\,d\sigma =$$

$$= 1 - \frac{4}{\theta_0}\sum_{n=0}^\infty \sin\frac{(2n+1)\pi\theta}{\theta_0}\int_0^\infty \frac{1}{\sigma} e^{-\varkappa\sigma^2 t} J_{(2n+1)\pi/\theta_0}(\sigma r)\,d\sigma. \tag{6.10}$$

Мы пришли к решению (11.24) гл. XV. Интересно сравнить оба метода. В обоих случаях время, затрачиваемое на вычисления, примерно одинаково. Оба метода требуют знания интеграла (6.7). Однако если в методе, изложенном в § 11 гл. XV, предполагается, что для $\bar{v}$ решение имеет вид (11.21) той же главы, то изложенный здесь метод применяется непосредственно без каких-либо предположений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Titchmarsh, Theory of Fourier Integrals, Oxford, 1937. (Э. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М., 1948.)
2. Tranter, Integral Transforms in Mathematical Physics, Methuen, 1951. (К. Трантер, Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, М., 1956.)
3. Campbell, Foster, Fourier Integrals for Practical Applications, Bell Telephone System Monograph B-584, 1931.
4. Sneddon, Fourier Transforms, McGraw-Hill, 1951. (И. Снеддон, Преобразования Фурье, ИЛ, М., 1955.)
5. Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Iricomi, Tables of integral Transforms, McGraw-Hill, 1954.
6. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions. (Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.)
7. Gray, Mathews, Treatise on Bessel Functions, Macmillan, ed. 2, 1922 (Э. Грэй, Г. Мэтьюз, Функции Бесселя и их применение в физике и механике, ИЛ, М., 1953.)
8. Kniess, Math. Z. **44**, 266—291 (1939).
9. Brown, Bull. Am. Math. Soc. **48**, 522 (1942); **50**, 376 (1944).
10. Brown, J. Appl. Phys. **14**, 609 (1943).
11. Koschmieder, Dtsch. Math. **5**, 521—545 (1945).
12. Roettinger, Quart. Appl. Math. **5**, 298—319 (1947).
13. Jacobson, Bull. Am. Math. Soc. **55**, 804—809 (1949).
14. Jacobson, Quart. Appl. Math. **7**, 293—302 (1949).
15. Sneddon, Phil. Mag. **37**, 17—25 (1946).
16. Delavault, C. R. Acad. Sci. **236**, 2484—2486 (1953); **237**, 1067—1068 (1953).
17. Sneddon, Proc. Glasgow Math. Ass. **1**, 21—27 (1952).
18. Cooke, Am. Math. Mon. **62**, 331—334 (1955).

ГЛАВА XVIII

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Введение

В последние годы много внимания уделялось разработке численных методов решения задач теплопроводности. Это обусловлено отчасти растущим интересом к численному анализу, а отчасти — возможностью решения важных практических задач при помощи электронных и других вычислительных машин.

Из предыдущих глав следует, что точные решения практически имеются лишь для линейных задач, в которых рассматриваются области простейшей формы. Для исследования тел сложной формы или нелинейных граничных условий приходится обращаться к численным методам *). Здесь, конечно, нельзя дать что-либо, похожее на полное изложение, однако желательно привести обзор состояния вопроса и указать удобные методы решения встречающихся задач. Ученые, использующие точные решения, часто достигают в своей работе стадии, на которой желательно проверить пригодность сделанных допущений (например, линеаризации) или решить простые задачи, для которых точные решения отсутствуют. В самом деле, использование простых численных методов (например, методов, описанных в § 3 данной главы) представляется очень простым делом, поскольку они не требуют изучения численного анализа. Поэтому наибольшее место в настоящей главе отведено простейшим методам последовательных приближений. Поскольку такие методы применяются при расчетах на машине, именно они лучше всего изучены теоретически. Наконец, следует указать, что, хотя в теории конечных разностей описанные в настоящей главе методы оказываются наиболее очевидными, их никак нельзя считать единственными **).

§ 2. Конечные разности ***)

Предположим, что нам известны значения v_m функции $v(x)$ при значениях аргумента $x = m\varepsilon$, $m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ В таком случае *первая, вторая, третья, ... последующие* (*forward*) разности Δv_m, $\Delta^2 v_m$,

*) Полное изложение этого вопроса, произведенное с практических позиций, дано в [1]. Более краткие изложения можно найти в большинстве работ по теплопередаче, а также в [2]. Методы, используемые при решении задач с переменной температуропроводностью, описаны в [3].

**) Например, в работе Кинга [4] используются методы Монте-Карло. Интересный метод, в котором применяются ступенчатые значения v, разработан Филипом [5]. В книге Кранка [3] описаны другие методы, используемые при переменной температуропроводности.

***) Теория конечных разностей изложена в [6, 7]. Классическими работами по применению разностей к решению уравнений в частных производных считаются работы Ричардсона [8]. Следует отметить, что, хотя знание основ теории конечных разностей очень желательно, в данном случае оно не обязательно, поскольку необходимые результаты (например, (3.4) данной главы) можно получить непосредственно из теоремы Тейлора. (См. также А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Физматгиз, 1959.)

$\Delta^3 v_m$, ... функции v_m определяются соотношениями

$$\Delta v_m = v_{m+1} - v_m, \tag{2.1}$$

$$\Delta^2 v_m = \Delta v_{m+1} - \Delta v_m = v_{m+2} - 2v_{m+1} + v_m, \tag{2.2}$$

$$\Delta^3 v_m = \Delta^2 v_{m+1} - \Delta^2 v_m = v_{m+3} - 3v_{m+2} + 3v_{m+1} - v_m \tag{2.3}$$

и т. д. Они называются «последующими» разностями потому, что содержат значения v_m, v_{m+1}, ... с возрастающими индексами m. Аналогичным образом можно определить и *предыдущие* (*backward*) разности (т. е. разности с убывающими индексами m), но здесь они нам не потребуются. Однако ясно, что иногда удобно пользоваться системой обозначений, содержащей точки, симметричные относительно m. Для этого вводится система обозначений *центральных* разностей. Первая, вторая, ... центральные разности определяются следующим образом:

$$\delta^1 v_{m+\frac{1}{2}} = \Delta v_m = v_{m+1} - v_m, \tag{2.4}$$

$$\delta^2 v_m = \delta^1 v_{m+\frac{1}{2}} - \delta^1 v_{m-\frac{1}{2}} = \Delta v_m - \Delta v_{m-1} = v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1} \tag{2.5}$$

и т. д. Можно видеть, что в разности нечетного порядка, как и в (2.4), входят точки, распределенные симметрично относительно $m + \frac{1}{2}$, а не относительно m. Для получения формулы, симметричной относительно m, вводятся так называемые *средние* разности, определяемые соотношениями

$$\mu\delta^1 v_m = \frac{1}{2}\left\{\delta^1 v_{m+\frac{1}{2}} + \delta^1 v_{m-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{1}{2}(v_{m+1} - v_{m-1}), \tag{2.6}$$

$$\mu\delta^3 v_m = \frac{1}{2}\left\{\delta^3 v_{m+\frac{1}{2}} + \delta^3 v_{m-\frac{1}{2}}\right\}, \tag{2.7}$$

где μ указывает на операцию усреднения величин для $m \pm \frac{1}{2}$.

Вся теория теперь основывается на предположении, что известны величины ..., v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, ... и что составлена «таблица разностей» этих величин и их последовательных разностей (2.1), (2.2), ... В принципе в данном случае можно найти такой полином, например $P(x)$, что $P(n) = v_n$ в любом заданном числе точек (его коэффициенты можно выразить через v_m или их разности), и над этим полиномом выполняют любые операции, например интерполяцию, дифференцирование или интегрирование. Поэтому первая производная $[dv/dx]_m$ означает первую производную интерполируемого полинома в точке $m\varepsilon$. В этом смысле, если известны значения функции в точках $m\varepsilon$, то можно указать много формул, позволяющих выразить ее производные в любой точке или через ее табличные значения, или через их разности. Например,

$$\varepsilon\left[\frac{dv}{dx}\right]_m = \Delta v_m - \frac{1}{2}\Delta^2 v_m + \frac{1}{3}\Delta^3 v_m + \ldots, \tag{2.8}$$

или

$$\varepsilon\left[\frac{dv}{dx}\right]_m = \frac{1}{2}(-3v_m + 4v_{m+1} - v_{m+2}) + \frac{1}{3}\Delta^3 v_m + \ldots, \tag{2.9}$$

или

$$\varepsilon\left[\frac{dv}{dx}\right]_m = \mu\delta^1 v_m - \frac{1}{6}\mu\delta^3 v_m + \frac{1}{30}\mu\delta^5 v_m - \ldots, \tag{2.10}$$

или

$$\varepsilon\left[\frac{dv}{dx}\right]_m=\frac{1}{2}(v_{m+1}-v_{m-1})-\frac{1}{6}\mu\delta^3v_m+\ldots; \tag{2.11}$$

$$\varepsilon^2\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]_m=\Delta^2v_m-\Delta^3v_m+\ldots, \tag{2.12}$$

или

$$\varepsilon^2\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]_m=\delta^2v_m-\frac{1}{12}\delta^4v_m+\frac{1}{90}\delta^6v_m-\ldots, \tag{2.13}$$

или

$$\varepsilon^2\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]_m=(v_{m-1}-2v_m+v_{m+1})-\frac{1}{12}\delta^4v_m+\ldots \tag{2.14}$$

Доказательства этих результатов, а также ряда других можно найти в трудах, посвященных конечным разностям. В данном же случае, когда ε считается малой величиной, разности n-го порядка имеют порядок ε^n. Таким образом, пренебрежение n-й разностью дает ошибку порядка $O(\varepsilon^n)$. В приводимых ниже упрощенных расчетах разности более высоких порядков считаются пренебрежимо малыми и используются только первые члены в правых частях соотношений (2.8) — (2.14). Вносимая при этом погрешность будет зависеть от порядка первого пренебрегаемого члена; так, формулу (2.11), в которой опускают разности третьего и более высоких порядков и ошибка в определении dv/dx имеет порядок $O(\varepsilon^2)$, следует предпочесть формуле (2.8), в которой мы пренебрегаем уже разностью второго порядка, и поэтому ошибка в определении dv/dx имеет порядок $O(\varepsilon)$. При очень важных численных расчетах всегда сохраняют и используют разности более высоких порядков. При этом можно уменьшить время, требуемое для решения задачи, и повысить точность результатов, но это достигается за счет усложнения применяемого математического метода.

Приведем еще два результата, которые понадобятся нам при вычислениях в цилиндрических или сферических координатах. Пренебрежем разностями третьего и четвертого порядков; тогда из (2.11) и (2.14) следует, что при $m\neq 0$

$$\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}\right]_m=\frac{1}{\varepsilon^2}\{v_{m-1}-2v_m+v_{m+1}\}+\frac{1}{2m\varepsilon^2}(v_{m+1}-v_{m-1})=$$
$$=\frac{1}{2m\varepsilon^2}\{(2m-1)v_{m-1}-4mv_m+(2m+1)v_{m+1}\}. \tag{2.15}$$

Если $(dv/dx)=0$ при $x=0$, то

$$\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}\right]_0=\frac{4}{\varepsilon^2}(v_1-v_0). \tag{2.16}$$

Подобным же образом, если $m\neq 0$, то

$$\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dv}{dx}\right]_m=\frac{1}{m\varepsilon^2}\{(m-1)v_{m-1}-2v_m+(m+1)v_{m+1}\}; \tag{2.17}$$

если $(dv/dx)=0$ при $x=0$, то

$$\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dv}{dx}\right]_0=\frac{6}{\varepsilon^2}(v_1-v_0). \tag{2.18}$$

При рассмотрении функций двух или большего числа переменных можно совершенно аналогичным образом определить частные разности. Например, если $v(x, y)$ является функцией x и y и мы выбираем одинаковые интервалы ε по x и y, т. е. $v_{m,n}=v(m\varepsilon, n\varepsilon)$, то из соотношения (2.14)

следует, что

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]_{m,n} = \varepsilon^{-2}(v_{m-1,n} - 2v_{m,n} + v_{m+1,n}) + O(\varepsilon^2), \tag{2.19}$$

$$\left[\frac{\partial^2 v}{dy^2}\right]_{m,n} = \varepsilon^{-2}(v_{m,n-1} - 2v_{m,n} + v_{m,n+1}) + O(\varepsilon^2), \tag{2.20}$$

Отсюда мы получаем

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]_{m,n} = \varepsilon^2(v_{m-1,n} + v_{m+1,n} + v_{m,n-1} + v_{m,n+1} - 4v_{m,n}) + O(\varepsilon^2), \tag{2.21}$$

что потребуется нам при изучении уравнения Лапласа в плоской задаче.

§ 3. Линейный тепловой поток в неограниченном пространстве

Следует решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{3.1}$$

при условии, что при $t = 0$ температура v задана. Здесь $\varkappa$ может быть функцией v. В § 6 гл. I было показано, что в общем случае, когда K является функцией v, соответствующее уравнение можно привести к формуле (3.1) путем замены переменной.

Выберем теперь на оси x интервал ε и обозначим через $v_m(t)$ значения $v(x, t)$ в точке $x = m\varepsilon$, $m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Заменим *) в уравнении (3.1) $\partial^2 v/\partial x^2$ на конечную разность, используем (2.14) предыдущего параграфа и пренебрежем разностями высших порядков; тогда мы получим систему уравнений

$$v_{m+1}(t) - 2v_m(t) + v_{m-1}(t) - \frac{\varepsilon^2}{\varkappa}\frac{dv_m(t)}{dt} = 0, \tag{3.2}$$

которые следует решать при условии, что известны значения $v_m(0)$. Эта система в точности соответствует системе уравнений (10.2) гл. XV при $M_r c_r = \rho c \varepsilon$, $H_r = K/\varepsilon$, и (при постоянном $\varkappa$) ее можно решить при помощи методов, изложенных в § 10 гл. XV. Итак, теперь мы видим физический смысл сделанных приближений. Система (3.2) соответствует разделению твердого тела на пластины толщиной ε и замене их пластинами из идеального проводника той же теплоемкости. Термическое сопротивление **) между этими пластинами равно ε/K, т. е. совпадает с термическим сопротивлением пластины из исходного материала толщиной ε.

Если $\varkappa$ постоянно, то сравнение решений (3.2), получаемых методами, приведенными в § 10 гл. XV, с точными решениями позволяет изучить результаты приближения. В случае переменного $\varkappa$, а также нелинейных граничных условий система (3.2) решается при помощи дифференциального анализатора [13] ***). Проведенные исследования показали, что в ряде случаев хорошие результаты можно получить не только для малых значений ε; так, для пластины толщиной a хорошие результаты получаются при $\varepsilon = a/6$.

*) Производную по времени в уравнении (3.1) можно заменить конечной разностью. Тогда мы получим систему дифференциальных уравнений по x, которые можно решать последовательно [9].

**) То же допущение делается при изучении тепловых потоков на ряде вычислительных машин непрерывного действия. Наиболее совершенна резистивно-емкостная система, известная под названием «анализатора тепло- и массообмена» [10], при помощи которой к настоящему времени уже выполнено много работ (см. также [11, 12]).

***) В этой статье приведен обзор важнейших задач и методов их решения.

Для того чтобы описанный выше метод стал чисто численным, необходимо в системе (3.2) заменить производную по времени разностью. Для этого мы выбираем промежуток времени τ и обозначаем $v(m\varepsilon, n\tau)$ через $v_{m,n}$. Ни ε, ни τ пока не определены, и к их выбору мы вернемся позднее.

Здесь можно воспользоваться различными формулами для $\partial v/\partial t$; наиболее проста формула (2.8) данной главы, которая, если пренебречь разностью второго порядка, имеет вид

$$\left[\frac{\partial v_m}{\partial t}\right]_{t=n\tau} = \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau}. \tag{3.3}$$

Подставляя ее в систему (3.2), получим

$$v_{m,n+1} = M(v_{m+1,n} + v_{m-1,n}) - (2M-1)v_{m,n}, \tag{3.4}$$

где величину

$$M = \frac{\varkappa\tau}{\varepsilon^2} \tag{3.5}$$

иногда называют модулем *). Следует отметить, что в соотношении (3.4) значения v в момент времени $(n+1)\tau$ выражены через его значения в момент $n\tau$, что позволяет использовать это соотношение для дальнейших расчетов, исходя из известного значения при $t=0$. Поскольку в соотношении (3.3) мы пренебрегаем разностью третьего порядка, можно ожидать, что этот метод не очень точен. Однако он оказывается достаточно точным; практически он является самым простым из всех существующих методов, и мы здесь будем рассматривать только его.

Теперь следует рассмотреть величины ε и τ и оценить устойчивость метода. Конечно, ε до некоторой степени определяется уже самой задачей. Как отмечалось выше, в случае системы (3.2) для пластины толщиной a величина $\varepsilon = \frac{1}{6}a$ дает вполне хорошие результаты. В любом случае ε не слишком мало по сравнению с a. В формулах (3.4) и (3.5) ε и τ вместе входят в M; поэтому, чтобы получить решение через разумное число операций, желательно выбрать τ настолько большим, насколько это допустимо. Необходимость некоторого ограничения значения τ вытекает из следующих рассуждений **). Пусть при $t = n\tau$ максимальная ошибка для любого значения $v_{m,n}$ равна η; тогда, согласно (3.4), если $dv_{m,n+1}$ — малое изменение $v_{m,n+1}$, вызванное малым изменением $dv_{m,n}$ величины $v_{m,n}$, и если M постоянно, то

$$|dv_{m,n+1}| \leqslant M|dv_{m+1,n}| + M|dv_{m-1,n}| + |2M-1||dv_{m,n}|,$$

или

$$|dv_{m,n+1}| \leqslant \{2M + |2M-1|\}\eta. \tag{3.6}$$

Далее, если здесь применим описанный выше метод, то ошибка не должна возрастать ***), т. е. должно быть справедливым соотношение $|dv_{m,n+1}| \leqslant \eta$; тогда, согласно (3.6), нужно, чтобы было справедливым соотношение

$$M = \frac{\varkappa\tau}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

*) Часто рассматривают случай $\varkappa = 1$; величину τ/ε^2 называют характеристикой сети.

**) Этот вопрос обсуждается в статье [14], где рассматривается также влияние граничных условий на устойчивость метода.

***) Помимо случайных ошибок, в последние цифры используемых десятичных дробей входят ошибки округления.

Это и есть требуемое ограничение для τ, называемое обычно *условием устойчивости*. Ясно, что это условие достаточно, но отнюдь не необходимо. В настоящее время имеется много работ, основанных на решениях разностных уравнений, в которых очень тщательно разбирается вопрос об устойчивости *).

Другой простой метод исследования устойчивости и точности численных решений заключается в изучении случая $v_{0,0}=1$, $v_{m,0}=0$, $m \neq 0$. При этом мы либо исследуем распространение по системе единичной ошибки, либо рассматриваем функцию Грина, соответствующую выделению при $t=0$ в начале координат количества тепла $\varepsilon\rho c$. Согласно (3.4) гл. X точное решение для этого случая имеет вид

$$v_{m,n}=\frac{1}{2(\pi Mn)^{1/2}}e^{-m^2/4Mn}. \tag{3.8}$$

Для иллюстрации этого метода приведем часть таблички значений $v_{m,n}$, получающихся при рассмотрении указанного выше случая; величины M полагают равными 0,25, 0,5 и 0,6; во всех случаях приводят только числа, соответствующие $0 \leqslant m \leqslant 5$. Результаты, конечно, симметричны относительно $m=0$ **).

$M=0{,}25$

1	0	0	0	0	0
0,5	0,25	0	0	0	0
0,375	0,25	0,062	0	0	0
0,312	0,234	0,094	0,016	0	0
0,273	0,219	0,109	0,031	0,004	0
0,246	0,205	0,117	0.044	0,010	0,001
0,226	0,193	0,121	0,054	0,016	0,003
0,209	0,183	0,122	0,061	0,022	0,006
0,196	0,175	0,122	0,067	0,028	0,009
0,185	0,167	0,121	0,071	0,033	0,012
0,176	0,160	0,120	0,074	0,037	0,015

$M=0{,}5$

1	0	0	0	0	0
0	0,5	0	0	0	0
0,5	0	0,25	0	0	0
0	0,375	0	0,125	0	0
0,375	0	0,25	0	0,062	0
0	0,312	0	0,156	0	0,031

*) Этой проблеме посвящено много точных аналитических работ, причем исследовалось главным образом уравнение (3.4) с линейными граничными условиями. Следует подчеркнуть, что имеется несколько различных, но взаимосвязанных вопросов, в частности вопрос о сходимости, т. е. о том, стремятся ли решения разностных уравнений к решению нашего уравнения в частных производных, когда ε и $\tau \to 0$, и вопрос об устойчивости, т. е. вопрос о том, уменьшаются ли численные ошибки и ошибки округления с увеличением времени или увеличиваются. Фаулер [15] рассматривает вопрос о сходимости, изучая точные решения разностного уравнения (3.4). В работе [16] устойчивость уравнения (3.4) изучается методом, разработанным Нейманом; в ней отмечено характерное превосходство «неявных» соотношений типа (3.11). В статьях Лойтерта [17] указывается, что сходимость возможна в некоторых случаях, в которых условие устойчивости не выполняется. Соотношения между сходимостью и устойчивостью рассматриваются также в работах [18, 19]. Последняя статья содержит довольно полное обсуждение этого вопроса с интересными численными примерами. В большинстве перечисленных выше работ подчеркивается, что сходимость и устойчивость зависят от формы начального и граничных условий. В них отмечаются трудности, с которыми приходится сталкиваться при исследовании линейных задач. В случае нелинейных задач эти вопросы пока еще практически не затрагивались.

**) В столбцах фиксирован первый индекс m; в строках — второй индекс n. (*Прим. ред.*)

$M = 0{,}6$

1	0	0	0	0	0
—0,2	0,6	0	0	0	0
0,76	—0,24	0,36	0	0	0
—0,44	0,72	—0,216	0,216	0	0
0,952	—0,538	0,605	—0,173	0,130	0
—0,836	1,042	—0,548	0,476	—0,130	0,078
1,418	—1,039	1,020	—0,502	0,358	—0,093

Рассматривая случай $M = 0{,}6$, находим, что ошибка в одной цифре на единицу в конце концов приводит к большим ошибкам с чередующимися знаками. При практических расчетах такой эффект быстро становится явным. Согласно критерию (3.7) этот случай является неустойчивым.

В случаях $M = 0{,}25$ и $M = 0{,}5$, которые, в соответствии с (3.7), должны быть устойчивыми, из соотношения (3.8) следует, что величины, стоящие в одиннадцатом ряду таблицы для первого случая и в шестом ряду для второго, должны равняться $(10\pi)^{-1/2}\exp(-m^2/10)$, т. е.

0,178 0,161 0,120 0,073 0,036 0,015

Как мы видим, интересующие нас величины при $M = 0{,}25$ очень хорошо с ними совпадают (имеются лишь небольшие расхождения в последних значащих цифрах). При $M = 0{,}5$ в таблице чередуются нули и величины, вдвое превосходящие точные значения (можно считать, что это обусловлено таким же общим количеством тепла, сконцентрированным в чередующихся через одну пластинах). Действительно, кривая, проведенная через точки с координатами, равными половине этих величин, служит по мере увеличения n все лучшим и лучшим приближением к точному результату. Если $v_{m,0}$ — точки на непрерывной кривой, то наблюдаемые колебания сглаживаются.

В данном случае (т. е. при $M = 0{,}5$) уравнение (3.4) принимает особенно простой вид

$$v_{m,\,n+1} = \frac{1}{2}(v_{m-1,\,n} + v_{m+1,\,n}), \tag{3.9}$$

и, следовательно, значение v при $m\varepsilon$, $(n+1)\tau$ точно равно среднему арифметическому от значений v при $(m \pm 1)\varepsilon$, $n\tau$. Этот процесс определения среднего арифметического можно выполнить либо численным, либо графическим методом; последний, называемый *методом Шмидта* [20, 21]*), применяется уже довольно давно при исследовании теплообмена.

В большинстве практических случаев, когда достаточна точность порядка нескольких процентов, уравнения (3.4) и (3.9) оказываются одинаково пригодными. Их преимущества заключаются в повторяемости очень простых операций, и поэтому эти уравнения очень удобны при использовании как простых, так и сложных электронных вычислительных машин.

Рассматривая далее возможность отыскания разностных уравнений, которые более точно представляли бы дифференциальное уравнение, естественно заменить неточное выражение (2.8) данной главы выражением (2.18) этой же главы, в котором опущены только третьи разности. Подстановка (2.11) предыдущего параграфа в (3.2) дает

$$v_{m,\,n+1} = v_{m,\,n-1} + 2M(v_{m-1,\,n} - 2v_{m,\,n} + v_{m+1,\,n}), \tag{3.10}$$

где, как и раньше, $M = \varkappa\tau/\varepsilon^2$. Это соотношение, так же как и (3.4), определяет $v_{m,\,n+1}$ непосредственно через известные величины, хотя последние

*) В работах [22, 23] этот метод распространен на тела цилиндрической и сферической формы.

теперь находятся в двух предшествующих рядах. К сожалению, эта система оказывается неустойчивой. Поэтому, если, как и раньше, мы рассчитаем распространение единичной ошибки, то для $M = 1/2$ получим

1	0	0	0	0
—2	1	0	0	0
7	—4	1	0	0

Выражение (2.11) используется в весьма удачном методе, разработанном в [24] (см. также [3]). В этом методе дифференциальное уравнение для $\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$ заменяется разностным уравнением. Используя соотношение (2.11) для представления $(\partial v/\partial t)$ при $\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$ и среднее значение величин (2.14) при $n\tau$ и $(n+1)\tau$ для представления $(\partial^2 v/\partial x^2)$ при $t=\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$, получим

$$v_{m,\,n+1}-v_{m,\,n}=\frac{\varkappa\tau}{2\varepsilon^2}\{(v_{m-1,\,n}+v_{m-1,\,n+1})-2(v_{m,\,n}+v_{m,\,n+1})+ \\ +(v_{m+1,\,n}+v_{m+1,\,n+1})\}. \quad (3.11)$$

Приведенный метод обладает тем преимуществом, что в случаях переменной температуропроводности, источника тепла переменной мощности или переменных граничных условий эти изменения можно учесть физически удовлетворительным образом, а именно, считая, например, $\varkappa$ равным не величине, соответствующей $v_{m,\,n}$, а среднему значению по области. Однако уравнение (3.11) не так легко использовать, как (3.4), так как оно не дает непосредственного выражения $v_{m,\,n+1}$ через $v_{m,\,n}$, а позволяет только написать ряд алгебраических уравнений, которые должны быть решены. Их решение можно получить при помощи обычных приемов, основанных на методе релаксации или аналогичных методах. Этот вопрос достаточно полно изложен в литературе [3]. Дальнейшее уточнение метода с использованием разностей более высоких порядков выполнено Дугласом [25, 26].

Наконец, следует отметить, что случаи радиального потока в шарах или цилиндрах можно рассматривать почти таким же способом при помощи соотношения (2.17) или (2.15) настоящей главы.

§ 4. Граничные условия

Мы будем рассматривать здесь только левую граничную поверхность; тогда нас будет интересовать область $x > 0$ и значения $v_{m,\,n}$ при $m=0, 1, 2, \ldots$ Аналогичным образом можно рассматривать и только правую граничную поверхность.

В случае *заданной температуры* задается и вводится в систему разностных уравнений функция $v_{0,\,n}$. Как отмечалось в § 3 настоящей главы, характер этой функции может влиять на устойчивость уравнений.

Во все другие граничные условия входит тепловой поток

$$-K\frac{\partial v}{\partial x}=F(v,\,t) \quad \text{при} \quad x=0. \quad (4.1)$$

Если в задаче с твердым телом используется разностное уравнение (3.4) и для любого n нам известны $v_{m,\,n}$, $m=0, 1, 2, \ldots$, то из этого уравнения можно найти значения $v_{m,\,n+1}$, $m=1, 2, \ldots$, и остается найти $v_{0,\,n+1}$ из условия (4.1) на граничной поверхности. Это можно сделать несколькими способами.

I. Подставляя выражение (2.8) данной главы в условие (4.1) и пренебрегая вторыми разностями, получим

$$v_{0,\,n+1} - v_{1,\,n+1} = \frac{\varepsilon}{K} f\{v_{0,\,n+1},\ (n+1)\tau\}. \tag{4.2}$$

Это уравнение можно решить относительно $v_{0,\,n+1}$.

II. Более точный результат аналогичного типа можно получить, используя соотношение (2.9) вместо (2.8). Это дает

$$3v_{0,\,n+1} - 4v_{1,\,n+1} + v_{2,\,n+1} = \frac{2\varepsilon}{K} f\{v_{0,\,n+1},\ (n+1)\tau\}. \tag{4.3}$$

Ни один из этих методов нельзя считать достаточно удовлетворительным, поскольку они требуют экстраполяции функции в область, в которой она может быстро меняться.

III. Этот метод проще всего изложить, воспользовавшись схемой, разработанной Шмидтом. Ее особенность заключается в задании совокупности температур $v_{-1,\,n}$ в фиктивной точке $x = -\varepsilon$. Если для $m \geqslant -1$ известно $v_{m,\,n}$, то из (3.4) можно найти $v_{0,\,n+1}$. Для нахождения $v_{-1,\,n}$ соотношение (2.11) подставляют в условие (4.1). Пренебрегая третьими разностями, получим

$$v_{-1,\,n} = v_{1,\,n} + \frac{2\varepsilon}{K} f(v_{0,\,n},\ n\tau). \tag{4.4}$$

В этом случае $v_{-1,\,n}$, а следовательно, и $v_{0,\,n+1}$ определяются непосредственно, без решения таких уравнений, как (4.2) или (4.3).

При отсутствии теплового потока на границе уравнение (4.4) принимает вид

$$v_{-1,\,n} = v_{1,\,n}. \tag{4.5}$$

IV. Следует отметить, что в методах I и II рассматриваются величины теплового потока при $(n+1)\tau$, тогда как в методе III — его величина при $n\tau$. Если тепловой поток быстро меняется с изменением температуры или во времени, то можно ожидать, что указанные методы дадут различные результаты, что можно учесть, вводя в (4.4) значения потока при $\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$; тогда приближенно получим выражение

$$v_{-1,\,n} = v_{1,\,n} + \frac{2\varepsilon}{K}\left\{ f(v_{0,\,n},\ n\tau\Big) + \frac{1}{2}(v_{0,\,n+1} - v_{0,\,n})\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]_{0,\,n}\right\}. \tag{4.6}$$

Объединяя его с (3.4), снова получаем для $v_{0,\,n+1}$ линейное уравнение.

Приведенные выше формулы, а также ряд других рассматриваются в работе [14], где исследовались их устойчивость и точность для случая теплообмена по линейному закону.

Далее следует остановиться еще на одном, довольно интересном практическом моменте, а именно на использовании *начального решения*. Пусть, например, на тело с постоянной температурой внезапно накладываются граничные условия; тогда тепловой поток вблизи поверхности окажется большим и величины $\partial v/\partial x$, рассчитанные на первых нескольких шагах по времени, будут очень неточными. Поэтому желательно начинать не с постоянных значений при $t = 0$, а с вычисленного решения, например при $t = \tau$ или 2τ, даже если это решение найдено с учетом приближенного (линеаризованного) граничного условия. Такие решения легко получить из точных решений, приведенных ранее. Для важных граничных условий можно, вероятно, найти новые решения. Например, для случая, когда тепловой поток через

поверхность является степенной функцией ее температуры, известно решение, пригодное для небольших значений времени [27] *).

Ряд сравнений точных решений при различных методах рассмотрения граничного условия был сделан в статье [14] для случая теплообмена по линейному закону.

§ 5. Выделение тепла, переменная температуропроводность и скрытая теплота

В случае выделения тепла к левой части уравнения (3.1) настоящей главы следует добавить член $A(v, x, t)/K$. При использовании метода конечных разностей к правой части уравнения (3.4) нужно прибавить член $\varkappa\tau A(v_{m,n}, m\varepsilon, n\tau)/K$, или, для получения лучшего приближения, член

$$\frac{\varkappa\tau}{K}\left\{A(v_{m,n}, m\varepsilon, n\tau)+\frac{1}{2}(v_{m,n+1}-v_{m,n})\left[\frac{\partial A}{\partial v}\right]_{m,n}\right\}. \tag{5.1}$$

В формуле Кранка — Никольсона (3.11) к правой части следует прибавить член

$$\frac{\varkappa\tau}{2K}\{A(v_{m,n}, m\varepsilon, n\tau)+A(v_{m,n+1}, m\varepsilon, (n+1)\tau)\}. \tag{5.2}$$

Над задачами этого типа до настоящего времени работали еще мало. В статье [24] обсуждался случай выделения тепла при химической реакции. В статье [28] рассматривались вопросы устойчивости и был дан ряд численных примеров.

Случай переменной температуропроводности кратко упоминался в § 3 настоящей главы. Чтобы учесть ее изменение, в соотношении (3.5) $\varkappa$ следует приписать величину, соответствующую $v_{m,n}$, тогда как в (3.11) ей следует приписать величину, соответствующую $v_{m,n+\frac{1}{2}}$. Этот случай, имеющий большое значение при рассмотрении диффузии, достаточно полно изложен в книге [3].

Перечислим теперь наиболее важные задачи этого типа в теории теплопроводности: 1) задачи, в которых температуропроводность является ступенчатой функцией температуры (это соответствует также выделению скрытой теплоты в диапазоне температур плавления), и 2) родственная им задача выделения скрытой теплоты в точке плавления. Эти задачи имеют большое техническое значение. Кроме того, хотя известны точные решения задач такого рода для полуограниченного тела, для пластины и для цилиндра они отсутствуют. Для последних случаев решения должны получаться при помощи численных методов, однако в качестве «начальных решений» чрезвычайно полезными оказываются точные решения, приведенные в гл. XI [29]. Влияние скрытой теплоты изучалось в [30, 31]. В работе [30] указывается, что в задачах этого типа удобнее производить расчеты с Q, теплосодержанием единицы массы тела, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho\frac{\partial Q}{\partial t}=K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{5.3}$$

Соответствующая формула в конечных разностях, полученная с помощью (3.4), имеет вид

$$Q_{m,n+1}=Q_{m,n}+\frac{K\tau}{\rho\varepsilon^2}(v_{m+1,n}+v_{m-1,n}-2v_{m,n}). \tag{5.4}$$

Расчет проводится так же, как и ранее, причем в точке плавления имеется разрыв непрерывности Q, или на конце интервала температур плавления — разрыв непрерывности c.

§ 6. Релаксационные методы

В предыдущих параграфах рассматривались методы последовательных приближений для решения уравнений в бесконечной области $t>0$. Релаксационные методы [32] применимы к установившимся процессам, заданным в конечной области с известными условиями во всех точках границы. В течение многих лет эти методы

*) В этой работе, в частности, рассматриваются излучение черного тела и естественная конвекция.

использовались для решения уравнений Лапласа и Пуассона; они особенно полезны для решения таких задач теплопроводности, как задача об установившемся потоке через стенку, изогнутую под прямым углом, или через область, находящуюся между кубами с параллельными гранями и общим центром симметрии; подобные задачи трудно (или вообще невозможно) решить аналитическими методами. Этот метод слишком хорошо известен, чтобы его нужно было здесь излагать. В литературе можно найти много достаточно полных его описаний (см., например, [6]) *).

При двумерном установившемся тепловом потоке необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \tag{6.1}$$

в данной области при заданных условиях на ее граничной поверхности. Используя соотношение (2.21) настоящей главы и пренебрегая разностями более высоких порядков [37], заменим уравнение (6.1) разностным уравнением

$$v_{m,\,n+1}+v_{m,\,n-1}+v_{m-1,\,n}+v_{m+1,\,n}-4v_{m,\,n}=0, \tag{6.2}$$

которое должно быть решено при заданных условиях в точках сети на самой границе или близ нее. Именно для таких задач и были первоначально разработаны релаксационные методы; только недавно были сделаны попытки использовать их для рассмотрения неустановившихся процессов (например, для задач с переменным тепловым потоком).

Чтобы применить релаксационные методы к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}=0, \tag{6.3}$$

рассмотрим область $0<x<l$ при $0<t<T$ при заданных условиях на линиях **) $x=0$, $x=l$, $t=0$, $t=T$.

Один из методов, которым можно воспользоваться, заключается в введении [39] новой функции w, определяемой соотношением

$$v=\frac{\partial w}{\partial t}+\varkappa\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{6.4}$$

при условии $w=0$, когда $x=0$, $w=0$, когда $x=l$ и $\partial w/\partial t=0$, когда $t=T$. Эти условия не являются несовместимыми и не накладывают никаких ограничений на v. Подставляя соотношение (6.4) в (6.3), получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\varkappa^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \tag{6.5}$$

с рядом граничных условий, к которым применимы релаксационные методы.

Помимо этого, используется ряд методов, которые считаются релаксационными; однако на самом деле они являются методами последовательных приближений и в них релаксационные методы используются для решения системы уравнений для значений v в любой заданный момент времени. Таким образом, релаксационные методы использовались для решения системы уравнений (3.11) данной главы, что позволило выразить $v_{m,\,n+1}$ через $v_{m,\,n}$ в методе Кранка — Никольсона ***). Важный метод подобного типа был предложен Либманом [41] ****), который подставлял в соотношение (3.2) вместо (3.3) равноценное выражение

$$\left[\frac{\partial v_m}{\partial t}\right]_n=\frac{1}{\tau}\,(v_{m,\,n}-v_{m,\,n-1}), \tag{6.6}$$

---

*) В большинстве работ по теплопередаче дается краткое изложение этого метода с точки зрения теории теплопроводности. Подробно он рассмотрен в работе [1]. Хорошее краткое введение в метод дано в [33]. В работе [34] рассматривается решение уравнения Пуассона для трехмерного случая. Совместное использование релаксационных методов и интегральных преобразований излагается в [35]. Применение релаксационных методов к задачам со скрытой теплотой рассмотрено в [36].

**) В работе [38] отмечается, что здесь можно использовать конечное установившееся состояние, если оно существует.

***) Этот вопрос изложен в статье [40]; там же рассматривается член $A(x, t)$, соответствующий выделению тепла.

****) Данный метод [41] легко применить к двумерным задачам.

и, таким образом, получал разностное уравнение

$$Mv_{m-1,n} - (2M+1)\,v_{m,n} + Mv_{m+1,n} + v_{m,n-1} = 0, \qquad (6.7)$$

где $M = \varkappa\tau/\varepsilon^2$. Эту систему уравнений для значений $v_{m,n}$, выражаемых через $v_{m,n-1}$, затем решают релаксационными методами. Эти методы обладают тем преимуществом, что они устойчивы при всех значениях M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dusinberre, Numerical Analysis of Heat Flow, McGraw-Hill, 1949.
2. Ingersoll, Zobel, Ingersoll, Heat Conduction, University of Wisconsin Press, 1954.
3. Crank, The Mathematic of Diffusion, Oxford, 1956.
4. King, Ind. Eng. Chem. **43**, 2475 (1951).
5. Philip, Trans. Faraday Soc. **51**, 885 (1955).
6. Hartree, Numerical Analysis, Oxford, 1952.
7. Milne, Numerical Calculus, Princeton, 1949.
8. Richardson, Phil. Trans. Roy. Soc. **A210**, 307 (1910); **A226**, 299 (1927).
9. Hartree, Womersley, Proc. Roy. Soc. **A161**, 353 (1937).
10. Paschkis, Baker, Trans. ASME 64, 105—112 (1942).
11. Paschkis, Heisler, Elect. Engng **63**, 165 (1944); J. Appl. Phys. **17**, 246—254 (1946).
12. Moore, Ind. Eng. Chem. **28**, 704 (1936).
13. Eyres, Hartree et al., The Calculation of Variable Heat Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc. **A240**, 1—57 (1946).
14. Price, Slack, Brit. J. Appl. Phys. **3**, 379—384 (1952).
15. Fowler, Quart. Appl. Math. **3**, 361—376 (1946).
16. O'Brien, Hyman, Kaplan, J. Math. Phys. **29**, 223—251 (1950).
17. Leutert, Proc. Am. Math. Soc. **2**, 433—439 (1951); J. Math. Phys. **30**, 245—251 (1951).
18. Hildebrand, J. Math. Phys. **31**, 35—41 (1952).
19. Evans, Brousseau, Keirstead, J. Math. Phys. **34**, 267—285 (1955)
20. Schmidt, Föppl's Festschrift, Springer, 1924.
21. Nussbaum, Z. angew. Math. Mech. **8**, 133—142 (1928).
22. Nessi, Nisolle, Chal. et Industr. **9**, 193 (1928).
23. Patton, Ind. Eng. Chem. **36**, 990—996 (1944).
24. Crank, Nicholson, Proc. Cambr. Phil. Soc. **43**, 50—67 (1947).
25. Douglas, J. Math. Phys. **35**, 145—151 (1956).
26. Crandall, Quart. Appl. Math. **13**, 318—320 (1955).
27. Jaeger, Proc. Camb. Phil. Soc. **46**, 634—641 (1950).
28. Blanch, J. Res. Nat. Bur. Stand. **50**, 343—356 (1953).
29. Jaeger, Am. J. Sci. **255**, 306 (1957).
30. Price, Slack, Brit. J. Appl. Phys. **5**, 285—287 (1954).
31. Crank, Quart. J. Appl. Math. **10**, 220 (1957).
32. Southwell, Relaxation Methods in Engineering Science, Oxford, 1940; Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford, 1946.
33. Emmons, Trans. ASME **65**, 607—615 (1943).
34. Allen, Dennis, Quart. J. Mech. Appl. Math. **4**, 199—208 (1951).
35. Tranter, Quart. J. Mech. Appl. Math. **1**, 125—130 (1948).
36. Allen, Severn, Quart. J. Mech. Appl. Math. **5**, 447—454 (1952).
37. Fox, Proc. Roy. Soc. **A190**, 31—59 (1947).
38. Gilmor, Brit. J. Appl. Phys. **2**, 199—204 (1951).
39. Allen, Severn, Quart. J. Mech. Appl. Math. **4**, 209—222 (1951).
40. Mitchell, Appl. Sci. Res. **A4**, 109—119 (1954).
41. Libmann, Brit. J. Appl. Phys. **6**, 129—135 (1955).

ПРИЛОЖЕНИЕ I

КОНТУРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОВЕРКА РЕШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В § 3 гл. XII отмечалось, что с точки зрения чистой математики решения, полученные методом преобразования Лапласа *), являются по существу формальными; иными словами, различные операции, например перемена порядка дифференцирования и интегрирования, производятся без достаточного обоснования. Там же указывалась необходимость проверки того, что все полученные решения (для линейного потока) удовлетворяют дифференциальным уравнениям, а также начальным и граничным условиям.

Метод обоснования заключается в следующем. Во всех случаях **) мы ищем $\bar{v}$, а v находим при помощи формулы обращения (см. (3.8) гл. XII)

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \bar{v}(\lambda)\, d\lambda, \tag{1}$$

где γ так велико, что все особые точки $\bar{v}(\lambda)$ лежат слева от линии $(\gamma - i\infty,\ \gamma + i\infty)$.

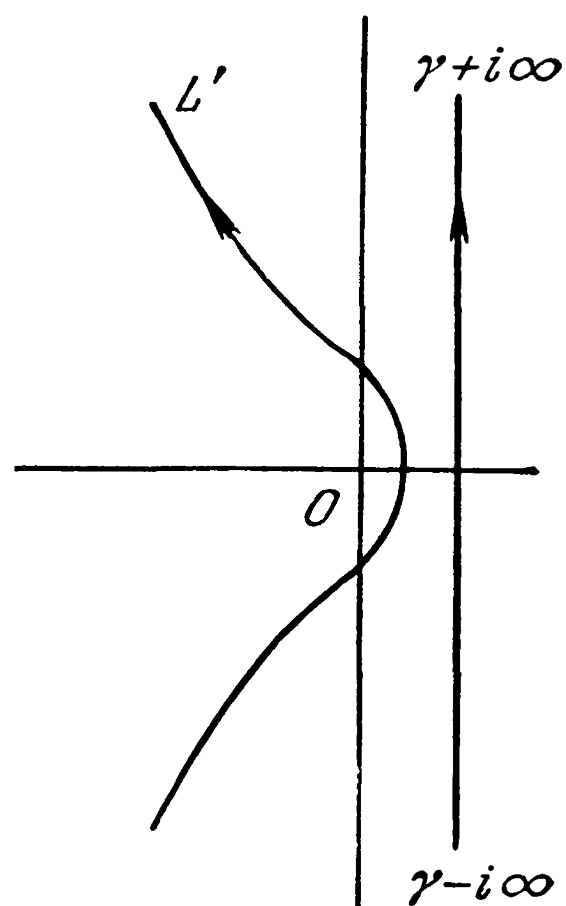


Рис. 61.

В рассмотренных в настоящей книге задачах этими особыми точками служило конечное число полюсов и точек ветвления, а также, быть может, бесконечное число полюсов в изолированных точках на отрицательной вещественной полуоси. Таким образом, мы можем всегда выбрать новый путь интегрирования L' (рис. 61), который начинается в бесконечности в направлении $\arg \lambda = -\beta$, $\left(\pi > \beta > \frac{1}{2}\pi\right)$, проходит справа от начала координат и уходит в бесконечность в направлении $\arg \lambda = \beta$, причем все особые точки подынтегральной функции остаются слева.

Для функций $\bar{v}(\lambda)$, с которыми мы встречались ранее, можно всегда показать, что

$$\int\limits_{L'} e^{\lambda t} \bar{v}(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \bar{v}(\lambda)\, d\lambda. \tag{2}$$

---

*) То же замечание применимо почти ко всем общим решениям, полученным при использовании более ранних методов. В самом деле, их значительно легче раскритиковать, так как при их использовании обычно предполагают, что произвольную функцию можно разложить в ряд по некоторой системе функций, но не проверяют эту систему на полноту; таким образом, возникает опасность исключения части решения (см. сноску к стр. 201). В настоящее время строго проанализировано лишь очень мало даже сравнительно простых задач, в которые входят произвольные функции. (Вопрос о радиальном тепловом потоке в цилиндре кругового сечения рассматривается в заметке Мура [1].)

**) С этой точки зрения использование таблицы преобразований является вопросом удобства. Так, все приведенные в ней результаты можно получить, применяя формулу обращения.

Для этого рассмотрим замкнутый контур $ABB''A''A$ на рис. 62, который состоит из отрезка AB линии $\operatorname{Re}(\lambda)=\gamma$, из отрезка $A''B''$ контура L' и из дуг $BB'B''$ и $A''A'A$ большой окружности с радиусом R и с центром в начале координат. Внутри этого контура особые точки отсутствуют. Формула (2) следует из теоремы Коши, если в пределе, по мере того как $R\to\infty$, интегралы вдоль дуг $AA'A''$ и $BB'B''$ стремятся к нулю. Рассмотрение подынтегральной функции показывает, что это справедливо в любом из специальных разобранных в данной книге случаев *).

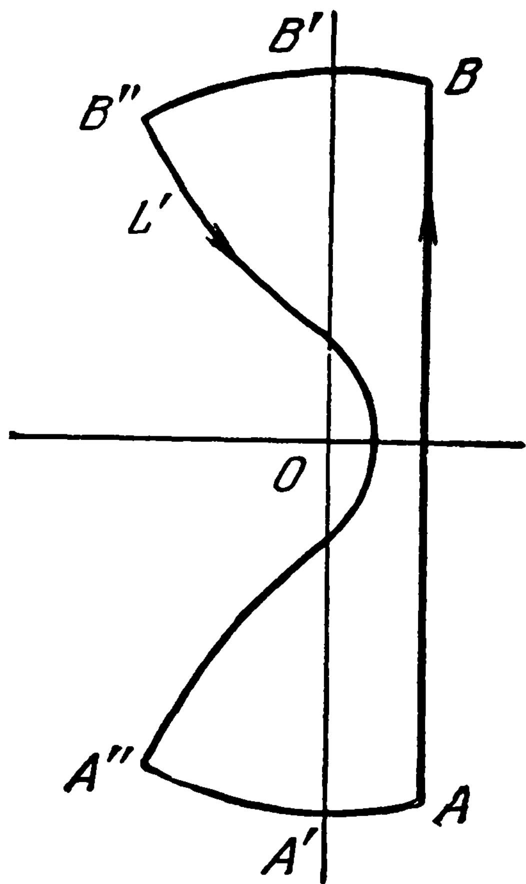


Рис. 62.

Таким образом, в этих случаях мы получаем

$$v=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} e^{\lambda t}\bar{v}(\lambda)\,d\lambda. \tag{3}$$

Далее можно показать, что интеграл (3) сходится равномерно по пространственной переменной в заданной области при фиксированном t; он сходится также равномерно по t для $t\geqslant 0$ при фиксированной пространственной переменной. Дифференцирование под знаком интеграла является законным и, таким образом, легко показать, что данное дифференциальное уравнение удовлетворяется. Аналогичным путем находят, что удовлетворяются начальные и граничные условия. Преимущество пути L' перед путем по прямой $(\gamma-i\infty,\ \gamma+i\infty)$ заключается в том, что в первом случае мы получаем множитель типа

$$\exp\left\{-k|\lambda|^{1/2}\cos\frac{1}{2}\beta+t|\lambda|\cos\beta\right\},$$

где $\pi>\beta>\frac{1}{2}\pi$, а k — положительная величина, содержащая пространственную переменную. Этот множитель обеспечивает требуемую равномерную сходимость. Если в соотношении (3) произвести замену переменной, $\alpha=\lambda^{1/2}e^{i\pi/2}$, то мы должны будем производить интегрирование по пути P (рис. 63), который начинается в бесконечности в направлении $\arg\alpha=\theta$, где $0<\theta<\frac{1}{4}\pi$, и уходит в бесконечность в направлении $\arg\alpha=\pi-\theta$. Очевидно, что интегралы вдоль указанного пути можно рассматривать таким же образом, как и интегралы вдоль пути L', и мы получим

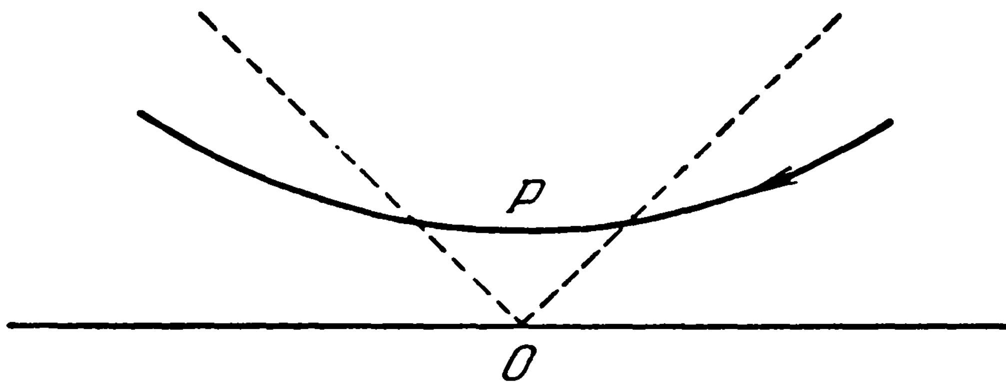


Рис. 63.

$$v=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{P} e^{-\alpha^2 t}\bar{v}(\alpha^2 e^{-i\pi})\,\alpha\,d\alpha. \tag{4}$$

В книге Карслоу [7] контурные интегралы этого типа считаются фундаментальными, и их использование позволило решить целый ряд задач. Следует отметить, что при этом применялся такой же метод, как и используемый здесь, но производилась указанная выше замена переменной.

Для обоснования метода с использованием функций Грина (см. гл. XIV) мы поступим таким же образом; правда, здесь мы должны лишь доказать, что w удовлет-

---

*) Здесь, а также в других случаях необходимо исследовать порядок величины подынтегральной функции на окружности с большим радиусом R. Теоретически это следует делать для каждой специальной задачи, однако на самом деле можно совместно рассматривать обширные классы задач. Подробности для задачи I, приведенной в § 6 гл. XII, изложены в §§ 41 и 58 книги Карслоу и Егера [2]; для задачи § 7 гл. XII — в § 47 той же книги; для задачи о составном сферическом твердом теле — в работе [3]; для некоторых задач о круглых цилиндрах — в работе [4]; подробные решения достаточно полного набора задач о цилиндрических областях $0\leqslant r<a$, $a<r<b$ и $r>a$ с граничными условиями, приведенными в § 9 гл. I, изложены в [5]. Использование параболического контура интегрирования имеет некоторые преимущества по сравнению с применением кругового контура [6].

воряет нашему дифференциальному уравнению и стремится к нулю при $t=0$ и что v удовлетворяет граничным условиям.

Окончательные формы решений, которые мы обычно давали, были представлены в виде рядов или интегралов путем использования контуров, изображенных на рис. 39 и рис. 40 соответственно. Проведенной выше проверкой мы установили, что соотношение (1) удовлетворяет всем условиям задачи, и для того чтобы окончательные решения оказались вполне строгими, необходимо тщательное обоснование приведения (1) к его конечной форме. Это требует доказательства того, что в пределе по мере стремления радиусов больших окружностей контуров к бесконечности (в случае необходимости набор значений радиусов может оказаться дискретным, так что окружности не проходят через полюсы подынтегральной функции) интегралы вдоль этих окружностей стремятся к нулю. Последнее положение можно доказать для всех приведенных здесь решений, используя изложенный выше анализ; дальнейшие подробности можно найти в приведенной литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore, Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 650 (1945).
2. Carslaw, Jaeger, Operational Methods in Applied Mathematics. (Г. Карслоу, Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, М., 1948.)
3. Carslaw, Jaeger, Proc. Camb. Phil. Soc. **35**, 394 (1939).
4. Carslaw, Jaeger, Proc. Lond. Math. Soc. **46**, 361 (1940).
5. Carslaw, Jaeger, Proc. Roy. Soc. N. S. W. **75**, 130 (1942).
6. Churchill, Math. Z. **43**, 743 (1938).
7. Carslaw, Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids Macmillan, 1921. (Г. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1947.)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ФУНКЦИЯ ОШИБОК И РОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Введем обозначение *)

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \tag{1}$$

так что

$$\Phi(\infty) = 1, \tag{2}$$

а

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Кроме того, мы можем написать

$$\Phi^*(x) = 1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi. \tag{3}$$

Будем теперь искать приближения для $\Phi(x)$ при малых и больших значениях x. Для малых значений x используем разложение в ряд $e^{-\xi^2}$ в выражении (1); тогда

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n}}{n!}.$$

Так как этот ряд равномерно сходится, то его можно почленно проинтегрировать, и следовательно,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}. \tag{4}$$

Для больших значений x мы поступим следующим образом. Простое интегрирование по частям дает

$$\int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{e^{-\xi^2}\, d\xi}{\xi^2}.$$

---

*) Первая таблица этих интегралов была приведена в [1], где указываются значения $\Phi(x)$, вычисленные до седьмого знака после запятой, для x с шагом 0,01 в интервале от $x = 0$ до $x = 2$. В работе [2] эти значения вычислены до $x = 3$. В статье [3] приведены новые пятизначные таблицы для интервала от $x = 0$ до $x = 3$ с шагом 0,0001. Самые новые таблицы можно найти в [4, 5]. В работах [6] и [7] приведены более краткие таблицы значений функций $\Phi(x)$, причем в последней указаны также значения ее производных. Для функции (1) применяется множество различных обозначений [8].

Повторяя этот процесс n раз, получим

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi^*(x)=\int_x^\infty e^{-\xi^2}d\xi=$$
$$=\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}x^{2n-1}}\right)+$$
$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_x^\infty\frac{e^{-\xi^2}d\xi}{\xi^{2n}}.$$

Этот ряд не сходится, так как отношение n-го члена к $(n-1)$-му при увеличении n не остается меньшим единицы. Однако если мы возьмем n членов этого ряда, то остаток, т. е.

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_x^\infty\frac{e^{-\xi^2}d\xi}{\xi^{2n}}$$

будет меньше n-го члена, так как

$$\int_x^\infty\frac{e^{-\xi^2}d\xi}{\xi^{2n}}<e^{-x^2}\int_x^\infty\frac{d\xi}{\xi^{2n}}.$$

Таким образом, мы можем остановиться на любом члене ряда; тогда сумма всех членов до него служит приближением для нашей функции, причем допускаемая ошибка меньше абсолютной величины последнего еще не отброшенного нами члена. С такой точностью значения $\Phi^*(x)$ для больших x можно вычислить по формуле

$$\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^7}+\ldots\right). \quad (5)$$

Функция $e^{x^2}\Phi^*(x)$ часто встречается в задачах теплопроводности.

Укажем некоторые другие важные интегралы, также сводящиеся к функции ошибок [9] *):

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2}\frac{\sin 2\xi y}{\xi}d\xi=\frac{1}{2}\pi\Phi(y), \quad (6)$$

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2}\sin 2\xi y\,d\xi=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}\Phi(y). \quad (7)$$

Производные и интегралы функций ошибок.

Последовательные производные функции ошибок обозначаются следующим образом:

$$\Phi_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}\Phi(x) \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\Phi_1(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},$$

$$\Phi_2(x)=-\frac{4}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}$$

*) О других интегралах смотри [10].

и т. п. Их значения затабулированы и приведены в [7]. В задачах теплопроводности интегралы функции ошибок играют очень большую роль *). Введем обозначения

$$\mathrm{i}^n\Phi^*(x) = \int\limits_x^\infty \mathrm{i}^{n-1}\Phi^*\xi\, d\xi, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

причем

$$\mathrm{i}^0\Phi^*(x) = \Phi^*(x). \tag{10}$$

Для краткости мы часто будем писать вместо $\mathrm{i}^1\Phi^*(x)$ тоже $\mathrm{i}\Phi^*(x)$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\mathrm{i}\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x\Phi^*(x), \tag{11}$$

и

$$\mathrm{i}^2\Phi^*(x) = \frac{1}{4}\left[(1+2x^2)\,\Phi^*(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}\right], \tag{12}$$

или

$$\mathrm{i}^2\Phi^*(x) = \frac{1}{4}\left[\Phi^*(x) - 2x\mathrm{i}\Phi^*(x)\right]. \tag{13}$$

Общая рекуррентная формула имеет вид

$$2n\mathrm{i}^n\Phi^*(x) = \mathrm{i}^{n-2}\Phi^*(x) - 2x\mathrm{i}^{n-1}\Phi^*(x), \tag{14}$$

причем (13) для случая, когда $n = 2$, легко получить методом индукции.

Из соотношения (14) следует, что

$$\mathrm{i}^n\Phi^*(0) = \frac{1}{2^n\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)}. \tag{15}$$

Кроме того, из (14) следует, что $y = \mathrm{i}^n\Phi^*(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2ny = 0. \tag{16}$$

Функция ошибок при комплексном аргументе.

Эта функция, имеющая огромное значение для задач теплопроводности, лишь недавно затабулирована Фадеевой и Терентьевым [13] **). Они определили ее следующим образом:

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^{-z^2}\left\{1 + \frac{2i}{\pi^{1/2}}\int\limits_0^z e^{t^2}\,dt\right\}, \tag{17}$$

где

$$z = x + iy,$$

так что

$$\omega(iz) = e^{z^2}\Phi^*(z). \tag{18}$$

Некоторые значения функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ приведены в табл. 2 и 3 настоящего приложения.

Соотношения (4) и (5), полученные выше для действительного z, справедливы также и для комплексного z.

---

*) Они изучены и затабулированы Хартри [11]. Значения, приведенные в табл. 1 данного приложения, заимствованы из его статьи. В работе [12] указаны значения для n от 1 до 11, для x от 0 до 0,2 (шаг 0,01), от 0,2 до 1 (шаг 0,05) и от 1 до 3 (шаг 0,1).

**) В этой работе приведены значения с 6 десятичными знаками и с шагом аргумента, равным 0,02. В книге Карпова [14] приведена аналогичная таблица с аргументами в полярных координатах. В работах [15] и [16] приведены затабулированные значения функции $w(z)$ для действительного z. Если $x = y$, то интересующий нас интеграл можно выразить через интегралы Френеля; таблица его значений приведена в [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Encke, Method of Least Squares, Astronomisches Jahrbuch, 1834.
2. De Morgan, Essay on Probabilites, 1838.
3. Burgess, Trans. Roy. Soc. Edin. **39**, 257 (1899).
4. Sheppard, The Probability Integral, Brit. Ass. Adv. Science, Math. Tables. Vol. VII, 1939.
5. Sheppard, Tables of the Probability Function, Works Projekt Administration, New York, 1941.
6. Milne — Thomson, Comrie, Standard Four-Figure Mathematical Tables, Macmillan, 1931. (Милн — Томсон и Комри, Четырехзначные математические таблицы, Физматгиз, 1961.)
7. Jahnke—Emde, Tables of Functions, Teubner, ed. 2, 1933. (Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1948.)
8. Jeffreys, Operational Methods in Mathematical Physics, Cambridge, ed. 2, 1931, p. 110.
9. Carslaw, Fourier's Series and Integrals, Macmillan, ed. 3, 1930.
10. Horenstein, Quart. Appl. Math. **3**, 183 (1945).
11. Hartree, Mem. Manchr. Lit. Phil. Soc. **80**, 85 (1935).
12. Kaye, J. Math. Phys. **34**, 119—125 (1955).
13. Фадеева, Терентьев, Таблицы значений функции $w(z)$ для комплексного аргумента, Гостехиздат, 1954.
14. Карпов, Таблицы функций $w(z)$ в комплексной области, Изд-во АН СССР, 1954.
15. Dawson, Proc. Lond. Math. Soc. **29**, 519 (1897—1898).
16. Miller, Gordon, J. Phys. Chem. **35**, 2785 (1931).
17. Clemmow, Munford, Phil. Trans. Roy. Soc. **A245**, 189—211 (1952).

Таблица 1

Функция ошибок, ее производные и интегралы

x	$e^{x^2}\Phi^*(x)$	$4\pi^{-1/2}xe^{-x^2}$	$2\pi^{-1/2}e^{-x^2}$	$\Phi(x)$	$\Phi^*(x)$	$2\,i\Phi^*(x)$	$4\,i^2\Phi^*(x)$	$6\,i^3\Phi^*(x)$	$8\,i^4\Phi^*(x)$	$10\,i^5\Phi^*(x)$	$12\,i^6\Phi^*(x)$
0	1,0	0	1,1284	0	1,0	1,1284	1,0	0,5642	0,25	0,0940	0,0313
0,05	0,9460	0,1126	1,1256	0,056372	0,943628	1,0312	0,8921	0,4933	0,2148	0,0795	0,0261
0,1	0,8965	0,2234	1,1172	0,112463	0,887537	0,9396	0,7936	0,4301	0,1841	0,0671	0,0217
0,15	0,8509	0,3310	1,1033	0,167996	0,832004	0,8537	0,7040	0,3740	0,1573	0,0564	0,0180
0,2	0,8090	0,4336	1,0841	0,222703	0,777297	0,7732	0,6227	0,3243	0,1341	0,0474	0,0149
0,25	0,7703	0,5300	1,0600	0,276326	0,723674	0,6982	0,5491	0,2805	0,1139	0,0396	0,0123
0,3	0,7346	0,6188	1,0313	0,328627	0,671373	0,6284	0,4828	0,2418	0,0965	0,0331	0,0101
0,35	0,7015	0,6988	0,9983	0,379382	0,620618	0,5639	0,4233	0,2079	0,0816	0,0275	0,0083
0,4	0,6708	0,7692	0,9615	0,428392	0,571608	0,5043	0,3699	0,1782	0,0687	0,0228	0,0068
0,45	0,6423	0,8294	0,9215	0,475482	0,524518	0,4495	0,3223	0,1522	0,0577	0,0189	0,0055
0,5	0,6157	0,8788	0,8788	0,520500	0,479500	0,3993	0,2799	0,1297	0,0484	0,0156	0,0045
0,55	0,5909	0,9172	0,8338	0,563323	0,436677	0,3535	0,2423	0,1101	0,0404	0,0128	0,0036
0,6	0,5678	0,9447	0,7872	0,603856	0,396144	0,3119	0,2090	0,0932	0,0336	0,0105	0,0029
0,65	0,5462	0,9614	0,7395	0,642029	0,357971	0,2742	0,1798	0,0787	0,0279	0,0086	0,0024
0,7	0,5259	0,9678	0,6913	0,677801	0,322199	0,2402	0,1541	0,0662	0,0231	0,0070	0,0019
0,75	0,5069	0,9644	0,6429	0,711156	0,288844	0,2097	0,1316	0,0555	0,0190	0,0057	0,0015
0,8	0,4891	0,9520	0,5950	0,742101	0,257899	0,1823	0,1120	0,0464	0,0156	0,0046	0,0012
0,85	0,4723	0,9314	0,5479	0,770668	0,229332	0,1580	0,0950	0,0386	0,0128	0,0037	0,0010
0,9	0,4565	0,9035	0,5020	0,796908	0,203092	0,1364	0,0803	0,0321	0,0104	0,0030	0,0008
0,95	0,4416	0,8695	0,4576	0,820891	0,179109	0,1173	0,0677	0,0265	0,0085	0,0024	0,0006
1,0	0,4276	0,8302	0,4151	0,842701	0,157299	0,1005	0,0568	0,0218	0,0069	0,0019	0,0005
1,1	0,4017	0,7403	0,3365	0,880205	0,119795	0,0729	0,0396	0,0147	0,0045	0,0012	0,0003
1,2	0,3785	0,6416	0,2673	0,910314	0,089686	0,0521	0,0272	0,0097	0,0029	0,0007	0,0002
1,3	0,3576	0,5413	0,2082	0,934008	0,065992	0,0366	0,0184	0,0063	0,0019	0,0004	0,0001
1,4	0,3387	0,4450	0,1589	0,952285	0,047715	0,0253	0,0122	0,0041	0,0011	0,0003	0,0001
1,5	0,3216	0,3568	0,1189	0,966105	0,033895	0,0172	0,0080	0,0026	0,0007	0,0002	
1,6	0,3060	0,2791	0,0872	0,976348	0,023652	0,0115	0,0052	0,0016	0,0004	0,0001	
1,7	0,2917	0,2132	0,0627	0,983790	0,016210	0,0076	0,0033	0,0010	0,0003		
1,8	0,2786	0,1591	0,0442	0,989091	0,010909	0,0049	0,0021	0,0006	0,0002		
1,9	0,2665	0,1160	0,0305	0,992790	0,007210	0,0031	0,0013	0,0003	0,0001		
2,0	0,2554	0,0827	0,0207	0,995322	0,004678	0,0020	0,0008	0,0002	0,0001		
2,1	0,2451	0,0576	0,0137	0,997021	0,002979	0,0012	0,0005	0,0001			
2,2	0,2356	0,0393	0,0089	0,998137	0,001863	0,0007	0,0003				
2,3	0,2267	0,0262	0,0057	0,998857	0,001143	0,0004	0,0002				
2,4	0,2185	0,0171	0,0036	0,999311	0,000689	0,0002	0,0001				
2,5	0,2108	0,0109	0,0022	0,999593	0,000407	0,0001					
2,6	0,2036	0,0068	0,0013	0,999764	0,000236	0,0001					
2,7	0,1969	0,0042	0,0008	0,999866	0,000134						
2,8	0,1905	0,0025	0,0004	0,999925	0,000075						
2,9	0,1846	0,0015	0,0003	0,999959	0,000041						
3,0	0,1790	0,0008	0,0001	0,999978	0,000022						

Таблица 2

Значения функции $u(x, y)$

y \ x	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3	4	5
0	1,0000	0,9900	0,9608	0,8521	0 6977	0,5273	0,3679	0,2369	0,1409	0,0773	0,0392	0,0183	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000
0,1	0,8965	0,8885	0,8650	0,7773	0 6511	0,5093	0,3732	0,2574	0,1684	0,1058	0,0651	0,0402	0,0147	0,0079	0,0039	0,0024
0,2	0,8090	0,8026	0,7835	0,7121	0 6083	0,4897	0,3732	0,2709	0,1892	0,1289	0,0871	0,0595	0,0268	0,0156	0,0078	0,0048
0,3	0,7346	0,7293	0,7138	0,6552	0 5692	0,4695	0,3694	0,2792	0,2047	0,1473	0,1055	0,0764	0,0382	0,0231	0,0117	0,0072
0,4	0,6708	0,6665	0,6537	0,6053	0 5336	0,4492	0,3630	0,2834	0,2157	0,1617	0,1208	0,0909	0,0488	0,0303	0,0155	0,0096
0,5	0,6157	0,6121	0,6015	0,5613	0 5011	0,4294	0,3549	0,2846	0,2233	0,1728	0,1333	0,1034	0,0584	0,0371	0,0192	0,0119
0,6	0,5678	0,5648	0,5560	0,5222	0 4715	0,4103	0,3456	0,2835	0,2280	0,1812	0,1434	0,1138	0,0672	0,0436	0,0229	0,0142
0,7	0,5259	0,5234	0,5160	0,4876	0 4444	0,3919	0,3357	0,2807	0,2306	0,1872	0,1514	0,1226	0,0751	0,0497	0,0264	0,0165
0,8	0,4891	0,4870	0,4807	0,4566	0 4198	0,3745	0,3254	0,2767	0,2314	0,1914	0,1576	0,1298	0,0821	0,0553	0,0298	0,0187
0,9	0,4565	0,4547	0,4494	0,4288	0 3972	0,3580	0,3151	0,2718	0,2308	0,1940	0,1623	0,1356	0,0883	0,0605	0,0331	0,0209
1,0	0,4276	0,4260	0,4215	0,4038	0 3766	0,3425	0,3047	0,2662	0,2292	0,1954	0,1657	0,1402	0,0938	0,0653	0,0363	0,0230
1,1	0,4017	0,4004	0,3965	0,3812	0 3576	0,3279	0,2946	0,2602	0,2268	0,1957	0,1680	0,1438	0,0985	0,0697	0,0393	0,0251
1,2	0,3785	0,3774	0,3740	0,3608	0 3402	0,3142	0,2847	0,2540	0,2237	0,1952	0,1694	0,1465	0,1025	0,0736	0,0422	0,0271
1,3	0,3576	0,3566	0,3537	0,3422	0 3242	0,3013	0,2752	0,2476	0,2202	0,1941	0,1700	0,1485	0,1060	0,0772	0,0449	0,0290
1,4	0,3387	0,3379	0,3353	0,3252	0 3095	0,2892	0,2660	0,2412	0,2163	0,1923	0,1700	0,1497	0,1088	0,0804	0,0475	0,0309
1,5	0,3216	0,3208	0,3186	0,3097	0 2958	0,2779	0,2571	0,2349	0,2123	0,1902	0,1695	0,1504	0,1112	0,0832	0,0499	0,0327
1,6	0,3060	0,3053	0,3033	0,2955	0 2832	0,2672	0,2487	0,2286	0,2080	0,1878	0,1685	0,1506	0,1132	0,0857	0,0521	0,0344
1,7	0,2917	0,2911	0,2893	0,2824	0 2715	0,2572	0,2406	0,2224	0,2037	0,1851	0,1672	0,1504	0,1147	0,0879	0,0542	0,0361
1,8	0,2786	0,2780	0,2765	0,2703	0 2606	0,2479	0,2329	0,2164	0,1993	0,1822	0,1656	0,1499	0,1159	0,0897	0,0562	0,0377
1,9	0,2665	0,2660	0,2646	0,2592	0 2505	0,2390	0,2255	0,2106	0,1949	0,1792	0,1637	0,1490	0,1167	0,0914	0,0580	0,0392
2,0	0,2554	0,2550	0,2537	0,2488	0 2410	0,2307	0,2185	0,2049	0,1906	0,1761	0,1617	0,1480	0,1172	0,0927	0,0597	0,0406
2,2	0,2356	0,2353	0,2343	0,2303	0 2240	0,2155	0,2055	0,1942	0,1821	0,1697	0,1573	0,1452	0,1176	0,0947	0,0626	0,0433
2,4	0,2185	0,2182	0,2174	0,2142	0 2090	0,2020	0,1936	0,1842	0,1740	0,1633	0,1526	0,1420	0,1172	0,0960	0,0651	0,0457
2,6	0,2036	0,2034	0,2027	0,2000	0 1957	0,1899	0,1829	0,1749	0,1662	0,1571	0,1477	0,1384	0,1162	0,0966	0,0670	0,0478
2,8	0,1905	0,1904	0,1898	0,1876	0 1840	0,1791	0,1731	0,1663	0,1589	0,1510	0,1428	0,1346	0,1147	0,0967	0,0686	0,0496
3,0	0,1790	0,1788	0,1784	0,1765	0 1734	0,1693	0,1643	0,1584	0,1520	0,1451	0,1380	0,1308	0,1129	0,0964	0,0698	0,0512
3,2	0,1687	0,1686	0,1682	0,1666	0 1640	0,1605	0,1562	0,1511	0,1456	0,1396	0,1333	0,1269	0,1108	0,0957	0,0707	0,0526
3,4	0,1595	0,1594	0,1591	0,1577	0 1555	0,1525	0,1487	0,1444	0,1395	0,1343	0,1288	0,1231	0,1086	0,0948	0,0712	0,0537
3,6	0,1513	0,1512	0,1509	0,1497	0 1478	0,1452	0,1419	0,1381	0,1339	0,1293	0,1244	0,1193	0,1063	0,0937	0,0715	0,0547
3,8	0,1438	0,1437	0,1434	0,1424	0 1408	0,1385	0,1357	0,1323	0,1286	0,1245	0,1202	0,1157	0,1039	0,0924	0,0717	0,0554
4,0	0,1370	0,1369	0,1367	0,1358	3 1344	0,1324	0,1299	0,1270	0,1237	0,1201	0,1162	0,1121	0,1016	0,0909	0,0716	0,0560
4,2	0,1308	0,1307	0,1305	0,1298	0 1285	0,1267	0,1246	0,1220	0,1191	0,1158	0,1124	0,1087	0,0992	0,0894	0,0713	0,0564
4,4	0,1251	0,1251	0,1249	0,1242	0 1231	0,1216	0,1196	0,1173	0,1147	0,1119	0,1088	0,1055	0,0968	0,0879	0,0710	0,0567
4,6	0,1199	0,1199	0,1197	0,1191	0 1181	0,1168	0,1150	0,1130	0,1107	0,1081	0,1053	0,1024	0,0945	0,0862	0,0705	0,0569
4,8	0,1151	0,1151	0,1150	0,1144	0 1135	0,1123	0,1108	0,1089	0,1069	0,1045	0,1020	0,0994	0,0922	0,0846	0,0699	0,0570
5,0	0,1107	0,1107	0,1105	0,1101	0 1093	0,1082	0,1068	0,1052	0,1033	0,1012	0,0989	0,0965	0,0899	0,0830	0,0692	0,0570

Таблица 3

Значения функции $v(x, y)$

y \ x	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4	5
0	0	0,1121	0,2198	0,4062	0,5357	0,6004	0,6072	0,5724	0,5151	0,4513	0,3913	0,3400	0,2517	0,2012	0,1460	0,1152
0,1	0	0,0943	0,1853	0,3447	0,4597	0,5229	0,5386	0,5183	0,4765	0,4262	0,3762	0,3316	0,2500	0,2007	0,1458	0,1152
0,2	0	0,0800	0,1574	0,2947	0,3939	0,4576	0,4790	0,4695	0,4400	0,4008	0,3597	0,3213	0,2471	0,1997	0,1455	0,1150
0,3	0	0,0684	0,1347	0,2536	0,3446	0,4022	0,4272	0,4257	0,4058	0,3759	0,3425	0,3098	0,2430	0,1980	0,1450	0,1148
0,4	0	0,0589	0,1161	0,2197	0,3010	0,3551	0,3822	0,3864	0,3741	0,3518	0,3250	0,2975	0,2381	0,1957	0,1442	0,1144
0,5	0	0,0510	0,1008	0,1915	0,2643	0,3148	0,3429	0,3513	0,3449	0,3288	0,3076	0,2848	0,2324	0,1930	0,1433	0,1140
0,6	0	0,0445	0,0880	0,1679	0,2332	0,2803	0,3085	0,3199	0,3180	0,3070	0,2906	0,2719	0,2262	0,1898	0,1421	0,1134
0,7	0	0,0391	0,0773	0,1480	0,2068	0,2505	0,2784	0,2919	0,2935	0,2865	0,2742	0,2590	0,2195	0,1862	0,1408	0,1128
0,8	0	0,0345	0,0682	0,1311	0,1842	0,2248	0,2520	0,2668	0,2710	0,2674	0,2584	0,2464	0,2126	0,1824	0,1393	0,1120
0,9	0	0,0306	0,0606	0,1167	0,1648	0,2024	0,2288	0,2443	0,2505	0,2496	0,2434	0,2341	0,2055	0,1782	0,1376	0,1112
1,0	0	0,0272	0,0540	0,1044	0,1480	0,1829	0,2082	0,2242	0,2319	0,2330	0,2292	0,2222	0,1983	0,1739	0,1358	0,1103
1,1	0	0,0244	0,0484	0,0938	0,1335	0,1659	0,1900	0,2061	0,2149	0,2177	0,2159	0,2108	0,1911	0,1694	0,1339	0,1094
1,2	0	0,0219	0,0435	0,0845	0,1208	0,1509	0,1739	0,1899	0,1994	0,2035	0,2033	0,1999	0,1839	0,1649	0,1319	0,1083
1,3	0	0,0198	0,0393	0,0765	0,1098	0,1377	0,1595	0,1753	0,1853	0,1904	0,1915	0,1895	0,1769	0,1602	0,1298	0,1072
1,4	0	0,0180	0,0357	0,0695	0,1000	0,1260	0,1467	0,1621	0,1724	0,1783	0,1804	0,1797	0,1700	0,1556	0,1276	0,1060
1,5	0	0,0163	0,0325	0,0634	0,0914	0,1156	0,1352	0,1502	0,1607	0,1671	0,1701	0,1704	0,1632	0,1509	0,1253	0,1048
1,6	0	0,0149	0,0296	0,0580	0,0838	0,1064	0,1250	0,1394	0,1499	0,1568	0,1605	0,1616	0,1567	0,1462	0,1229	0,1035
1,7	0	0,0136	0,0272	0,0532	0,0771	0,0981	0,1157	0,1297	0,1401	0,1472	0,1515	0,1533	0,1504	0,1416	0,1205	0,1022
1,8	0	0,0125	0,0249	0,0489	0,0711	0,0907	0,1074	0,1208	0,1311	0,1384	0,1431	0,1455	0,1442	0,1371	0,1181	0,1008
1,9	0	0,0115	0,0230	0,0451	0,0657	0,0841	0,0998	0,1128	0,1229	0,1303	0,1352	0,1381	0,1384	0,1327	0,1157	0,0994
2,0	0	0,0107	0,0212	0,0417	0,0609	0,0781	0,0930	0,1054	0,1153	0,1227	0,1279	0,1312	0,1327	0,1283	0,1132	0,0980
2,2	0	0,0092	0,0183	0,0360	0,0526	0,0678	0,0812	0,0926	0,1019	0,1093	0,1148	0,1186	0,1221	0,1199	0,1083	0,0950
2,4	0	0,0079	0,0158	0,0313	0,0459	0,0593	0,0713	0,0818	0,0906	0,0977	0,1033	0,1074	0,1124	0,1120	0,1034	0,0920
2,6	0	0,0070	0,0139	0,0274	0,0403	0,0522	0,0631	0,0727	0,0809	0,0877	0,0933	0,0976	0,1036	0,1046	0,0986	0,0890
2,8	0	0,0061	0,0122	0,0242	0,0356	0,0463	0,0561	0,0649	0,0726	0,0791	0,0845	0,0888	0,0956	0,0977	0,0939	0,0859
3,0	0	0,0054	0,0108	0,0215	0,0317	0,0413	0,0502	0,0582	0,0654	0,0716	0,0768	0,0811	0,0883	0,0912	0,0893	0,0828
3,2	0	0,0048	0,0097	0,0192	0,0283	0,0370	0,0451	0,0525	0,0592	0,0650	0,0700	0,0743	0,0817	0,0853	0,0850	0,0798
3,4	0	0,0044	0,0087	0,0172	0,0255	0,0334	0,0408	0,0476	0,0537	0,0592	0,0640	0,0682	0,0757	0,0797	0,0808	0,0768
3,6	0	0,0039	0,0078	0,0156	0,0230	0,0302	0,0370	0,0432	0,0490	0,0541	0,0587	0,0627	0,0702	0,0746	0,0768	0,0739
3,8	0	0,0036	0,0071	0,0141	0,0209	0,0275	0,0337	0,0395	0,0448	0,0497	0,0540	0,0578	0,0653	0,0699	0,0730	0,0711
4,0	0	0,0032	0,0065	0,0128	0,0191	0,0251	0,0308	0,0361	0,0411	0,0457	0,0498	0,0535	0,0608	0,0656	0,0694	0,0683
4,2	0	0,0030	0,0059	0,0117	0,0175	0,0230	0,0282	0,0332	0,0379	0,0421	0,0460	0,0496	0,0567	0,0616	0,0660	0,0656
4,4	0	0,0027	0,0054	0,0108	0,0160	0,0211	0,0260	0,0306	0,0349	0,0390	0,0427	0,0460	0,0530	0,0579	0,0627	0,0630
4,6	0	0,0025	0,0050	0,0099	0,0148	0,0195	0,0240	0,0283	0,0323	0,0361	0,0396	0,0429	0,0496	0,0545	0,0597	0,0605
4,8	0	0,0023	0,0046	0,0092	0,0136	0,0180	0,0222	0,0262	0,0300	0,0336	0,0369	0,0400	0,0465	0,0513	0,0568	0,0581
5,0	0	0,0021	0,0043	0,0085	0,0126	0,0167	0,0206	0,0244	0,0279	0,0313	0,0344	0,0374	0,0436	0,0484	0,0541	0,0558

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

О ФУНКЦИЯХ БЕССЕЛЯ

Здесь мы отметим некоторые свойства функций Бесселя, используемые в настоящей книге *).

Функция Бесселя $J_\nu(z)$ определяется соотношением

$$J_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+2r}}{r!\,\Gamma(\nu + r + 1)}, \tag{1}$$

где ν — действительное число, а z может быть комплексным; из различных возможных значений комплексной функции $J_\nu(z)$ выбирают главное значение. Функция $J_\nu(z)$ удовлетворяет уравнению Бесселя порядка ν

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0. \tag{2}$$

Если ν не равно целому числу, то функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ служат линейно независимыми решениями уравнения (2), но когда ν — целое число, равное n, то

$$J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z).$$

В качестве второго решения уравнения (2), пригодного для всех значений ν, выбирают функцию **)

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}; \tag{3}$$

функцию $Y_n(z)$ (когда n — целое число) определяют как $\lim_{\nu\to n} Y_\nu(z)$. При таком определении

$$\frac{1}{2}\pi Y_0(z) = \left\{\ln\left(\frac{1}{2}z\right) + \gamma\right\} J_0(z) + \left(\frac{1}{2}z\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^6}{(3!)^2} - \ldots, \tag{4}$$

где $\gamma = 0{,}5772$ — постоянная Эйлера.

---

*) Более полные данные по этому вопросу можно найти в книгах: Ватсон, Теория функций Бесселя (ИЛ, 1949) или Грэй и Мэтьюз, Функции Бесселя и их применение в физике и механике (ИЛ, 1953), а также в книге Мак-Лахлана (McLachlan, Bessel Functions for Engineers, Oxford, 1934).

**) Эта функция называется функцией Неймана порядка ν; ее обозначают также $N_\nu(z)$. (*Прим. ред.*)

Итак, если n — любое положительное целое число, то

$$\pi Y_n(z) = 2\left\{\ln\left(\frac{1}{2}z\right)+\gamma\right\} J_n(z) - \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}\left[\sum_{m=1}^{n+r} m^{-1} + \sum_{m=1}^{r} m^{-1}\right] - \sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2r}\frac{(n-r-1)!}{r!}, \quad (5)$$

где при $r=0$ сумму $\left(\sum_{m=1}^{n+r} m^{-1} + \sum_{m=1}^{r} m^{-1}\right)$ следует заменить суммой $\sum_{m=1}^{n} m^{-1}$.

Уравнение Бесселя вида

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} - \left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0 \quad (6)$$

удовлетворяется функцией *)

$$I_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2r}}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}. \quad (7)$$

Если ν не равно целому числу, то $I_{-\nu}(z)$ служит независимым решением уравнения (6); в качестве второго решения, пригодного для всех значений ν, выбираем функцию

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi\,\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\nu\pi}; \quad (8)$$

функцию $K_n(z)$ (когда n — целое число) определяют как $\lim_{\nu\to n} K_\nu(z)$. При таком определении

$$K_0(z) = -\left\{\ln\left(\frac{1}{2}z\right)+\gamma\right\} I_0(z) + \left(\frac{1}{2}z\right)^2 + \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^4}{(2!)^2} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^6}{(3!)^2} + \ldots; \quad (9)$$

если n — любое целое положительное число, то

$$K_n(z) = (-1)^{n+1}\left\{\ln\left(\frac{1}{2}z\right)+\gamma\right\} I_n(z) + \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!} \times \left[\sum_{m=1}^{n+r} m^{-1} + \sum_{m=1}^{r} m^{-1}\right] + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2r}\frac{(n-r-1)!}{r!}, \quad (10)$$

где при $r=0$ сумму $\left(\sum_{m=1}^{n+r} m^{-1} + \sum_{m=1}^{r} m^{-1}\right)$ следует заменить суммой $\sum_{m=1}^{n} m^{-1}$.

*) Эту функцию называют функцией Бесселя от мнимого аргумента. (*Прим. ред.*)

Для больших значений z

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}\left\{1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!\,8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!\,(8z)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right\}, \tag{11}$$

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1 - \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!\,8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!\,(8z)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right\} + \frac{\exp\left[-z \pm \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi i\right]}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}, \tag{12}$$

положительный знак берется тогда, когда $-\frac{1}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi$, а отрицательный — когда $-\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{1}{2}\pi$.

Ниже приводятся наиболее часто используемые соотношения между функциями Бесселя:

$$zI'_\nu(z) + \nu I_\nu(z) = zI_{\nu-1}(z), \tag{13}$$

$$zI'_\nu(z) - \nu I_\nu(z) = zI_{\nu+1}(z), \tag{14}$$

$$zK'_\nu(z) + \nu K_\nu(z) = -zK_{\nu-1}(z), \tag{15}$$

$$zK'_\nu(z) - \nu K_\nu(z) = -zK_{\nu+1}(z), \tag{16}$$

$$zJ'_\nu(z) + \nu J_\nu(z) = zJ_{\nu-1}(z), \tag{17}$$

$$zJ'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) = -zJ_{\nu+1}(z). \tag{18}$$

Функция $Y_\nu(z)$ удовлетворяет тем же соотношениям (17) и (18), что и функция $J_\nu(z)$. В случае $\nu = 0$ эти соотношения принимают вид

$$I'_0(z) = I_1(z); \quad K'_0(z) = -K_1(z); \quad J'_0(z) = -J_1(z); \quad Y'_0(z) = -Y_1(z). \tag{19}$$

$$J_\nu(z)\,Y'_\nu(z) - Y_\nu(z)\,J'_\nu(z) = \frac{2}{\pi z}, \tag{20}$$

$$I_\nu(z)\,K'_\nu(z) - K_\nu(z)\,I'_\nu(z) = -\frac{1}{z}. \tag{21}$$

$$I_\nu(z)\,K_{\nu+1}(z) + K_\nu(z)\,I_{\nu+1}(z) = \frac{1}{z}, \tag{22}$$

$$J_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{m\nu\pi i}J_\nu(z), \tag{23}$$

$$Y_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{-m\nu\pi i}\,Y_\nu(z) + 2i\sin m\nu\pi\,\operatorname{ctg}\nu\pi J_\nu(z), \tag{24}$$

$$K_\nu\left(ze^{\pm\frac{1}{2}\pi i}\right) = \pm\frac{1}{2}\pi i e^{\mp\frac{1}{2}\nu\pi i}\left[-J_\nu(z) \pm iY_\nu(z)\right], \tag{25}$$

$$I_\nu\left(ze^{\pm\frac{1}{2}\pi i}\right) = e^{\pm\frac{1}{2}\nu\pi i}J_\nu(z), \tag{26}$$

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z), \tag{27}$$

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \tag{28}$$

$$\int^{\infty} \xi J_0(r\xi)\,e^{-b\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{2b}\,e^{-r^2/4b}, \tag{29}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left\{-\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right\}\frac{d\xi}{\xi} = K_0(z), \qquad \operatorname{Re}(z^2) > 0. \tag{30}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

КОРНИ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Таблица 1

Первые шесть корней *) α_n уравнения $\alpha \operatorname{tg} \alpha = C$

C	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
0	0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0 0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	15,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,1177
8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675
9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15,0	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20,0	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30,0	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40,0	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
50,0	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666	16,9519
60,0	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80,0	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606	13,9644	17,0686
100,0	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

*) Все корни этого уравнения действительны, если $C > 0$.

Таблица 2

Первые шесть корней *) α_n уравнения $\alpha \operatorname{ctg} \alpha + C = 0$

C	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
—1,0	0	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
—0,995	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666	17,2210
—0,99	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
—0,98	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
—0,97	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683	17,2225
—0,96	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
—0,95	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697	17,2237
—0,94	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
—0,93	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712	17,2248
—0,92	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
—0,91	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726	17,2260
—0,90	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
—0,85	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
—0,8	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
—0,7	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
—0,6	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
—0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
—0,4	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
—0,3	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
—0,2	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
—0,1	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
2,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
3,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
10,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
15,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
20,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
30,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40,0	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
50,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
80,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
100,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

*) Все корни этого уравнения действительны, если $C > -1$. Отрицательные значения C встречаются при рассмотрении сферы (см. § 4 гл. IX).

Таблица 3

Первые шесть корней α_n уравнения $\alpha J_1(\alpha) - CJ_0(\alpha) = 0$

C	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
0	0	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,1	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,2	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,3	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,4	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,5	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,6	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,7	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,8	1,1490	4,0325	7,1282	10,2516	13,3835	16,5191
0,9	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2233	10,3188	13,4353	16,5612
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10,0	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15,0	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20,0	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30,0	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40,0	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50,0	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60,0	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80,0	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100,0	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Таблица 4

Первые пять корней α_n уравнения $J_0(\alpha)\,Y_0(k\alpha) - Y_0(\alpha)\,J_0(k\alpha) = 0$

k	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040
2,5	2,0732	4,1773	6,2754	8,3717	10,4672
3,0	1,5485	3,1291	4,7038	6,2767	7,8487
3,5	1,2339	2,5002	3,7608	5,0196	6,2776
4,0	1,0244	2,0809	3,1322	4,1816	5,2301

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА $\bar{v}(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}v(t)\,dt$

Обозначим $q=\sqrt{p/\varkappa}$. $\varkappa$ и x всегда действительны и положительны. α и h — любые

	$\bar{v}(p)$	$v(t)$
1.	$\dfrac{1}{p}$	1
2.	$\dfrac{1}{p^{\nu+1}},\quad \nu>-1$	$\dfrac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$
3.	$\dfrac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
4.	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
5.	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
6.	e^{-qx}	$\dfrac{x}{2\sqrt{\pi\varkappa t^3}}\,e^{-x^2/4\varkappa t}$
7.	$\dfrac{e^{-qx}}{q}$	$\left(\dfrac{\varkappa}{\pi t}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\varkappa t}$
8.	$\dfrac{e^{-qx}}{p}$	$\Phi^*\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)$
9.	$\dfrac{e^{-qx}}{pq}$	$2\left(\dfrac{\varkappa t}{\pi}\right) e^{-x^2/4\varkappa t}-x\Phi^*\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)$
10.	$\dfrac{e^{-qx}}{p^2}$	$\left(t+\dfrac{x^2}{2\varkappa}\right)\Phi^*\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)-x\left(\dfrac{t}{\pi\varkappa}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\varkappa t}$
11.	$\dfrac{e^{-qx}}{p^{1+\frac{1}{2}n}},\quad n=0,1,2,\ldots$	$(4t)^{\frac{1}{2}n}\,\mathrm{i}^n\Phi^*\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)$
12.	$\dfrac{e^{-qx}}{q+h}$	$\left(\dfrac{\varkappa}{\pi t}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\varkappa t}-h\varkappa\exp(hx+\varkappa th^2)\,\Phi^*\left\{\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right\}$

Продолжение

	$\bar{v}(p)$	$v(t)$
13.	$\dfrac{e^{-qx}}{q(q+h)}$	$\varkappa \exp(hx+\varkappa t h^2)\, \Phi^*\left\{\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right\}$
14.	$\dfrac{e^{-qx}}{p(q+h)}$	$\dfrac{1}{h}\Phi^*\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\dfrac{1}{h}\exp(hx+\varkappa t h^2)\,\Phi^*\left\{\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right\}$
15.	$\dfrac{e^{-qx}}{pq(q+h)}$	$\dfrac{2}{h}\left(\dfrac{\varkappa t}{\pi}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\varkappa t}-\dfrac{1+hx}{h^2}\Phi^*\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+$ $+\dfrac{1}{h^2}\exp(hx+\varkappa t h^2)\,\Phi^*\left\{\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right\}$
16.	$\dfrac{e^{-qx}}{q^{n+1}(q+h)}$	$\dfrac{\varkappa}{(-h)^n}\exp(hx+\varkappa t h^2)\,\Phi^*\left\{\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right\}-$ $-\dfrac{\varkappa}{(-h)^n}\sum_{r=0}^{n-1}[-2h\sqrt{\varkappa t}]^r\, \mathrm{i}^r\Phi^*\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$
17.	$\dfrac{e^{-qx}}{(q+h)^2}$	$-2h\left(\dfrac{\varkappa^3 t}{\pi}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\varkappa t}+\varkappa(1+hx+2h^2\varkappa t)\times$ $\times\exp(hx+\varkappa t h^2)\,\Phi^*\left\{\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right\}$
18.	$\dfrac{e^{-qx}}{p(q+h)^2}$	$\dfrac{1}{h^2}\Phi^*\dfrac{\varkappa}{2\sqrt{\varkappa t}}-\dfrac{2}{h}\left(\dfrac{\varkappa t}{\pi}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\varkappa t}-$ $-\dfrac{1}{h^2}\{1-hx-2h^2\varkappa t\}\exp(hx+\varkappa t h^2)\times$ $\times\Phi^*\left\{\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right\}$
19.	$\dfrac{e^{-qx}}{p-\alpha}$	$\dfrac{1}{2}e^{\alpha t}\left\{e^{-x/\sqrt{\alpha/\varkappa}}\Phi^*\left[\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\sqrt{\alpha t}\right]+\right.$ $\left.+e^{x\sqrt{\alpha/\varkappa}}\Phi^*\left[\dfrac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\sqrt{\alpha t}\right]\right\}$
20.	$\dfrac{1}{p^{3/4}}e^{-qx}$	$\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{x}{2t\varkappa^{1/2}}\right)^{1/2} e^{-x^2/8\varkappa t}K_{1/4}\left(\dfrac{x^2}{8\varkappa t}\right)$
21.	$\dfrac{1}{p^{1/2}}K_{2\nu}(qx)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/8\varkappa t}K_\nu\left(\dfrac{x^2}{8\varkappa t}\right)$
22.	$\left.\begin{matrix} I_\nu(qx')K_\nu(qx),\ x>x' \\ I_\nu(qx)K_\nu(qx'),\ x<x'\end{matrix}\right\}$	$\dfrac{1}{2t}\exp\left[-\dfrac{x^2+x'^2}{4\varkappa t}\right]I_{1/4}\left(\dfrac{xx'}{2\varkappa t}\right),\quad \nu\geqslant 0$
23.	$K_0(qx)$	$\dfrac{1}{2t}e^{-x^2/4\varkappa t}$
24.	$\dfrac{1}{p}e^{\varkappa/p}$	$I_0[2\sqrt{\varkappa t}]$

Продолжение

	$\bar{v}(p)$	$v(t)$
25.	$\dfrac{\exp\{xp - x[(p+a)(p+b)]^{1/2}\}}{[(p+a)(p+b)]^{1/2}}$	$\exp\left[-\frac{1}{2}(a+b)(t+x)\right] \times I_0\left\{\frac{1}{2}(a-b)[t(t+2x)]^{1/2}\right\}$
26.	$p^{\frac{1}{2}\nu-1}K_\nu(x\sqrt{p})$	$x^{-\nu}2^{\nu-1}\int\limits_{x^2/4t}^{\infty} e^{-u}u^{\nu-1}\,du$
27.	$[p-\sqrt{(p^2-x^2)}]^\nu,\quad \nu>0$	$\nu x^\nu I_\nu(xt)/t$
28.	$\dfrac{\exp\{x[(p+a)^{1/2}-(p+b)^{1/2}]^2\}}{(p+a)^{1/2}(p+b)^{1/2}[(p+a)^{1/2}+(p+b)^{1/2}]^{2\nu}},\quad \nu\geqslant 0$	$\dfrac{t^{\frac{1}{2}\nu}\exp\left[-\frac{1}{2}(a+b)t\right]I_\nu\left[\frac{1}{2}(a-b)t^{1/2}(t+4x)^{1/2}\right]}{(a-b)^\nu(t+4x)^{1/2\nu}}$
29.	$\dfrac{e^{-qx}}{(p-\alpha)^2}$	$\frac{1}{2}e^{\alpha t}\left\{\left(t-\frac{x}{2\sqrt{\varkappa\alpha}}\right)e^{-x\sqrt{\alpha/\varkappa}} \times \Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\sqrt{\alpha t}\right]+\left(t+\frac{x}{2\sqrt{\varkappa\alpha}}\right)e^{x\sqrt{\alpha/\varkappa}} \times \Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\sqrt{\alpha t}\right]\right\}$
30.	$\dfrac{e^{-qx}}{q(p-\alpha)}$	$\frac{1}{2}e^{\alpha t}\left(\frac{\varkappa}{\alpha}\right)^{1/2}\left\{e^{-x\sqrt{\alpha/\varkappa}}\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\sqrt{\alpha t}\right] - e^{x\sqrt{\alpha/\varkappa}}\Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\sqrt{\alpha t}\right]\right\}$
31.	$\dfrac{e^{-qx}}{(p-\alpha)(q+h)},\quad \alpha\neq\varkappa h^2$	$\frac{1}{2}e^{\alpha t}\left\{\frac{\varkappa^{1/2}}{h\varkappa^{1/2}+\alpha^{1/2}}e^{-x\sqrt{\alpha/\varkappa}} \times \Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\sqrt{\alpha t}\right]+\frac{\varkappa^{1/2}}{h\varkappa^{1/2}-\alpha^{1/2}}e^{x\sqrt{\alpha/\varkappa}} \times \Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\sqrt{\alpha t}\right]\right\} - \frac{h\varkappa}{h^2\varkappa-\alpha}\exp[hx+h^2\varkappa t] \times \Phi^*\left[\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+h\sqrt{\varkappa t}\right]$
32.	$\dfrac{1}{p}\ln p$	$-\ln(Ct),\quad \ln C=\gamma=0{,}5772\ldots$
33.	$p^{\frac{1}{2}\nu}K_\nu(x\sqrt{p})$	$\dfrac{x^\nu}{(2t)^{\nu+1}}e^{-x^2/4t}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ТЕРМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ВЕЩЕСТВ

Эта таблица приведена только для того, чтобы показать порядок величин термических коэффициентов, встречающихся на практике. Более полные данные, а также изменения термических коэффициентов с температурой можно найти в книге International Critical Tables или в других работах по стандартизации физических констант. Значения коэффициентов теплопроводности для неметаллов следует считать весьма приближенными средними значениями, так как между их величинами для различных образцов, изготовленных из одного и того же вещества, могут наблюдаться большие расхождения.

В приведенной таблице использованы единицы системы СГС, калории и градусы Цельсия.

Вещество	Плотность ρ	Удельная теплоемкость c	Коэффициент теплопроводности K	Коэффициент температуропроводности $\varkappa$
Металлы				
Серебро	10,49	0,0556	1,00	1,71
Золото	19,30	0,0308	0,70	1,18
Медь	8,94	0,0914	0,93	1,14
Магний	1,74	0,240	0,38	0,91
Алюминий	2,70	0,206	0,48	0,86
Цинк	7,14	0,0917	0,27	0,41
Олово	7,30	0,0534	0,15	0,38
Латунь (70:30)	8,5	0,09	0,25	0,33
Платина	21,46	0,0315	0,17	0,25
Свинец	11,34	0,0302	0,084	0,25
Мягкая сталь (0,1% C)	7,85	0,118	0,11	0,12
Чугун	7,4	0,136	0,12	0,12
Висмут	9,80	0,0292	0,020	0,070
Ртуть	13,55	0,0335	0,020	0,044
Неметаллы				
Воздух	0,00129	0,240	0,000058	0,187
Гранит	2,6	0,21	0,006	0,011
Известняк	2,5	0,22	0,004	0,007
Песчаник	2,3	0,23	0,006	0,011
Горные породы (в среднем)	—	—	0,0042	0,0118
Лед	0,92	0,502	0,0053	0,0115

Продолжение

Вещество	Плотность ρ	Удельная теплоемкость c	Коэффициент теплопроводности K	Коэффициент температуропроводности $\varkappa$
Стекло (кронглас)	2,4	0,20	0,0028	0,0058
Бетон (1:2:4)	2,3	0,23	0,0022	0,0042
Кирпич (строительный)	2,6	0,20	0,0020	0,0038
Снег (свежий)	0,1	0,5	0,00025	0,0050
Грунт (в среднем)	2,5	0,2	0,0023	0,0046
Грунт (песчаный, сухой)	1,65	0,19	0,00063	0,0020
Грунт (песчаный, влажность 8%)	1,75	0,24	0,0014	0,0033
Древесина (еловая, вдоль волокна)	0,41	0,30	0,00055	0,0045
Древесина (еловая, поперек волокна)	0,41	0,30	0,00030	0,0024
Вода	1,0	1,0	0,00144	0,00144
Земная кора	0,15	0,48	0,0001	0,0014

Г. Карслоу, Д. Егер

Теплопроводность твердых тел

М., 1964 г., 488 стр. с илл.

Редактор *Н. А. Райская*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *О. А. Сигал*

Сдано в набор 13/IV 1964 г. Подписано к печати 21/IX 1964 г. Бумага $70 \times 108^1/_{16}$. Физ. печ. л. 30,5. Условн. печ. л. 41,79. Уч.-изд. л. 38,11. Тираж 6500 экз. Цена книги 2 р. 11 к. Заказ № 344.

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени
Евгении Соколовой «Главполиграфпрома»
Государственного комитета Совета Министров СССР
по печати. Измайловский проспект, 29.